

# Matemáticas Avanzadas: Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

**H. Hernández**

*Departamento de Física, Facultad de Ciencias,  
Universidad de Los Andes, Mérida-Venezuela*

**L. A. Núñez**

*Escuela de Física, Facultad de Ciencias,  
Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga-Colombia*

18 de enero de 2016

# Índice general

0.1. Motivación y Origen . . . . .	3
0.2. Empezando por el principio . . . . .	8
0.2.1. Ejemplos de Algunas ecuaciones diferenciales . . . . .	8
0.2.2. De Ecuaciones y Ecuaciones Diferenciales . . . . .	9
0.2.3. Fauna y Nomenclatura de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias . . . . .	10
0.2.4. Métodos elementales de integración . . . . .	13
0.3. Ecuación Diferenciales de Primer Orden . . . . .	17
0.3.1. Ecuaciones Diferenciales separables . . . . .	17
0.3.2. Ecuaciones Diferenciales Exactas . . . . .	23
0.3.3. Solución Paramétrica de Ecuaciones Diferenciales . . . . .	25
0.4. Soluciones Numéricas a las Ecuaciones Diferenciales . . . . .	25
0.4.1. Las Ideas Generales . . . . .	25
0.4.2. La idea de la Integración y los Métodos . . . . .	27
0.4.3. Control del Paso . . . . .	33
0.5. Algunas Aplicaciones de Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden . . . . .	35
0.5.1. Ley de Malthus/Decaimiento Radioactivo. . . . .	35
0.5.2. La Ecuación logística o Ley de Verhulst . . . . .	36
0.5.3. La Ley de Enfriamiento de Newton . . . . .	37
0.5.4. Interés Compuesto. . . . .	39
0.5.5. Mecánica Elemental. . . . .	40
0.5.6. Modelado de Concentración/Desliemiento de Soluciones . . . . .	45
0.6. Definiciones para comenzar . . . . .	48
0.7. Homogéneas, Lineales, de Segundo Orden . . . . .	49
0.8. Ecuaciones Diferenciales de Orden $n$ . . . . .	51
0.9. Algunos Métodos de Solución para Ecuaciones Inhomog'eneas . . . . .	53
0.9.1. El Wronskiano . . . . .	53
0.9.2. Métodos de los Coeficientes Indeterminados . . . . .	55
0.9.3. Métodos de Variación de los Parámetros . . . . .	56
0.9.4. Métodos de Reducción de Orden . . . . .	59
0.10. Algunas Aplicaciones de las Ecuaciones de Orden Superior . . . . .	60
0.10.1. Mecánica y Electricidad . . . . .	60
0.10.2. Oscilaciones libres . . . . .	60
0.10.3. Oscilaciones Libres Amortiguadas . . . . .	61
0.10.4. Oscilaciones Forzadas . . . . .	63
0.10.5. Oscilaciones Forzadas amortiguadas . . . . .	66
0.10.6. Movimiento alrededor de un punto de equilibrio . . . . .	69
0.10.7. Péndulo Simple con desplazamiento finito. . . . .	70

0.10.8. Disgresión Elíptica . . . . .	77
0.10.9. ¿Cuán buena es la aproximación lineal ? . . . . .	80
0.10.10.El Péndulo Físico: Integración Numérica . . . . .	81
0.11. Otra vez Algebra de Series . . . . .	82
0.12. Un Ejemplo conocido. . . . .	83
0.13. Otro Ejemplo menos conocido pero importante . . . . .	85
0.14. <b>Método de Diferenciaciones Sucesiva</b> . . . . .	87
0.15. <b>Métodos de los Coeficientes Indeterminados</b> . . . . .	88
0.16. Los Puntos y las Estrategias . . . . .	90
0.17. Ecuaciones e intervalos en puntos regulares . . . . .	90
0.18. El Método de Frobenius . . . . .	92
0.18.1. $m_1 \neq m_2 \wedge m_1 - m_2 \neq N$ con $N$ entero. . . . .	97
0.18.2. $m_1 = m_2$ . . . . .	99
0.18.3. $m_1 \neq m_2 \wedge m_1 - m_2 = N$ con $N$ entero. . . . .	104
0.19. Revisitando a Bessel . . . . .	107
0.19.1. Otras Formas de la Ecuación de Bessel . . . . .	114
0.19.2. Relaciones de Recurrencia: . . . . .	114
0.19.3. Funciones de Bessel y Funciones Elementales . . . . .	115
0.19.4. Reflexión: . . . . .	116
0.19.5. Función Generatriz . . . . .	116
0.19.6. Representación Integral para las Funciones de Bessel . . . . .	116
0.19.7. Ortogonalidad de las Funciones de Bessel . . . . .	117
0.20. Algunas funciones Especiales . . . . .	118
0.20.1. Función Gamma e Integrales de Probabilidad . . . . .	118
0.20.2. La Funciones Digamma y Poligamma . . . . .	122
0.20.3. La Aproximación de Stirling . . . . .	124
0.20.4. La función Beta . . . . .	125
0.21. El problema de Sturm-Liouville . . . . .	125
0.21.1. Cálculo Operacional . . . . .	125
0.21.2. Operadores diferenciales de segundo orden . . . . .	127
0.21.3. Operadores diferenciales autoadjuntos . . . . .	128
0.21.4. El Sistema Sturm-Liouville . . . . .	129
0.21.5. Algunos ejemplos ilustrativos . . . . .	130
0.21.6. Función de Green . . . . .	134

## 0.1. Motivación y Origen

En Ciencias, una de las formas de modelar fenómenos físicos es mediante su caracterización a través de una función matemática, digamos  $\mathcal{G} = \mathcal{G}(x, y, z; t)$ . Desde los albores de la actividad científica contemporánea es imperioso describir los fenómenos físicos en el lenguaje de las matemáticas. Una las formas (la ideal) para modelar los cambios de esta función,  $\mathcal{G}(x, y, z; t)$ , que depende de la posición y del tiempo, es a través de una ecuación en la cual están involucradas la función,  $\mathcal{G}(x, y, z; t)$  y sus derivadas. A esa ecuación la llamaremos *Ecuación Diferencial*. Existe toda una “fauna” de ecuaciones diferenciales y hoy disponemos de un importante arsenal de técnicas, métodos y herramientas para encontrar la función  $\mathcal{G}(x, y, z; t)$ , la cual será nuestra función incógnita. Este curso trata, parcialmente, de mostrar parte de esta fauna y de indicarles métodos para resolver un tipo particular de ecuaciones diferenciales: *las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*.

Empecemos por recordar que desde siempre hemos tratado, la mayor de las veces sin saberlo o sin explicitarlo, con este tipo de ecuaciones en donde la incógnita no es un número sino un conjunto de números: una función.

El caso más emblemático lo constituye el conjunto de “fórmulas” que aprendimos en nuestra más tierna infancia intelectual cuando estudiábamos bachillerato o, más recientemente, en los primeros cursos de Física General de la Universidad. En aquellos entonces describíamos el movimiento de partículas en una dimensión, a través de dos ecuaciones:

$$V_f = V_0 + at \quad \text{y} \quad d = V_0t + a\frac{t^2}{2} \quad (1)$$

de memoria repetíamos que  $V_f$  representaba la velocidad final,  $V_0$  la velocidad inicial,  $a$  la aceleración,  $t$  el tiempo transcurrido y  $d$  la distancia recorrida en ese tiempo. El problema consistía en encontrar, para un sinnúmero de situaciones físicas, primeramente el valor de la aceleración del móvil y a partir de las Leyes de Newton, luego conociendo la velocidad y la posición inicial, encontrábamos la posición,  $d$ , y la velocidad,  $V_f$  en todo instante de tiempo. Así, mediante diagramas de cuerpo libre y la utilización de las leyes de Newton, encontrábamos el valor de la aceleración y las “formulitas” (1) resolvíamos el problema.

$$\sum F_{ext} = m a \quad \Rightarrow a = \frac{\sum F_{ext}}{m} \quad \Rightarrow \begin{cases} V_f = V_0 + at \\ d = V_0t + a\frac{t^2}{2} \end{cases} \quad (2)$$

Lo más probable es que nuestros profesores nos repitieran hasta el cansancio que la sumatoria de fuerzas externas  $\sum F_{ext}$  era constante, y lo más seguro que nosotros en aquellos momentos no comprendiéramos la trascendencia de esa suposición. El caso más representativo era el del movimiento de un cuerpo bajo la acción de un campo gravitatorio, más aún: caída libre.

$$-mg = m a \quad \Rightarrow a = -g \quad \Rightarrow \begin{cases} V_f = V_0 - gt \\ d = V_0t - g\frac{t^2}{2} \end{cases} \quad (3)$$

Lo que está detrás de este “cuento” que nos inició en el estudio de la Física y a muchos de nosotros nos sedujo para seguir estudiando y aprendiendo a tratar de describir la naturaleza, es, efectivamente, la utilización de las Leyes de Newton para modelar el fenómeno del movimiento. De este modo

$$\sum F_{ext} = m a = m \frac{d^2x(t)}{dt^2} = m \frac{dV(t)}{dt} \quad \Rightarrow \begin{cases} V(t) = \frac{dx(t)}{dt} = V_0 + at \\ x(t) = V_0t + a\frac{t^2}{2} \end{cases} \quad (4)$$

Sí la sumatoria de fuerzas externas es una contante tendremos que

$$\frac{dV(t)}{dt} = a = \frac{\sum F_{ext}}{m} = \text{constante} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} V(t) = \int dt a = t a + C_2 \\ x(t) = \int dt (t a + C_2) = \frac{t^2}{2} a + C_2 t + C_1 \end{cases} \quad (5)$$

Claramente al identificar

$$C_2 = V(t=0) = V_0 \quad \text{y} \quad C_1 = x(t=0) = x_0 = 0 \quad (6)$$

reobtenemos nuestras “formulitas” ancestrales. Es importante señalar que

$$\frac{dV(t)}{dt} = a \quad \text{y} \quad \frac{dx(t)}{dt} = t a + C_2 \quad (7)$$

constituyen ecuaciones diferenciales donde las funciones incógnitas son la velocidad,  $V(t)$ , y la posición,  $x(t)$ , respectivamente. Ambas funciones se encontraban dentro de un signo de derivada y fueron “despejadas” mediante un proceso de integración.

