

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Primer Orden:

Fecha de Entrega: 1 Febrero

L. A. Núñez

*Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia*

25 de enero de 2016

1. Ecuación de Bernoulli

Uno puede reducir un tipo de ecuación diferencial no lineal a una ecuación diferencial lineal y proceder como hemos resuelto los sistemas anteriores. Considere la ecuación diferencial

$$y' + p(x)y = q(x)y^n$$

1. Muestre que el siguiente cambio de variable $v = y^{1-n}$, la convierte en en una ecuación lineal.
2. Considere el caso particular de la ecuación de Verhulst o también conocida como ecuación logística (el caso $n = 2$ con $p(x) = \alpha = \text{const}$) con la condición inicial $y(0) = y_0 > 0$.
 - a) Suponga que $\lim_{x \rightarrow \infty} \exp(\alpha x) \int_0^x dx q(x) \exp(-\alpha x) = L$ existe y encuentre la solución $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x)$
 - b) Suponga ahora, que $q(x)$ es una función discontinua, vale decir

$$q(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq 1 \\ x^2 & x > 1 \end{cases}$$

y considere otra vez la condición inicial $y(0) = y_0 > 0$ y encuentre la solución para $0 \leq x \leq 2$

- c) Considere la evolución demográfica de Colombia¹, ajuste los parámetros para las descripciones maltusiana o verhulstiana y recuerde la historia para ver como puede justificar el ajuste.
- d) Suponga ahora, que $q(x) = \epsilon \ll 1$, y considere que la ecuación la ecuación de Verhulst se puede expresar como $y' = \tilde{p}(x)y + \epsilon y^2$ con lo cual el término cuadrático puede representar una perturbación a la solución de la ecuación lineal. Haga un mapa de la solución gráfica de la ecuación y muestre en el rango $0 \leq x \leq 2$ el comportamiento de la solución para $\epsilon = 0,1$ $\epsilon = 0,01$ $\epsilon = 0,001$

2. Sistemas autónomos

Una de las clases de ecuaciones diferenciales más comunes o utilizadas la constituyen los sistemas autónomos del tipo $y' = f(y)$. Claramente las ecuaciones de Malthus y Verhulst (o logística) constituyen casos

¹Puede consultar <http://www.populstat.info/Americas/colombic.htm> o cualquier otra fuente confiable que puede citar

particulares de este tipo de sistemas para $f_M(y) = ky$ y $f_V(y) = ky(1 - \frac{y}{K})$, respectivamente (con k la constante malthusiana de crecimiento intrínseco) que son fundamentales en dinámica de poblaciones².

1. Considere la ecuación logística $y' = ky(1 - \frac{y}{K})$
 - a) Encuentre la solución gráfica para la familia de soluciones de la ecuación con $k = 1/3$ y $K = 6$.
 - b) Suponga una solución particular para la ecuación con $y(0) = 2$ y encuentre el valor de x para el cual la población inicial se duplicó
 - c) Suponga que $y(0)/K = \alpha$ y encuentre el valor de X , tal que $y(X)/K = \beta$, para $\alpha > 0$ y $\beta < 1$. Note que $X \rightarrow \infty$ cuando $\alpha \rightarrow 0$ o $\beta \rightarrow 1$ Encuentre el valor de X para $k = 0,025$, $\alpha = 0,1$ y $\beta = 0,9$
2. Los sistemas autónomos $y' = f(y)$ admiten un estudio cualitativo interesante a partir del comportamiento de la función $f(y)$. Los ceros de $f(y) = 0$ representan soluciones de equilibrio y de sus máximos y mínimos también podemos extraer información sin resolver la ecuación.
 - a) Considere otra vez la ecuación logística $y' = ky(1 - \frac{y}{K})$, encuentre las dos soluciones de equilibrio y discuta por qué una de ellas se considera como de equilibrio inestable y otra de equilibrio asintótico. Ilustre esas afirmaciones para el caso $k = 1/3$ y $K = 6$,
 - b) Considere ahora una variante de la ecuación logística $y' = -ky(1 - \frac{y}{T})(1 - \frac{y}{K})$, con $0 < T < K$ y $k > 0$. Esta ecuación se utilizó para describir el crecimiento y extinción en norteamérica de la Paloma Migratoria o Paloma de la Carolina³.
 - 1) a partir del análisis de las soluciones críticas discuta el significado de las constantes T y K y de las soluciones en las regiones $0 < y < T$, $T < y < K$ y $y > K$.
 - 2) discuta el significado de los máximos y los mínimos de $f(y) = -ky(1 - \frac{y}{T})(1 - \frac{y}{K})$ y muestre cómo están relacionados con el comportamiento de las soluciones $y(x)$
 - 3) Encuentre la solución gráfica para el caso $k = 1/3$, $T = 2$ y $K = 6$ e ilustre sus afirmaciones. En particular asocie el comportamiento de la función $f(y)$ con la familia de soluciones para este caso.
 - c) Finalmente considere la ecuación de Gompertz⁴ $y' = -ky \ln(\frac{K}{y})$ con K y k constantes positivas
 - 1) Encuentre las soluciones críticas y discuta cuáles corresponden a soluciones estables o inestables
 - 2) Resuelva la ecuación de Gompertz para $k = 1/3$ y $K = 6$ y compárela con la ecuación de Verhulst. ¿Cómo se compara el crecimiento de poblaciones descrito por cada una de estas ecuaciones?

²https://en.wikipedia.org/wiki/Population_ecology

³https://en.wikipedia.org/wiki/Passenger_pigeon

⁴https://en.wikipedia.org/wiki/Gompertz_function