La descripción del movimiento de partículas es más rica y compleja. El movimiento de una gran cantidad de partículas puede ser simulado a través de una ecuación diferencial del tipo

$$\sum \vec{F}_{ext} \left( \vec{r}(t), \vec{V}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}; t \right) = m \vec{a} = m \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} = m \frac{d\vec{V}(t)}{dt} \quad (8)$$

El carácter vectorial implica tres ecuaciones diferenciales, una por cada dimensión del movimiento, vale decir:

$$\sum \vec{F}_{ext} \left( \vec{r}(t), \frac{d\vec{r}(t)}{dt}; t \right) = m \vec{a} \Rightarrow \begin{cases} \sum F_{ext}^x \left( \vec{r}(t), \frac{d\vec{r}(t)}{dt}; t \right) = m a_x = m \frac{d^2x(t)}{dt^2} = m \frac{dV_x(t)}{dt} \\ \sum F_{ext}^y \left( \vec{r}(t), \frac{d\vec{r}(t)}{dt}; t \right) = m a_y = m \frac{d^2y(t)}{dt^2} = m \frac{dV_y(t)}{dt} \\ \sum F_{ext}^z \left( \vec{r}(t), \frac{d\vec{r}(t)}{dt}; t \right) = m a_z = m \frac{d^2z(t)}{dt^2} = m \frac{dV_z(t)}{dt} \end{cases}$$

Además del carácter vectorial de la ecuación, las componentes de la fuerza pueden dejar de ser constantes y depender de no sólo del tiempo, sino del vector posición, del vector velocidad o, de ambas simultáneamente. En este caso nuestras “formulitas” dejan de ser válidas en general y debemos integrar las ecuaciones diferenciales para obtener la trayectoria de la partícula  $\vec{r}(t)$ , conocidas: la masa,  $m$ , la expresión de la sumatoria de fuerzas externas  $\sum \vec{F}_{ext}$ , la posición y la velocidad inicial ( $\vec{r}(t_0) = \vec{r}_0$  y  $\vec{V}(t_0) = \vec{V}_0$ ). Este problema se conoce como el problema de condiciones iniciales y es, como hemos dicho antes, la razón de este curso. Antes, intentaré mostrar como ese conocimiento del movimiento bajo acción de una resultante de fuerzas constante, es decir el movimiento de una partícula con aceleración constante puede resultar muy útil para resolver, de forma aproximada, el caso más general que hemos mencionado:  $\vec{F}_{total} = \sum \vec{F}_{ext} \left( \vec{r}(t), \frac{d\vec{r}(t)}{dt}; t \right)$ . Veamos con detenimiento que significan estas afirmaciones.

Es claro el tiempo de evolución esta comprendido entre el tiempo inicial y el tiempo final,  $t_0 \leq t \leq t_{final}$ . Supongamos que dividimos ese intervalo de tiempo en  $N$  subintervalos

$$[t_0, t_{final}] = [t_0, t_1] \cup [t_1, t_2] \cup [t_2, t_3] \cup \dots \cup [t_i, t_{i+1}] \cup \dots \cup [t_{N-2}, t_{N-1}] \cup [t_{N-1}, t_N = t_{final}] \quad (9)$$

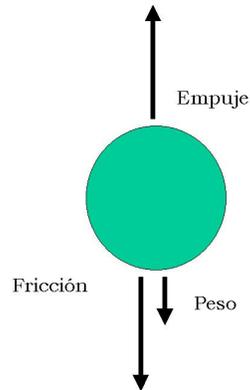


Figura 1: Diagrama de Cuerpo Libre de una esfera de corcho que emerge desde el fondo de un tanque de agua.

de tal modo que en cada uno de esos  $N$  subintervalos la aceleración es constante. En estas situación, muestras

“formulitas” son válidas. Esto es

$$\left. \begin{array}{l} [t_0, t_1] \\ \downarrow \\ V(t_0) = V_0 \\ d(t_0) = d_0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} V(t_1) = V_1 = V_0 + \frac{\sum F_{ext}(d_0, V_0; t_0)}{m} [t_1 - t_0] \\ d(t_1) = d_1 = V_0 [t_1 - t_0] + \frac{\sum F_{ext}(d_0, V_0; t_0)}{m} \frac{[t_1 - t_0]^2}{2} \end{array} \right. \quad (10)$$

$$\left. \begin{array}{l} [t_1, t_2] \\ \downarrow \\ V(t_1) = V_1 \\ d(t_1) = d_1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} V_2 = V_1 + \frac{\sum F_{ext}(d_1, V_1; t_1)}{m} [t_2 - t_1] \\ d_2 = d_1 + V_1 [t_2 - t_1] + \frac{\sum F_{ext}(d_1, V_1; t_1)}{m} \frac{[t_2 - t_1]^2}{2} \end{array} \right. \quad (11)$$

⋮

$$\left. \begin{array}{l} [t_i, t_{i+1}] \\ \downarrow \\ V(t_i) = V_i \\ d(t_i) = d_i \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} V_{i+1} = V_i + \frac{\sum F_{ext}(d_i, V_i; t_i)}{m} [t_{i+1} - t_i] \\ d_{i+1} = d_i + V_i [t_{i+1} - t_i] + \frac{\sum F_{ext}(d_i, V_i; t_i)}{m} \frac{[t_{i+1} - t_i]^2}{2} \end{array} \right. \quad (12)$$

⋮

$$\left. \begin{array}{l} [t_{N-1}, t_N] \\ \downarrow \\ V(t_{N-1}) = V_{N-1} \\ d(t_{N-1}) = d_{N-1} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} V_N = V_{N-1} + \frac{\sum F_{ext}(d_{N-1}, V_{N-1}; t_{N-1})}{m} [t_N - t_{N-1}] \\ d_N = d_{N-1} + V_{N-1} [t_N - t_{N-1}] + \frac{\sum F_{ext}(d_{N-1}, V_{N-1}; t_{N-1})}{m} \frac{[t_N - t_{N-1}]^2}{2} \end{array} \right. \quad (13)$$

Nótese que las posiciones y velocidades  **finales**  para cada intervalo, son las posiciones y velocidades  **iniciales**  para el intervalo siguiente y que el valor de la aceleración, que es variable, se toma como constante e igual al valor que tiene en el comienzo del intervalo.

Para analizar este caso consideremos el caso de una esfera de corcho, con Radio  $R$  y masa  $M$  que se suelta desde el fondo de un tanque de agua de profundidad  $h$ . Queremos conocer con que velocidad llega la esfera a la superficie.

El diagrama de cuerpo libre se puede observar en la figura 1 y la ecuación de Newton para este caso se expresa como

$$\sum \vec{F}_{ext} \left( \vec{r}(t), \frac{d\vec{r}(t)}{dt}; t \right) = ma \Rightarrow -mg - K\eta V(t) + m_{fg} = m \frac{dV(t)}{dt} \quad (14)$$

En la cual hemos identificado

$$\begin{array}{ll} \text{peso} & \Rightarrow -mg \\ \text{Fricción} & \Rightarrow -K\eta V(t) \\ \text{Empuje} & \Rightarrow m_{fg} \end{array} \quad (15)$$

Como aprendimos también hace algún tiempo el empuje o fuerza de Arquímedes es igual al peso del fluido desalojado por el cuerpo. Por ello aparece  $m_f$  que representa la masa del fluido. Para el caso en el cual el fluido no es viscoso, es decir, no hay fricción con el fluido, la ecuación se reduce a

$$\sum \vec{F}_{ext} \left( \vec{r}(t), \frac{d\vec{r}(t)}{dt}; t \right) = ma \Rightarrow -mg + m_f g = ma \quad (16)$$

en la cual claramente la aceleración es constante e igual a

$$a = g \left( \frac{m_f}{m} - 1 \right) \equiv g \left( \frac{\rho_f}{\rho_c} - 1 \right) = cte \quad (17)$$

donde hemos indentificado  $\rho_f$  la densidad del fluido y  $\rho_c$  la densidad del cuerpo.

Para encontrar la velocidad con la cual llega a la superficie, encontramos primero el tiempo que tarda en subir y luego evaluamos la velocidad en ese tiempo. Esto es

$$h = g \left( \frac{\rho_f}{\rho_c} - 1 \right) \frac{t^2}{2} \Rightarrow t = 2\sqrt{\frac{h\rho_c}{2g(\rho_f - \rho_c)}} \quad (18)$$

$$(19)$$

$$V_{final} = g \left( \frac{\rho_f}{\rho_c} - 1 \right) 2\sqrt{\frac{h\rho_c}{2g(\rho_f - \rho_c)}} \quad (20)$$

En el caso general, descrito por la ecuación (14), procedemos del mismo modo: encontramos el tiempo en el cual llega la superficie y luego evaluamos la expresión para la velocidad para ese tiempo. Fíjense que la estrategia para resolver el problema físico es la misma, sólo que tendremos que disponer de un arsenal adicional de herramientas y técnicas para “despejar” la función velocidad. Aprenderemos a resolver ecuaciones diferenciales de la misma manera que antes resolvíamos ecuaciones algebraicas. En este caso la solución exacta para la expresión de la velocidad es

$$-mg - K\eta V(t) + m_f g = m \frac{dV(t)}{dt} \Rightarrow V(t) = \frac{g(m - m_f)}{K\eta} \left( e^{-\frac{tK\eta}{m}} - 1 \right) \quad (21)$$

Con lo cual

$$\frac{dy(t)}{dt} = V(t) = \frac{g(m - m_f)}{K\eta} \left( e^{-\frac{tK\eta}{m}} - 1 \right) \quad (22)$$

y la función posición surge de integrar la ecuación diferencial

$$Y(t) = -\frac{g(m - m_f)}{K^2\eta^2} \left( me^{-\frac{tK\eta}{m}} + tK\eta - m \right) \quad (23)$$

desafortunadamente la no se puede despejar el tiempo de manera exacta por cuanto la ecuación

$$\frac{gm(m - m_f)}{K^2\eta^2} \left( e^{-\frac{K\eta t}{m}} - 1 + \frac{K\eta t}{m} \right) = h \quad (24)$$

es una ecuación trascendente y debe ser resuelta numéricamente. Haciendo algunas sustituciones simplificadoras

$$m_f = \frac{4}{3} \pi \xi \rho R^3; \quad m = \frac{4}{3} \pi \phi \rho R^3 \quad \rho_f = \xi \rho \quad \rho_c = \phi \rho \quad y \quad K = 6 \pi R \quad (25)$$

Donde  $\xi$  y  $\phi$  representan las densidades relativas del fluido y del cuerpo respecto al agua (de densidad  $\rho$ ), respectivamente. Seguidamente sustituimos los valores numéricos

$$g = 9,8; \quad R = 0,02; \quad \rho = 10^3; \quad \xi = 1; \quad \phi = 0,8; \quad V_0 = 0; \quad \eta = 1,002 \times 10^{-3} \quad (26)$$

la ecuación (24) nos queda para  $h = 10, mts$

$$10 = 12339,72755 (1 - \exp(-0,01409062500t)) - 173,8744736t \quad (27)$$

y se obtiene  $t_{final} = 2,876443096$  sg. con el cual se evalúa la ecuación para la velocidad

$$V(t) = 173,8744730 (1 - \exp(-0,01409062500t)) \Rightarrow V_{final} = 6,9063798 \quad m/s \quad (28)$$

En la siguiente tabla se implementan las ecuaciones (10) a (13) habida cuenta de las simplificaciones (25) y los valores numéricos (26) para  $h = 1/10 \sim [t_{i+1} - t_i]$

$t_i$ (s)	$V_i$ (m/s)	$d_i$ (m)	$V(t)$ (m/s)	$d(t)$ (m)
0.100	0.2449999997	0.01224999998	0.2448275	0.01225
0.200	0.4896547791	0.04898273892	0.4893102	0.04895
0.300	0.7339648246	0.11016371910	0.7334487	0.11009
0.400	0.9779306220	0.19575849150	0.9772434	0.19563
0.500	1.221552656	0.30573265540	1.2206949	0.30553
0.600	1.464831412	0.44005185880	1.4638035	0.43976
0.700	1.707767373	0.59868179800	1.7065698	0.59828
0.800	1.950361022	0.7815882177	1.9489943	0.78106
0.900	2.192612841	0.9887369109	2.1910775	0.98807
1.000	2.434523312	1.220093719	2.4328198	1.21926
1.100	2.676092916	1.475624530	2.6742217	1.47462
1.200	2.917322134	1.755295283	2.9152836	1.75410
1.300	3.158211444	2.059071962	3.1560062	2.05767
1.400	3.398761326	2.386920600	3.3963898	2.38529

$V_i$  y  $d_i$  representan la velocidad y la posición aproximada, tal y como se expresan en las ecuaciones (10) a (13). Mientras que  $V(t)$  y  $d(t)$  ilustran los valores de la velocidad y la posición exactas, calculadas a partir de las ecuaciones (22) y (23). Es clara que la aproximación es buena hasta la primera cifra decimal.

## 0.2. Empezando por el principio

### 0.2.1. Ejemplos de Algunas ecuaciones diferenciales

Thomas Robert Malthus<sup>1</sup> fue uno de los primeros en darse cuenta que la población crece como una razón geométrica mientras que los medios de subsistencias crecen de manera aritmética. Esta afirmación plasmada en su *Ensayo sobre el Principio de Poblaciones*, el cual inspiró a Darwin en la formulación de principio de selección natural. Malthus, muy religioso y creyente pensaba que esa diferencia en el crecimiento de la

<sup>1</sup>En honor al economista político inglés Thomas Robert Malthus (1766-1834).

población y las necesidades que ellas generaban, eran de procedencia divina y que forzaría a la humanidad a ser más laboriosa e ingeniosa para lograr los medios de subsistencia. Darwin, no tan religioso, lo formuló como una situación natural presente en todas las especies.

$$\text{Ley de Malthus/Decaimiento Radioactivo} \quad \frac{d}{dx}y(x) = k y(x) \quad \leftarrow y(t) = y_0 e^{kt} \quad \text{con } y(0) = y_0 \quad (29)$$

Para  $k > 0$  la población crece y para  $k < 0$  tenemos una situación de decaimiento: la población decrece con el tiempo. Este concepto se utiliza los procesos de decaimiento radiactivo.

La ecuación logística o Ley de Verhulst<sup>2</sup> se utiliza para describir el crecimiento de la población de una manera más precisa que la Ley de Malthus. Esta ecuación toma en cuenta el decrecimiento de la población con el término  $-y^2$

$$y' = (k - ay) y = ky - ay^2 \quad \leftarrow y(t) = \frac{k y_0}{a y_0 + (k - a y_0) e^{-kt}}$$

La Ley de Enfriamiento de Newton que expresa que la tasa de cambio de la temperatura respecto al tiempo es proporcional a la diferencia de temperatura entre el cuerpo y el medio ambiente.

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_m) \quad \leftarrow T = (T_0 - T_m) e^{kt} + T_m \quad \text{con } T(0) = T_0$$

La Ley de Torricelli la cual establece que (para un tanque cilíndrico) la tasa de cambio respecto al tiempo del la profundidad del agua en un tanque es proporcional a su raíz cuadrada

$$\frac{dy}{dt} = \frac{k}{A} \sqrt{y} \quad \leftarrow y(t) = \left( \frac{1}{2} t + y(0)^2 \right)$$

### 0.2.2. De Ecuaciones y Ecuaciones Diferenciales

1. Al igual que desde nuestra más tierna infancia consideramos una ecuación algebraica como aquella que se cumplía para ciertos valores de  $x = x_0$ , llamaremos ahora una ecuación diferencial aquella que se cumple para ciertas **funciones** i.e.

$$x^2 - 4x + 4 = 0 \quad \leftarrow x_0 = 2 \quad \leftrightarrow \quad \frac{df(x)}{dx} - f(x) = 0 \quad \leftarrow f(x) = e^x$$

Es decir si  $f(x)$  es una función continua en un intervalo  $a \leq x \leq b$ , llamaremos una *ecuación diferencial ordinaria* a una expresión que involucre  $x$ ,  $f(x)$  y derivadas de  $f(x)$ . Utilizaremos para tal efectos varias notaciones, equivalentes que se justifican por la larga tradición en esto

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} + g(x) \frac{df(x)}{dx} - a f^2(x) = k(x) \quad \leftrightarrow \quad f''(x) + g(x) f'(x) - a f^2(x) = k(x) \quad \leftrightarrow \quad f_{xx}(x) + g(x) f_x(x) - a f^2(x) = k(x)$$

- 2.
- 3.

Se llaman ordinarias porque involucran funciones de una sola variable y derivadas respecto a ella. Otras ecuaciones diferenciales del tipo

$$\frac{\partial^2 \phi(x, y)}{\partial x \partial y} + g(x) \frac{\partial \phi(x, y)}{\partial x} - a \phi^2(x, y) = p(y) \quad \leftrightarrow \quad \phi_{xy}(x) + g(x) \phi_{xy}(x) - a \phi^2(x, y) = p(y)$$

Las llamaremos ecuaciones diferenciales en derivadas parciales o, simplemente ecuaciones diferenciales parciales, porque contienen funciones (y derivadas) de varias variables.

<sup>2</sup>Pierre François Verhulst 1804 - 1849 Matemático Belga con sus más importantes contribuciones en estadística demográfica

### 0.2.3. Fauna y Nomenclatura de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

#### Orden y linealidad

Una ecuación diferencial  $\mathcal{F}[x, y(x), y'(x), y''(x), y'''(x), \dots, y^{(n)}(x)] = 0$  será lineal si sólo parecen funciones lineales de  $y(x)$  y sus derivadas.

$$\frac{df(x)}{dx} \frac{d^2f(x)}{dx^2} + f(x) \frac{df(x)}{dx} - af^2(x) = k(x) \quad \text{no lineal o alineal}$$

$$f''(x) + g(x)f'(x) - af(x) = k(x) \quad \text{lineal}$$

El orden de la derivada mayor define el orden de la ecuación diferencial del tipo

$$\mathcal{F}[x, y(x), y'(x), y''(x), y'''(x), \dots, y^{(n)}(x)] = 0$$

$$\begin{array}{c} \Downarrow \\ a_n(x) \frac{d^n f(x)}{dx^n} \dots + a_2(x) \frac{d^2 f(x)}{dx^2} + a_1(x) \frac{df(x)}{dx} + a_0(x) f(x) = g(x) \leftrightarrow \sum_{k=0}^n a_k(x) \frac{d^k f(x)}{dx^k} = g(x) \end{array}$$

será de orden  $n$

Una ecuación diferencial  $F(x, y(x), y'(x), y''(x), y'''(x), \dots, y^{(n)}(x), ) = 0$  será homogénea (inhomogénea) si NO contiene términos independientes en  $f(x)$

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} + g(x) \frac{df(x)}{dx} - af(x) = k(x) \quad \text{lineal inhomogénea}$$

$$f''(x) + g(x)f'(x) - af(x) = 0 \quad \text{lineal homogénea}$$

#### Soluciones Explícitas e Implícitas

Hay de todo en la viña de las soluciones. Las soluciones heredan su nombre del tipo de función que las representa, así tendremos soluciones explícitas cuando las funciones sean soluciones y sean explícitas. Esto es

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} = y(t) + 4 e^t \quad \leftarrow y(t) = e^t C_2 + e^{-t} C_1 + 2 t e^t$$

y también

$$y' = (x + y)^2 \quad \leftarrow y(t) = \tan(t - C_1) - t \quad \text{con } t - C_1 \neq \frac{\pi}{2}$$

Las soluciones serán implícitas si son representadas por funciones de esa estirpe

$$y y' + x = 0 \quad \leftarrow f(x, y) = x^2 + y(x)^2 - 25 = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = \sqrt{25 - x^2} \\ y = -\sqrt{25 - x^2} \end{cases} \quad \text{con } -5 < x < 5$$

Se tiene que seleccionar una rama de la función raíz. Igualmente será solución implícita

$$(y^2(x) - x) y'(x) - y(x) + x^2 = 0 \quad \leftarrow f(x, y) = x^3 + y^3(x) - 3xy(x) = 0$$

y esta segunda no es tan fácil de descubrir como solución. Para comprobarla derivamos la solución

$$\frac{d(f(x, y))}{dx} = \frac{d(x^3 + y^3(x) - 3xy(x))}{dx} = 0 \Rightarrow 3x^2 + 3y^2(x) \frac{dy(x)}{dx} - 3y(x) - 3x \frac{dy(x)}{dx} = 0$$

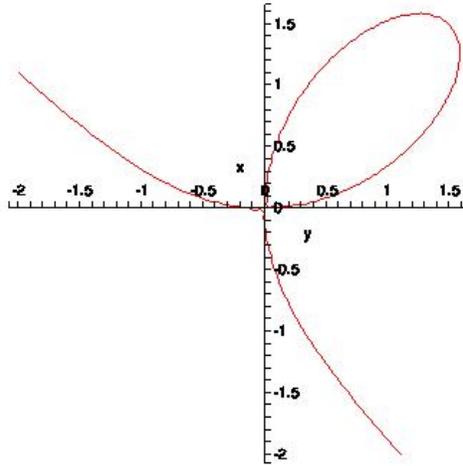


Figura 2: Gráfica de la función implícita  $f(x, y) = x^3 + y^3(x) - 3xy(x) = 0$

simplificando y agrupando tendremos la solución. Otra vez, la función la función no es univaluada. Al graficarla (ver Figura 2) nos damos cuenta que tenemos tres varias soluciones de funciones univaluadas unas continuas y otras no. La función es univaluada fuera del lóbulo. Esto es para  $x \leq 0 \wedge x > 2^{\frac{2}{3}}$ . Con lo cual tendremos que seleccionar, dentro del lóbulo, cuál de las partes univaluada corresponde la solución.

### Soluciones Generales y Particulares

Veamos las siguientes ecuaciones y soluciones

$$\begin{aligned} y' = e^x &\leftarrow y(x) = e^x + C_1 \\ y'' = e^x &\leftarrow y(x) = e^x + C_2x + C_1 \\ y''' = e^x &\leftarrow y(x) = e^x + C_3x^2 + C_2x + C_1 \end{aligned}$$

Cada una de las soluciones representan familias de soluciones, una para cada constante. Este tipo de soluciones las denominaremos soluciones generales. Es decir, llamaremos solución general de una ecuación diferencial aquella que queda indeterminada por un conjunto de constantes  $\{C_1 + C_2 + C_3 + \dots + C_n\}$ . En contraste, cuando *particularizamos* los valores de las constantes  $C_3, C_2, C_1$  tendremos una solución *particular* par cada una de las ecuaciones. Adicionalmente, cuando nos referimos las ecuaciones no lineales el concepto de solución particular varía. Soluciones particulares en este tipo de ecuaciones serán aquellas que se cumplen para rangos (o puntos) muy particulares. Vale decir

$$\left. \begin{aligned} (y')^2 + y^2 = 0 \\ (y'')^2 + y^2 = 0 \end{aligned} \right\} \leftarrow y = 0 \text{ única solución}$$

También en este caso llamaremos a este tipo de soluciones, particulares. De igual modo puede darse casos para los cuales no exista solución en un determinado intervalo.

$$\left. \begin{aligned} |y'|^2 + 1 = 0 \\ |y''|^2 + 1 = 0 \end{aligned} \right\} \text{ no tienen solución}$$

Ecuaciones de la forma

$$xy' = 1 \quad \text{para } -1 < x < 0 \wedge 0 < x < 1 \quad \Rightarrow y(x) = \ln|x| + C \Rightarrow \begin{cases} y(x) = \ln(x) + C_1 & \text{para } x > 0 \\ y(x) = \ln(-x) + C_1 & \text{para } x < 0 \end{cases}$$

Tienen soluciones particulares para intervalos de las variables  $x$ . Del mismo modo

$$(y' - y)(y' - 2y) = 0 \quad \Rightarrow (y(x) - C_1 e^x)(y(x) - C_2 e^{2x}) = 0$$

tendrá dos soluciones particulares.

### Familia de soluciones $n$ -paramétricas

Si  $y(x) = f(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$  es solución de una ecuación diferencial

$$\mathcal{F}[x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)] = 0 \quad \Rightarrow y(x) = f(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$$

para  $n$  constantes  $\{C_1, C_2, C_3, \dots, C_n\}$  arbitrarias. Entonces diremos que

$$y(x) = f(x, C_1, C_2, \dots, C_n) \quad \text{es una familia } n \text{ paramétrica de soluciones}$$

Existe una diferencia entre una solución general de una ecuación y una solución  $n$ -paramétrica. La solución general tiene que contener **todas** las soluciones una ecuación diferencial determinada. Una solución  $n$ -paramétrica no necesariamente. Veamos

$$y = xy' + (y')^2 \quad \Rightarrow \begin{cases} y(x) = Cx + C^2 \\ y(x) = \frac{-x^2}{4} \end{cases}$$

Uno llega a estar tentado de llamar solución general a la solución 1-paramétrica  $y(x) = Cx + C^2$ . Sin embargo, deja por fuera otra solución que no tiene que ver con un valor particular de las constantes  $C$ .

Otro ejemplo, lo constituye

$$y' = -2y^{\frac{3}{2}} \quad \Rightarrow y(x) = \frac{C^2}{(Cx + 1)^2} \quad \forall x. \quad \text{Pero también } y(x) = \frac{1}{(x + \tilde{C})^2} \text{ es solución, pero } y(x) \neq 0$$

Una solución  $n$ -paramétrica se denominará solución general si contiene **todas** las soluciones de una determinada ecuación diferencial. En el caso de ecuaciones diferenciales lineales, las soluciones  $n$ -paramétricas constituyen las soluciones generales a las ecuaciones diferenciales.

### Solución particular, valores iniciales vs valores de contorno

Dependiendo de la situación física que estemos modelando quizá podamos determinar las constantes arbitrarias de una familia  $n$ -paramétrica con información para un único punto  $x = x_0$ . Esto es

$$\begin{array}{c} \mathcal{F}[x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)] = 0 \quad \Rightarrow y(x) = f(x, C_1, C_2, \dots, C_n) \\ \downarrow \\ \overbrace{y(x_0) \Rightarrow C_1 = c_1 \quad y'(x_0) \Rightarrow C_2 = c_2 \cdots \quad y^{(n-1)}(x_0) \Rightarrow C_n = c_n} \\ \downarrow \\ y(x) = f(x, c_1, c_2, \dots, c_n) \end{array}$$

En este caso diremos que tendremos problema de valores iniciales, ya que determinamos las constantes arbitrarias a partir de la información de la función y sus derivadas en un solo punto. Si consideramos

$$y'' + \omega^2 y = 0 \quad \text{con} \quad \left\{ \begin{array}{l} y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow y(x) = \frac{1}{\omega} \text{sen } \omega x$$

Si por el contrario, para determinar el valor de las constantes arbitrarias disponemos de información de la función y sus derivadas en dos o más puntos, diremos que tendremos un problema de contorno. Esto es

$$y'' + \omega^2 y = 0 \quad \text{con} \quad y(0) = y(1) = 0 \Rightarrow y(x) = \text{sen } n\pi\omega x$$

Nótese que también pudimos haber tenido información del tipo  $y(0) = y_0, y'(1) = y'_1; y'(0) = y'_0, y'(1) = y'_1$  o  $y'(0) = y_0, y(1) = y'_1$  y para cada uno de estos caso tendremos una solución distinta.

Demostraremos que los problemas de valores iniciales para ecuaciones diferenciales lineales siempre tienen solución particular (siempre se pueden determinar las constantes a partir de la información de la función y las derivadas en UN punto). No así los problemas de valores de contorno.

#### 0.2.4. Métodos elementales de integración

Para comenzar expondremos unos métodos de integración, los cuales si bien son elementales y casi triviales para este caso, serán utilizados en lo que sigue, con bastante frecuencia.

##### Integración directa

La integración directa tiene varias variantes las cuales nos hemos tropezado en varias situaciones de modelaje y que nos han permitido integrar (intuitivamente) ecuaciones diferenciales. La más directa de todas ha sido

$$\frac{dy(x)}{dx} = f(x) \Rightarrow \int dy(x) = \int dx f(x) \Rightarrow y(x) = \int dx f(x) + C$$

por lo cual, al integrar (analítica o numéricamente) tendremos la expresión para la función  $y(x)$ .

La integración directa fue la estrategia que utilizamos arriba para encontrar las formulitas que nos aprendimos en bachillerato. Esto es

$$\frac{\sum F_{ext}}{m} = \frac{dV(t)}{dt} = a = \text{constante} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} V(t) = \int dt a = t a + C_2 \\ x(t) = \int dt (t a + C_2) = \frac{t^2}{2} a + C_2 t + C_1 \end{array} \right.$$

en la cual al recordar las condiciones iniciales

$$V(0) = V_0 \equiv C_2 \Rightarrow V(t) = V_0 + at$$

$$x(0) = x_0 \equiv C_1 \Rightarrow x(t) = x_0 + V_0 t + a \frac{t^2}{2}$$

La primera variante en la estrategia de integración directa es

$$\frac{dy(x)}{dx} = f(y) \Rightarrow \int \frac{dy}{f(y)} = \int dx \Rightarrow \mathcal{F}[y(x)] = x + C$$

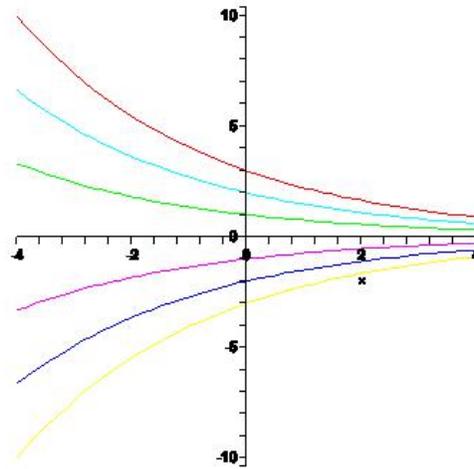


Figura 3: Familia de soluciones 1-paramétrica para  $a = \frac{1}{3}$ . En particular han sido tomados los valores  $C = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$

donde  $\mathcal{F}[y(x)]$  será un funcional, desde el cual quizá se pueda despejar  $y(x)$ . Esta estrategia se ilustra más o menos así

$$\frac{dy(x)}{dx} = -ay(x) \text{ con } y(0) = 2 \text{ entonces } \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = -a \int dx \Rightarrow y_g(x) = Ce^{-ax} \Rightarrow y_p(x) = 2e^{-ax}$$

la Figura 3 muestra varias soluciones particulares pertenecientes a esta familia, para  $a = \frac{1}{3}$ .

Otro ejemplo de integración directa surge de

$$yy' = (y+1)^2 \Rightarrow \frac{yy'}{(y+1)^2} = 1 \Rightarrow \int \frac{ydy}{(y+1)^2} = \int dx \text{ para } y \neq -1 \Rightarrow \frac{1}{y+1} + \ln|y+1| = x + C$$

que no es otra cosa que una familia de soluciones implícitas, uniparamétrica. Para una condición inicial  $y(2) = 0$  entonces

$$y(2) = 0 \Rightarrow C = -1 \Rightarrow \frac{1}{y+1} + \ln|y+1| = x - 1 \text{ para } y \neq -1$$

una vez más esta familia de soluciones 1-paramétrica no constituye la solución general de esta ecuación diferencial ya que no contiene todas las soluciones. En este caso  $y(x) = -1$  también es solución y no está contenida.

### Mi primera ecuación separable

Los casos anteriores de integración directa son generalizados por una ecuación que llamaremos separable. Esto es la función (funcional) de dos variables del lado derecho se supone que es el resultado del producto

de dos funciones de una variable, con lo cual las variables dependientes e independientes se agrupan a lados distintos de la igualdad.

$$\frac{dy(x)}{dx} = \mathcal{H}[y(x), x] \iff \frac{dy(x)}{dx} = Y(y(x))X(x) \implies \frac{dy}{Y(y)} = X(x) dx \iff \int \frac{dy}{Y(y)} = \int X(x) dx$$

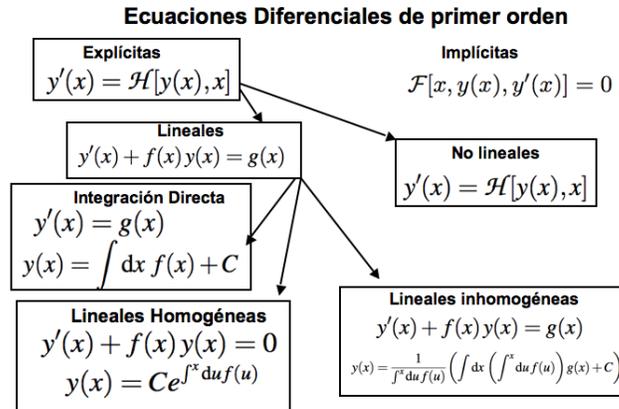


Figura 4: Mapa de las Ecuaciones diferenciales explícitas

Este es el caso con

$$\frac{dy(x)}{dx} = x + xy \implies \int \frac{dy}{1+y} = \int x dx \implies \ln(1+y) = \frac{x^2}{2} + C \implies y(x) = Ae^{\frac{x^2}{2}}$$

con  $C$  y  $A$  constantes arbitrarias a ser determinadas por las condiciones iniciales.

### Mi primera ecuación diferencial exacta y el factor integrador

La mayor de las veces tendremos que idearnos un factor,  $\mu(x)$ , con el cual multipliquemos la ecuación diferencial y la convirtamos en una ecuación diferencial exacta. Lo mostraremos con un ejemplo. Consideremos la ecuación diferencial

$$\frac{dy(x)}{dx} = e^{-x} - ay(x) \text{ con } y(0) = 2 \text{ entonces } \frac{dy(x)}{dx} + ay(x) = e^{-x} \implies \mu(x) \left( \frac{dy(x)}{dx} + ay(x) \right) \stackrel{?}{=} \frac{d[\mu(x)y(x)]}{dx}$$

y, efectivamente, para este caso

$$\mu(x) = e^{ax} \implies e^{ax} \frac{dy(x)}{dx} + ay(x)e^{ax} = e^{-x}e^{ax} \implies \frac{d(e^{ax}y(x))}{dx} = e^{ax}e^{-x} \implies \int d(e^{ax}y(x)) = \int dx e^{(a-1)x}$$

de forma y manera que

$$e^{ax}y(x) = \frac{1}{a-1}e^{(a-1)x} + C \implies y(0) = 2 \implies C = 2 - \frac{1}{a-1} = \frac{2a-3}{a-1} \implies y_p(x) = \frac{1}{a-1} (e^{-x} + (2a-3)e^{-ax})$$

Un par comentarios son pertinentes:

- Llamaremos al término  $\mu(x)$  factor integrador de la ecuación diferencial. Está relacionado con propiedades de simetría de la ecuación, pero en este nivel lo buscaremos tanteando.
- La solución general de esa ecuación diferencial toma la forma de  $y_g(x) = (e^{-x} + Ce^{-ax})$  donde el segundo de los términos  $y_{g,h}(x) = Ce^{-ax}$  corresponde a la solución general para la ecuación homogénea asociada a esa ecuación diferencial:  $\frac{dy(x)}{dx} + ay(x) = 0$ . El otro término  $y_{inh}(x) = e^{-x}$  corresponde a la solución particular de la inhomogénea:  $\frac{dy(x)}{dx} + ay(x) = e^{-x}$ . Esta será una propiedad general para ecuaciones diferenciales lineales de cualquier orden. Resolveremos la ecuación homogénea y luego encontraremos la solución de la inhomogénea. La solución general será una suma de ambas soluciones

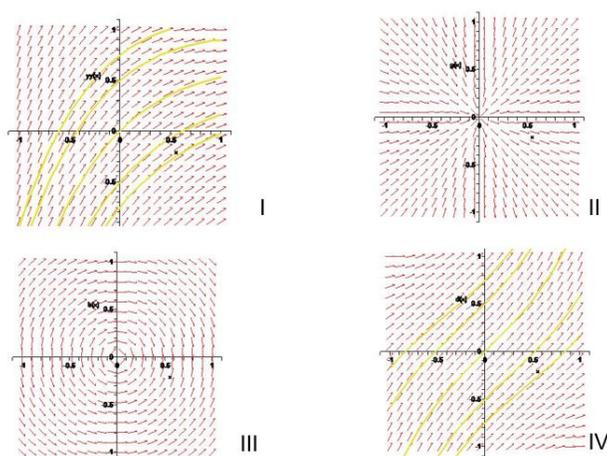


Figura 5: Isoclinas para cuatro ecuaciones diferenciales. Cuadrante I muestra la ecuación  $\frac{dy(x)}{dx} = e^{-x} - \frac{1}{3}y(x)$  y se muestran las soluciones particulares para las condiciones iniciales  $y(0) = 0,75$ ,  $y(0) = 0,50$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y(0) = -0,50$ ,  $y(0) = -0,75$ . El Cuadrante II corresponde a las tangentes generadas a partir de la ecuación  $\frac{dy(x)}{dx} = \frac{y(x)}{x}$ . Nótese son curvas integrales radiales que para el punto  $x = 0$  no está definida la curva integral. En el Cuadrante III represente las tangentes de la ecuación  $\frac{dy(x)}{dx} = -\frac{x}{y(x)}$ . Finalmente el Cuadrante IV contiene las tangentes a la ecuación  $\frac{dy(x)}{dx} = 1 + x y(x)$  en ella se han indicado las curvas integrales para las soluciones particulares correspondientes a las condiciones iniciales  $y(0) = 0,75$ ,  $y(0) = 0,50$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y(0) = -0,50$ ,  $y(0) = -0,75$ .

En general

$$y' + ay = g(x) \quad \Rightarrow \quad \mu(x) = e^{ax} \quad \Rightarrow \quad y_g(x) = \underbrace{e^{-ax} \int_{x_0}^x dt g(t) e^{at}}_{\text{solución de la inhomogénea}} + \underbrace{C e^{-ax}}_{\text{solución de la homogénea}}$$

la demostración la dejamos como ejercicio para el lector.

Para finalizar la figura 4 muestra el mapa de ruta para la resolución de las ecuaciones diferenciales ordinarias, lineales.

### Método de las Isoclinas

Este método se basa en la idea de campo y curvas integrales que vimos cuando estudiamos campos vectoriales. La idea es bien simple. En general una ecuación diferencial de primer orden (explícita respecto a la derivada) se podrá representar como  $y' = f(y, x)$ . Ahora bien, el lado derecho de esa igualdad lo representa una función de dos variables, la cual tendrá un valor en cada punto  $(x, y)$ . Ese valor (por la igualdad que representa la ecuación diferencial) será el valor de la derivada en ese punto y el valor de la derivada en un punto, no es otra cosa que la pendiente de la recta tangente a ese punto. Con eso, al construir una gráfica recordamos las curvas integrales de los campos vectoriales y reconstruimos las curvas solución a partir de sus tangentes. La Figura 5 contiene cuatro ejemplos de estas construcciones. Así tendremos la representación gráfica para las tangentes de las siguientes ecuaciones diferenciales.

$$\frac{dy(x)}{dx} = e^{-x} - \frac{1}{3}y(x) \text{ Cuadrante I} \quad \frac{dy(x)}{dx} = \frac{y(x)}{x} \text{ Cuadrante II}$$

y también

$$\frac{dy(x)}{dx} = -\frac{x}{y(x)} \text{ Cuadrante III} \quad \frac{dy(x)}{dx} = 1 + x y(x) \text{ Cuadrante IV}$$

Es importante señalar que este método permite obtener las posibles soluciones de una ecuación diferencial no importa lo complicada que sea.

### Puntos Ordinarios y Singulares

Llamaremos un *punto ordinario de orden  $n$*  a un punto  $x_o$  en el cual la función y sus  $n$ -derivadas están definidas, esto es  $y(x_o), y'(x_o), y''(x_o), \dots, y^{(n)}(x_o)$ . En contraste a un punto ordinario llamaremos *punto extraordinario o singular* a un punto  $x_s$  tal que la función o sus derivadas no se encuentran definidas en éste. Para ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, los puntos ordinarios y singulares tienen que ver con la función y su primera derivada. Nótese que en el cuadrante I y IV de la Figura 5 todos los puntos son ordinarios de orden infinito. En el cuadrante II la función no está definida para  $x_s = 0$  con lo cual es un punto singular, y en el cuadrante III, la función está definida para  $x_s = 0$  pero no así su derivada.

## 0.3. Ecuación Diferenciales de Primer Orden

Ahora de manera un poco más sistemática diremos que una ecuación diferencial de primer orden será un funcional tal que si es explícita respecto a la derivada se podrá despejarla

$$\mathcal{F}[x, y(x), y'(x)] = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{dy(x)}{dx} = \mathcal{H}[y(x), x] \Leftrightarrow y' \equiv \frac{dy(x)}{dx} = H(x, y) \\ Q(x, y)dy + P(x, y)dx = 0 \end{cases}$$

### 0.3.1. Ecuaciones Diferenciales separables

La primera estrategia será la que consideramos arriba en el sentido que la ecuación diferencial sea separable. Es decir que las variables dependientes e independientes puedan ser agrupadas y, a partir de allí intentar una integración de cada grupo por separado. Esto lo esbozamos arriba, más o menos así

$$\Leftrightarrow \frac{dy(x)}{dx} = Y(y(x))X(x) \Rightarrow \frac{dy}{Y(y)} = X(x) dx \Leftrightarrow \int \frac{dy}{Y(y)} = \int X(x) dx$$

o equivalentemente

$$P(x, y)dy + Q(x, y)dx = 0 \Leftrightarrow P_1(x)P_2(y)dy + Q_1(x)Q_2(y)dx = 0 \Leftrightarrow \frac{P_2(y)}{Q_2(y)}dy + \frac{Q_1(x)}{P_1(x)}dx = 0$$

Otro ejemplo será

$$y' = \frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{5-y}} \Leftrightarrow \sqrt{1-x^2} dx + \sqrt{5-y} dy \Rightarrow \int dx \sqrt{1-x^2} + \int dy \sqrt{5-y}$$

con lo cual

$$y' = \frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{5-y}} \Leftrightarrow \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\arcsen x + \frac{2}{3}(5+y)^{3/2} = C \quad \text{para } -1 \leq x \leq 1 \quad \wedge \quad y > -5$$

Nótese que el el  $\arcsen x$  es multivaluada por lo tanto debemos restringir el intervalo a su valor principal  $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

**Ejercicio** Pruebe que

$$y' = x \frac{\sqrt{1-y}}{\sqrt{1-x^2}} \Leftrightarrow \sqrt{1-x^2} - 2\sqrt{1-y} = C \quad \text{para } -1 < x < 1 \quad \wedge \quad y < 1$$

### Variaciones sobre separabilidad y coeficientes inhomogéneos

Abra otras situaciones en las cuales encontremos ecuaciones diferenciales que podremos convertir en separables:

$$\frac{dy(x)}{dx} = f(\underbrace{ax + by + c}_z) \Rightarrow dz = a dx + b dy \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{b} \frac{dz}{dx} - \frac{a}{b} \Rightarrow \frac{1}{b} \frac{dz}{dx} - \frac{a}{b} = f(z) \Rightarrow \frac{dz}{dx} = bf(z) + a$$

Veamos

$$y' = \sen^2(x+y) \Rightarrow dz = dx + dy \Rightarrow y' = -1 + \frac{dz}{dx} \Rightarrow z' = -1 + \sen^2(z) \Rightarrow \int \frac{dz}{1 - \sen^2(z)} = - \int dx$$

es decir

$$- \int \frac{dz}{\cos^2(z)} = x + C \Rightarrow -\tan z = x + C \Rightarrow -\tan(x+y) = x + C \Rightarrow y = x + \arctan(x+C)$$

Se puede tratar de generalizar el caso anterior puede y considerar ecuaciones diferenciales del tipo

$$\frac{dy(x)}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$$

Entonces, se distinguen dos casos dependiendo si las rectas  $a_1x + b_1y + c_1 = 0$  y  $a_2x + b_2y + c_2 = 0$  son paralelas o no.

Si son paralelas

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = \lambda \Rightarrow \frac{dy(x)}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{\lambda(a_1x + b_1y) + c_2}\right) \equiv \tilde{f}(a_1x + b_1y)$$

la cual analizamos al comienzo de esta sección y lo ilustraremos con el siguiente ejemplo

$$y' = \frac{2x + 3y - 1}{4x + 6y + 2} \Rightarrow \lambda = 2 \Rightarrow z = 2x + 3y - 1 \Rightarrow dz = 2dx + 3dy \Rightarrow y' = \frac{1}{3}(z' - 2)$$

con lo cual

$$\frac{1}{3}(z' - 2) = \frac{z}{2z + 2} \Rightarrow z' = \frac{7z + 4}{2z + 2} \Rightarrow \int dz \frac{2z + 2}{7z + 4} = \int dx \Rightarrow \frac{2}{7}z + \frac{6}{49} \ln(7z + 4) = x + C$$

Si no son paralelas, se intuye el siguiente cambio de variables

$$u = a_2x + b_2y + c_2 \Rightarrow du = a_2dx + b_2dy \Rightarrow dy = \frac{1}{b_2 - b_1} \left( \frac{du}{a_2} - \frac{dv}{a_1} \right)$$

$$v = a_1x + b_1y + c_1 \Rightarrow dv = a_1dx + b_1dy \Rightarrow dx = \frac{1}{a_2 - a_1} \left( \frac{du}{b_2} - \frac{dv}{b_1} \right)$$

con lo cual

$$\frac{dy(x)}{dx} = f \left( \frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2} \right) \Rightarrow \left( \frac{1}{a_2(b_2 - b_1)} + \frac{f\left(\frac{v}{u}\right)}{b_2(a_2 - a_1)} \right) du - \left( \frac{1}{a_1(b_2 - b_1)} + \frac{f\left(\frac{v}{u}\right)}{b_1(a_2 - a_1)} \right) dv = 0$$

donde la función  $f\left(\frac{v}{u}\right)$  se conoce como una función homogénea y al igual que la ecuación diferencial que hereda de ésta su nombre. Este tipo de ecuaciones diferenciales serán consideradas en la próxima sección.

Otro enfoque (equivalente) de este mismo problema puede ser consultado en el problemario de Kiseliov, Kransnov, Makarenko [?]. En este enfoque el cambio de variables se relaciona con el punto de corte  $(x_0, y_0)$

Para ejemplificar este caso analizaremos un ejemplo sencillo de una función con argumento inhomogéneo del tipo.

$$\frac{dy(x)}{dx} = \frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2} \Leftrightarrow Q(x, y)dy + P(x, y)dx = 0 \Rightarrow \begin{cases} Q(x, y) \propto a_2x + b_2y + c_2 \\ P(x, y) \propto a_1x + b_1y + c_1 \end{cases}$$

Decimos, entonces que los coeficientes  $Q(x, y)$  y  $P(x, y)$  son inhomogéneos ( $c_i \neq 0$ ). Su pondremos que las rectas no son paralelas, por lo cual utilizamos el cambio de variable propuesto anteriormente. Entonces

$$u = a_2x + b_2y + c_2 \Rightarrow du = a_2dx + b_2dy \Rightarrow dy = \frac{1}{b_2 - b_1} \left( \frac{du}{a_2} - \frac{dv}{a_1} \right)$$

$$v = a_1x + b_1y + c_1 \Rightarrow dv = a_1dx + b_1dy \Rightarrow dx = \frac{1}{a_2 - a_1} \left( \frac{du}{b_2} - \frac{dv}{b_1} \right)$$

con lo cual convertimos los los coeficientes  $Q(x, y)$  y  $P(x, y)$  en homogéneos. Esto es

$$\underbrace{(a_2x + b_2y + c_2)dy + (a_1x + b_1y + c_1)dx = 0}_{\Downarrow} \\ \left( \frac{u}{a_2(b_2 - b_1)} + \frac{v}{b_2(a_2 - a_1)} \right) du - \left( \frac{u}{a_1(b_2 - b_1)} + \frac{v}{b_1(a_2 - a_1)} \right) dv = 0$$

es decir

$$P(u, v) = u \left( \frac{1}{a_2(b_2 - b_1)} + \frac{\frac{v}{u}}{b_2(a_2 - a_1)} \right) = ug_1 \left( \frac{v}{u} \right); Q(u, v) = u \left( \frac{1}{a_1(b_2 - b_1)} + \frac{\frac{v}{u}}{b_1(a_2 - a_1)} \right) = ug_2 \left( \frac{v}{u} \right).$$

Este tipo de funciones homogéneas serán consideradas en la siguiente sección.

**Funciones Homogéneas de grado  $n$  y Ecuaciones Diferenciales Homogéneas**

Diremos que una función

$$f(x, y) \text{ es homogénea de grado } n \text{ si } f(tu, tv) = t^n f(u, v) \Leftrightarrow \begin{cases} \text{si } w = \frac{x}{y} \Rightarrow f(x, y) = y^n g(w) \\ \text{si } w = \frac{y}{x} \Rightarrow f(x, y) = x^n h(w) \end{cases}$$

Las funciones homogéneas indican un comportamiento particular cuando cambiamos la escala de sus variables. Se utilizan con bastante frecuencia en hidrodinámica y termodinámica. Un ejemplo de una función homogénea de grado 2 tendremos:

$$f(x, y) = x^2 + y^2 \ln\left(\frac{y}{x}\right) \Rightarrow f(tx, ty) = t^2 \left(u^2 + v^2 \ln\left(\frac{v}{u}\right)\right) \text{ homogénea de grado 2}$$

**Ejercicio:** Muestre que

$$f(x, y) = \sqrt{y} \operatorname{sen}\left(\frac{x}{y}\right) \text{ Homogénea de grado } \frac{1}{2}; \quad f(x, y) = e^{y/x} + \tan\left(\frac{x}{y}\right) \text{ Homogénea de grado 0}$$

Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden será homogénea si

$$Q(x, y) \text{ y } P(x, y) \text{ son homogéneas de grado } n \Rightarrow Q(x, y)dy + P(x, y)dx = 0 \text{ homogénea}$$

y en ese caso la estrategia para resolverla pasa por una sustitución del tipo

$$Q(x, y) \text{ y } P(x, y) \text{ son homogéneas de grado } n \Rightarrow y = ux \Rightarrow x^n p(u)(udx + xdu) + x^n q(u)dx = 0$$

con lo cual la convertimos en separable

$$Q(x, y)dy + P(x, y)dx = 0 \Rightarrow x^{n+1} du + x^n (q(u) + up(u))dx = 0 \Leftrightarrow \frac{du}{q(u) + up(u)} + \frac{dx}{x} = 0$$

Nótese que exigir que  $Q(x, y)$  y  $P(x, y)$  sean funciones homogéneas de grado  $n$ , equivale a imponer que

$$\frac{dy(x)}{dx} = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)} \equiv F\left(\frac{y}{x}\right) \text{ donde } F\left(\frac{y}{x}\right) \text{ es Homogénea de grado 0}$$

con lo cual estamos diciendo que si los coeficientes  $Q(x, y)$  y  $P(x, y)$  so funciones homogéneas de grado  $n$ , la ecuación diferencial es invariante de escala.

Como un primer ejemplo consideremos la siguiente ecuación diferencial

$$y' = \frac{\sqrt{x^2 - y^2} + y}{x}$$

Esto es

$$\left(\sqrt{x^2 - y^2} + y\right) dx - xdy = 0 \Rightarrow \begin{cases} Q(tx, ty) \rightarrow \sqrt{(tx)^2 - (ty)^2} + ty \Rightarrow t\left(\sqrt{(x)^2 - (y)^2} + y\right) \\ P(tx, ty) \Rightarrow tx \Rightarrow tx \end{cases}$$

homogénea de grado 1 y por lo tanto al hacer  $y = ux$  tendremos

$$x\left(\sqrt{1 - u^2} + u\right) dx - x(udx + xdu) = 0 \Rightarrow \pm\sqrt{1 - u^2} dx - xdu = 0 \Rightarrow \int \frac{dx}{x} = \pm \int \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}}$$

integramos y, finalmente, llegamos a

$$\begin{aligned} \ln(x) = \operatorname{arcsenu} + C &\Rightarrow \ln(x) = \operatorname{arcsen}\left(\frac{y}{x}\right) + C \quad \text{para } \left\|\frac{y}{x}\right\| < 1 \text{ con } x > 0 \\ -\ln(-x) = \operatorname{arcsenu} + C &\Rightarrow -\ln(-x) = \operatorname{arcsen}\left(\frac{y}{x}\right) + C \quad \text{para } \left\|\frac{y}{x}\right\| < 1 \text{ con } x < 0 \end{aligned}$$

y como  $u = \left\|\frac{y}{x}\right\| = 1 \Rightarrow y = \pm x$  también es solución.

Para un segundo ejemplo, consideremos la siguiente ecuación diferencial

$$y' = -\frac{2x - y + 1}{x + y}$$

la cual corresponde al caso en los cuales los coeficientes de la ecuación  $Q(x, y)$  y  $P(x, y)$  funciones inhomogéneas. Tal y como hemos visto un cambio de variable lo convierte en homogéneo, entonces

$$(2x - y + 1)dx + (x + y)dy = 0 \Rightarrow \begin{cases} u = 2x - y + 1 &\Rightarrow du = 2dx - dy &\Rightarrow dx = \frac{1}{3}(du + dv) \\ v = x + y &\Rightarrow dv = dx + dy &\Rightarrow dy = -\frac{1}{3}(du - 2dv) \end{cases}$$

así nuestra ecuación diferencial tendrá la forma de una ecuación homogénea

$$u\left(\frac{1}{3}(du + dv)\right) + v\left(-\frac{1}{3}(du - 2dv)\right) = 0 \Rightarrow (u - v)du + (u + 2v)dv = 0$$

y ahora haciendo el cambio de variables  $u = tv$  con lo cual  $du = t dv + v dt$

$$(tv - v)(t dv + v dt) + (tv + 2v)dv = 0 \Rightarrow (t^2 + 2)dv + (tv - v)dt = 0 \Rightarrow \int \frac{dv}{v} = \int dt \frac{t - 1}{t^2 + 2}$$

e integrando tendremos que

$$\ln|v| + \frac{1}{2} \ln|t^2 + 2| - \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{t}{\sqrt{2}} = C \Rightarrow \ln|v^2(t^2 + 2)| = \frac{2}{\sqrt{2}} \arctan \frac{t}{\sqrt{2}} + \tilde{C} \quad \text{para } v \neq 0$$

y ahora

$$t \rightarrow \frac{2x - y + 1}{x + y} \Rightarrow \ln|(2x - y + 1)^2 + 2(x + y)^2| = \frac{2}{\sqrt{2}} \arctan \left| \frac{2x - y + 1}{\sqrt{2}(x + y)} \right| + C \quad \text{para } x + y \neq 0$$

La Figura 6 ilustra esta familia de soluciones.

### Ecuaciones Isóbaras

Las ecuaciones isóbaras generalizan a las ecuaciones homogéneas por cuanto los coeficientes de la ecuación  $Q(x, y)$  y  $P(x, y)$  no son funciones homogéneas del mismo grado y se busca una transformación que convierta la ecuación en homogénea. Dicho de otra manera, si la dimensionalidad en potencias de  $y$  es la misma que la dimensionalidad en potencias de  $x$  Diremos que una ecuación diferencial es isóbara si cumple con

$$Q(x, y)dy + P(x, y)dx = 0 \Rightarrow \begin{cases} Q(tx, t^m y) &\rightarrow t^n P(x, y) \\ P(tx, t^m y) &\rightarrow t^{n-m+1} Q(x, y) \end{cases}$$

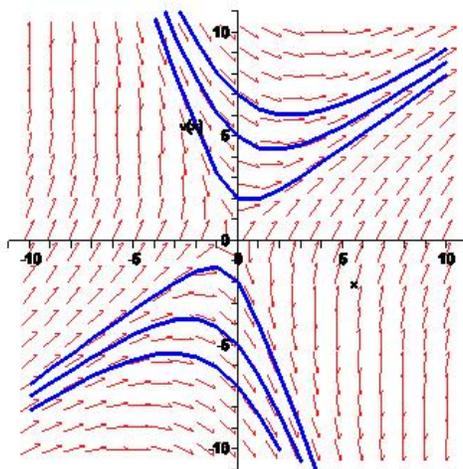


Figura 6: Solución gráfica para la ecuación  $y' = -\frac{2x - y + 1}{x + y}$ . Las curvas azules indican soluciones particulares  $y(0) = 7; y(0) = 5; y(0) = 2; y(0) = -7; y(0) = -5; y(0) = -2$ .

y el cambio de variable que se impone es  $y = vx^m$ . El exponente  $m$  surge de balancear (si es posible) Con lo cual habrá que estudiar si es posible “balancear” el orden de las dimensionalidades de variables y funciones. Tratemos con un ejemplo de ilustrar las ecuaciones isóbaras. Consideremos la ecuación

$$y' = -\frac{1}{2xy} \left( y^2 + \frac{2}{x} \right) \Rightarrow \left( y^2 + \frac{2}{x} \right) dx + 2xy dy = 0 \Rightarrow \begin{cases} x \rightarrow x & \leftrightarrow dx = dx \\ y \rightarrow z^m & \leftrightarrow dy = mz^{m-1} dz \end{cases}$$

En la contabilidad de los exponentes  $x$  aporta un peso de 1 mientras que  $y$  aporta un peso de  $m$ . La intención es balancear los términos para que la ecuación sea homogénea de grado  $n$ . Esto es

$$\left( y^2 + \frac{2}{x} \right) dx + 2xy dy = 0 \Rightarrow \left( z^{2m} + \frac{2}{x} \right) dx + 2xz^m m z^{m-1} dz = 0 \Rightarrow m = -\frac{1}{2} \Rightarrow y = vx^m \Rightarrow y = \frac{v}{\sqrt{x}}$$

El exponente del primer término es  $2m$ , del segundo  $-1$  del tercero  $2m$ . Al balancear todos los exponentes tendremos  $2m = -1$  con lo cual  $m = -\frac{1}{2}$

$$\left( y^2 + \frac{2}{x} \right) dx + 2xy dy = 0 \Rightarrow \left( \frac{v^2}{x} + \frac{2}{x} \right) dx + 2x \frac{v}{\sqrt{x}} \left( \frac{dv}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2} \frac{v}{x\sqrt{x}} dx \right) = 0 \Rightarrow v dv + \frac{dx}{x} = 0$$

entonces al integrar y devolver el cambio  $v = y\sqrt{x}$  tendremos

$$\int dv v + \int \frac{dx}{x} = 0 \Rightarrow \frac{v^2}{2} + \ln x = c \Rightarrow \frac{1}{2} y^2 x + \ln x = c$$

### 0.3.2. Ecuaciones Diferenciales Exactas

#### Ecuaciones Exactas lineales

El segundo grupo de estrategias apunta a escribir una ecuación diferencial como una derivada total de un conjunto de funciones. Uno se ayuda en una posible función que pueda acomodar los términos de la ecuación. Esa función se denomina factor integrador y tiene la forma, para una ecuación diferencial, lineal

$$\frac{d[\mu(x)y(x)]}{dx} \equiv \frac{d\mu(x)}{dx}y(x) + \mu(x)\frac{dy(x)}{dx} = \mu(x)g(x) \quad \Leftrightarrow \quad \mu(x)\frac{dy(x)}{dx} + \mu(x)f(x)y(x) = \mu(x)g(x)$$

Para que esas dos ecuaciones sean equivalentes los coeficientes de  $y(x)$  tienen que ser iguales. Es decir

$$\frac{d\mu(x)}{dx} = \mu(x)f(x) \quad \Rightarrow \quad \int \frac{d\mu(x)}{\mu(x)} = \int dx f(x) \quad \Rightarrow \quad \mu(x) = e^{\int dx f(x)}$$

Con lo cual hemos demostrada que para una ecuación lineal de primer orden, siempre es posible encontrar un factor integrador  $\mu(x)$  tal que la ecuación diferencial pueda ser expresada como una derivada total del factor integrador y la función incognita.

$$\frac{dy(x)}{dx} + f(x)y(x) = g(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{d[\mu(x)y(x)]}{dx} = \mu(x)g(x) \quad \Rightarrow \quad y(x) = \frac{1}{\mu(x)} \left( \int dx \mu(x)g(x) + C \right)$$

donde  $\mu(x) = e^{\int dx f(x)}$

#### Ecuaciones exactas no lineales

Este criterio lo podemos extender a ecuaciones que no sean, necesariamente lineales. Así para una ecuación diferencial que pueda ser escrita como

$$d[\Phi(x, y)] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad Q(x, y)dy + P(x, y)dx = 0 \quad \Rightarrow \quad d[\Phi(x, y)] = \frac{\partial\Phi(x, y)}{\partial x}dx + \frac{\partial\Phi(x, y)}{\partial y}dy = 0$$

donde  $\Phi(x, y)$  será la función a determinar. Entonces tendremos que la condición necesaria y suficiente para que una ecuación diferencial sea exacta es

$$\left. \begin{array}{l} Q(x, y) \Leftrightarrow \frac{\partial\Phi(x, y)}{\partial y} \\ P(x, y) \Leftrightarrow \frac{\partial\Phi(x, y)}{\partial x} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\partial^2\Phi(x, y)}{\partial y\partial x} \equiv \frac{\partial^2\Phi(x, y)}{\partial x\partial y} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} \equiv \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \quad \Rightarrow \quad d[\Phi(x, y)] = 0$$

Si esto se cumple entonces, podremos encontrar la función  $\Phi(x, y)$  integrando respecto a cualquiera de las variables (ahora consideradas independientes ambas).

$$P(x, y) \equiv \frac{\partial\Phi(x, y)}{\partial x} \Leftrightarrow \Phi(x, y) = \int_x^{x_0} du P(u, y) + S(y) \Rightarrow Q(x, y) = \frac{\partial\Phi(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \int_x^{x_0} du P(u, y) \right) + \frac{\partial S(y)}{\partial y}$$

entonces

$$Q(x, y) = \frac{\partial\Phi(x, y)}{\partial y} = \int_x^{x_0} du \frac{\partial P(u, y)}{\partial y} + \frac{\partial S(y)}{\partial y} \equiv \int_x^{x_0} dv \frac{\partial Q(v, y)}{\partial v} + \frac{\partial S(y)}{\partial y} = Q(v, y)|_{v=x_0}^{v=x} + \frac{\partial S(y)}{\partial y}$$

con lo cual nos queda finalmente otra ecuación diferencial para encontrar  $S(y)$  y con ella  $\Phi(x, y)$ . Esto es

$$\frac{\partial S(y)}{\partial y} = Q(x_0, y) \Rightarrow S(y) = \int_y^{y_0} dw Q(x_0, w) \Rightarrow \Phi(x, y) = \int_x^{x_0} du P(u, y) + \int_y^{y_0} dw Q(x_0, w) = C$$

Hay que hacer notar que los segmentos de línea que unen el punto  $(x_0, y_0)$  con los puntos genéricos  $(x, y_0) \wedge (x_0, y)$  pertenecen al entorno de  $(x_0, y_0)$ . Este tipo de entornos también se denomina *múltiplemente conexo*.

Consideremos los siguientes ejemplos:

Primeramente

$$y'(x \operatorname{sen} y - y^2) = \cos y \Leftrightarrow \cos y dx - (x \operatorname{sen} y - y^2) dy = 0 \Rightarrow \begin{cases} P(x, y) \Leftrightarrow \cos y \\ Q(x, y) \Leftrightarrow -(x \operatorname{sen} y - y^2) \end{cases}$$

y verificamos que esta ecuación diferencial es exacta, ya que

$$\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = -\operatorname{sen} y \Rightarrow \Phi(x, y) = \int_x^{x_0} du P(u, y) + \int_y^{y_0} dw Q(x, w) = C$$

con lo cual, si particularizamos el punto  $(x_0, y_0) \equiv (0, 0)$  tendremos que

$$\Phi(x, y) = \int_x^{x_0} du \cos y + \int_y^{y_0} dw w^2 = C \Rightarrow x \cos y + \frac{y^3}{3} = C$$

Otro ejemplo será

$$(x^3 + y^2 x) dx + (x^2 y + y^3) dy \Rightarrow \begin{cases} P(x, y) \Leftrightarrow (x^3 + y^2 x) \\ Q(x, y) \Leftrightarrow (x^2 y + y^3) \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = 2yx$$

y otra vez

$$\Phi(x, y) = \int_x^{x_0} du (u^3 + y^2 u) + \int_y^{y_0} dw (x^2 w + w^3) = C \Rightarrow \Phi(x, y) = x^4 + 2x^2 y^2 + y^4 = C \Rightarrow (x^2 + y^2)^2 = C$$

### Ecaciones exactas no lineales y factor integrador

Del mismo modo, y con la misma idea, podemos incorporar el factor integrador  $\mu(x, y)$  para extender la idea a ecuaciones que no sean, necesariamente lineales. Así para una ecuación diferencial que pueda ser escrita como

$$d[\Phi(x, y)] = 0 \Leftrightarrow \mu(x, y)Q(x, y)dy + \mu(x, y)P(x, y)dx = 0$$

es decir

$$d[\Phi(x, y)] = \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial y} dy = \mu(x, y)Q(x, y)dy + \mu(x, y)P(x, y)dx = 0$$

Entonces tendremos que la condición necesaria y suficiente para que una ecuación diferencial sea exacta, forzándola con el factor integrador se complica un poco

$$\left. \begin{array}{l} \mu(x, y)Q(x, y) \Leftrightarrow \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial y} \\ \mu(x, y)P(x, y) \Leftrightarrow \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial x} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\partial^2 \Phi(x, y)}{\partial y \partial x} \equiv \frac{\partial^2 \Phi(x, y)}{\partial x \partial y} \Leftrightarrow \frac{\partial \mu(x, y)Q(x, y)}{\partial x} \equiv \frac{\partial \mu(x, y)P(x, y)}{\partial y}$$

y, obviamente, esta condición de integrabilidad dependerá del  $\mu(x, y)$  que proponamos.

Así si  $\mu(x, y) = \mu(x)$  entonces la condición se lee

$$\frac{\partial \mu(x)}{\partial x} Q(x, y) + \mu(x) \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} \equiv \mu(x) \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \Rightarrow \frac{1}{\mu(x)} \frac{\partial \mu(x)}{\partial x} = \frac{1}{Q(x, y)} \left( \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} \right) = f(x)$$

con lo cual si se cumple que

$$\frac{1}{Q(x, y)} \left( \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} \right) = f(x) = \frac{1}{\mu(x)} \frac{\partial \mu(x)}{\partial x} \Rightarrow \mu(x) = e^{\int dx f(x)}$$

podremos determinar el factor integrador. Una vez identificado procedemos a integrar, formalmente  $\Phi(x, y)$

$$\Phi(x, y) = \mu(x) \int_{y_0}^y du Q(x, u) + S(x) \Rightarrow \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial x} = \mu(x) P(x, y) \equiv \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu(x) \int_{y_0}^y du Q(x, u) + S(x) \right)$$

y finalmente, una vez más

$$\mu(x) P(x, y) = \int_{y_0}^y du \frac{\partial \mu(x) Q(x, u)}{\partial x} + \frac{\partial S(x)}{\partial x} \Rightarrow \mu(x) P(x, y) = \int_{y_0}^y du \frac{\partial \mu(x, u) P(x, u)}{\partial u} + \frac{\partial S(x)}{\partial x}$$

con lo cual

$$S(x) = \int_{x_0}^x du \mu(u, y_0) P(u, y_0) \Rightarrow \Phi(x, y) = \mu(x) \int_{y_0}^y du Q(x, u) + \int_{x_0}^x du \mu(u, y_0) P(u, y_0) + C$$

## Bernoulli y Ricatti

### 0.3.3. Solución Paramétrica de Ecuaciones Diferenciales

**Ecuaciones del Tipo  $\mathcal{F}(y') = 0$ ,  $\mathcal{F}(x, y') = 0$  y  $\mathcal{F}(y, y') = 0$**

**Ecuaciones del Tipo  $\mathcal{F}(x, y, y') = 0$ , Lagrange y Clairaut**

## 0.4. Soluciones Numéricas a las Ecuaciones Diferenciales

### 0.4.1. Las Ideas Generales

Dada una ecuación diferencial de segundo orden de la forma

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} = F \left( \frac{d x(t)}{dt}, x(t), t \right)$$

siempre se puede convertir en un sistema de dos ecuaciones lineales de primer orden, al extender el espacio de variables de la forma

$$\left. \begin{array}{l} \frac{d x(t)}{dt} \stackrel{\text{def}}{=} p(t) \\ x(t) \stackrel{\text{def}}{=} q(t) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = F \left( \frac{d x(t)}{dt}, x(t), t \right) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{d q(t)}{dt} = p(t) \\ \frac{d p(t)}{dt} = F(p(t), q(t), t) \end{array} \right.$$

este sistema puede ser re-arreglado en forma vectorial

$$\frac{d \begin{pmatrix} q(t) \\ p(t) \end{pmatrix}}{dt} = \begin{pmatrix} p(t) \\ F(p(t), q(t), t) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \frac{d \mathbf{Q}(t)}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{Q}(t), t)$$

Así dado un conjunto de potenciales elásticos y las fuerzas que de ellos derivan,

$$V(x) = \begin{cases} kx & \leftarrow p = 1 \\ \frac{1}{2}kx^2 & \leftarrow p = 2 \\ \frac{1}{3}kx^3 & \leftarrow p = 3 \\ \vdots \\ \frac{1}{p}k \|x\|^p \end{cases} \Rightarrow F_k(x) = -\frac{dV(x)}{dx} \Rightarrow F_k(x) = \begin{cases} -k \frac{x}{\|x\|} \\ -kx \\ -kx^2 \\ \vdots \\ -k \|x\|^{p-1} \frac{x}{\|x\|} \end{cases}$$

el sistema dinámico correspondiente a la ecuación de Newton será

$$\frac{d\mathbf{Q}(t)}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{Q}(t), t) \Rightarrow \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x(t) \\ p(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p(t) \\ \frac{1}{m} [F_{ext}(x(t), t)] - k \|x(t)\|^{p-1} \frac{x(t)}{\|x(t)\|} \end{pmatrix}$$

### Los Métodos y su Clasificación

Dada una ecuación diferencial de primer orden,  $\frac{dy(x)}{dx} = y'(x) = f(y(x), x)$ , con  $y_k$  el valor de la función obtenida con el método, con  $y_k = y(x_k)$ , donde  $x_k = x_0 + kh$  y  $h$  el paso. Diremos que un método es de **paso único** si la determinación de  $y_{k+1}$  sólo involucra un único valor de  $y_k$  y **múltiple paso** si para calcularlo se utilizan varios valores  $y_k, y_{k-1}, \dots, y_{k-p}$ . Por otra parte se denomina un método **explícito** si para determinar  $y_{k+1}$  se utilizan valores anteriores  $y_k, y_{k-1}, \dots, y_{k-p}$  y **implícito** si se utilizan una función del mismo valor  $y_{k+1}$ . Así

$$y_{k+1} = y_{k-1} + 2h f(x_k, y_k)$$

representa un método **explícito de paso único** mientras que

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2} [f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_{k+1})]$$

será **implícito de múltiples pasos**.

### El Rebusque de Taylor

Tal y como hemos dicho arriba, dada una ecuación diferencial, su solución a través de un método de paso único puede ser escrita como

$$y'(x) = f(y(x), x) \Rightarrow y_{k+1} = y_k + \varphi(x_k, y_k, h) \quad \text{con } h = x_{i+1} - x_i;$$

Lo primero que se puede hacer es expandir por Taylor alrededor del punto  $x = x_k$

$$y(x) = y(x_k) + (x - x_k) y'(x_k) + \frac{1}{2!} (x - x_k)^2 y''(x_k) + \dots + \frac{1}{n!} (x - x_k)^n y^{(n)}(x_k) + \dots$$

e identificamos

$$\begin{aligned} y(x_k) &\rightarrow y_k y'(x) = f(y(x), x) \\ y'(x_k) &\rightarrow f(y_k, x_k) \\ y''(x_k) &\rightarrow f'(y_k, x_k) = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{\substack{x=x_k \\ y=y_k}} + \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{\substack{x=x_k \\ y=y_k}} y'_k \\ y'''(x_k) &\rightarrow f''(y_k, x_k) = \partial_x f' + \partial_y f' y'_k = \partial_{xx} f + (\partial_{xy} f) y'_k + [\partial_{yx} f + (\partial_{yy} f) y'_k] y'_k + \partial_y f y''_k \\ &\vdots \end{aligned}$$

por lo que reconstruimos la serie de Taylor hasta el orden que podamos o requiramos

$$y_{n+1} = y_n + h f(y_k, x_k) + \frac{1}{2!} h^2 f'(y_k, x_k) + \frac{1}{3!} h^3 f''(y_k, x_k) + \dots + \frac{1}{n!} h^n f^{(n-1)}(y_k, x_k) + \dots$$

quedando acotado el error por

$$\varepsilon_{red} = \frac{1}{(n+1)!} h^{n+1} f^{(n)}(y(\xi), x(\xi))$$

#### 0.4.2. La idea de la Integración y los Métodos

La idea de integrar una ecuación diferencial ordinaria puede ilustrarse, formalmente de la siguiente forma

$$y'(x) = f(y(x), x) \Rightarrow y_{k+1} = y_k + \int_{x_k}^{x_{k+1}} d\xi f(\xi, y(\xi))$$

entonces el método se centra en como se aproxima la función dentro de la integral

<b>Euler</b>	Se aproxima la función con en el punto anterior
$f(x_k, y_k)$	$\Rightarrow y_{k+1} = y_k + h f(x_k, y_k)$
<b>Euler Mejorado o Heuns</b>	Se aproxima la función mediante un promedio en los extremos
$\frac{1}{2} [f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_{k+1})]$	$\Rightarrow y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2} [f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_{k+1})]$
	$\Rightarrow y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2} [f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_k + h f(x_k, y_k))]$

con  $h = x_{i+1} - x_i$  el paso de integración. Nótese además que hemos utilizado Euler otra vez para expresar  $y_{k+1} = y_{k+1}(y_k, x_k)$

El Método de Euler constituye una expansión por Taylor hasta primer orden por lo que el error es claramente de segundo orden por cuanto si comparamos con la expansión en series de Taylor correspondiente tendremos

$$\begin{aligned} y_{k+1} &= y_k + h \frac{dy}{dx} \Big|_{x=x_k} + \frac{h^2}{2!} \frac{d^2y}{dx^2} \Big|_{x=x_k} + \dots \\ \|\varepsilon_{tot}\| &\propto \frac{h^2}{2!} \frac{d^2y}{dx^2} \Big|_{x=x_k} \end{aligned}$$

#### El Método de Euler y el problema de Valores Iniciales

Este método si bien no se utiliza en la práctica en su forma estándar para ecuaciones diferenciales ordinarias, si ilustra el proceso de discretización de una ecuación diferencial y su solución mediante métodos numéricos.

Para resolver la ecuación de un oscilador armónico libre que parte del reposo, i.e.

$$\frac{d^2\phi(t)}{dt^2} + \omega_0^2\phi(t) = 0 \quad \text{con: } \omega_0^2 = \frac{k}{m}; \quad \phi(t_0) = 1; \quad \text{y} \quad \left. \frac{d\phi(t)}{dt} \right|_{t=t_0} = 0$$

en la cual  $\phi(t)$  representa la posición de un cuerpo de masa  $m$  unido a un resorte de constante elástica  $k$ .

Discretizando mediante diferencia centrada

$$h = t_{i+1} - t_i; \quad \frac{d^2\phi(t)}{dt^2} \approx \frac{1}{h^2} [\phi(t_{i+1}) - 2\phi(t_i) + \phi(t_{i-1})] \equiv \frac{1}{h^2} [\phi_{i+1} - 2\phi_i + \phi_{i-1}]$$

con lo cual la ecuación del oscilador libre queda como

$$\frac{d^2\phi(t)}{dt^2} + \omega_0^2\phi(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \phi_{i+1} - (2 - h^2\omega_0^2)\phi_i + \phi_{i-1} = 0$$

esta última ecuación es la versión en **diferencias finitas** de la ecuación diferencial y es claro que se convierte en una ecuación algebraica. Finalmente, los dos valores iniciales para la iteración  $\phi_0$  y  $\phi_1$  surgen de las condiciones iniciales

$$\begin{aligned} \phi_0 &\equiv \phi(t = t_0) = 1 \\ \left. \frac{d\phi(t)}{dt} \right|_{t=t_0} &= 0 \quad \Rightarrow \quad \phi_1 \approx \phi_0 \end{aligned}$$

### Los Métodos de Runge-Kutta

Es el conjunto de métodos más populares y de mayor uso. La idea del método de Runge-Kutta es producir resultados equivalentes a desarrollos en Taylor de orden superior a Euler en métodos de un único paso por lo tanto

$$y'(x) = f(y(x), x) \Rightarrow y_{k+1} = y_k + \int_{x_k}^{x_{k+1}} d\xi f(\xi, y(\xi))$$

y se aproxima la función con un promedio ponderado.

$$f(\xi, y(\xi)) \approx [\alpha f(y_k, x_k) + \beta f(y_k + \delta f(y_k, x_k) h_k, x_k + \gamma h_k)] \quad \text{con} \quad h_k = x_{k+1} - x_k$$

donde  $\alpha, \beta, \gamma$  y  $\delta$  son los pesos estadísticos a ser determinados. Por lo tanto

$$y_{k+1} = y_k + [\alpha f(y_k, x_k) + \beta f(y_k + \delta f(y_k, x_k) h_k, x_k + \gamma h_k)] h_k$$

Expandiendo por Taylor de dos variables

$$g(x + \lambda, y + \mu) = g(x, y) + [\lambda \partial_x g + \mu \partial_y g] + \frac{1}{2!} [\lambda^2 \partial_x^2 g + 2\lambda\mu \partial_{xy} g + \mu^2 \partial_y^2 g] + \dots$$

tendremos

$$\begin{aligned} y_{k+1} &= y_k + [\alpha + \beta] f_k h_k + \beta [\gamma \partial_x f_k + \delta f_k \partial_y f_k] h_k^2 + \\ &+ \beta \left[ \frac{\gamma^2}{2} \partial_x^2 f_k + 2\gamma\delta f_k \partial_{xy} f_k + \frac{\delta^2}{2} f_k^2 \partial_y^2 f_k \right] h_k^3 + \dots \end{aligned}$$

con  $f_k = f(y_k, x_k)$  y como se ve claramente, queda libertad para escoger

**Euler Mejorado o Heuns**  $\alpha = \beta = \frac{1}{2}; \quad \gamma = \delta = 1$

$$y_{k+1} = y_k + f_k h_k + \frac{1}{2} [\partial_x f_k + f_k \partial_y f_k] h_k^2$$

**Euler Modificado**  $\alpha = 0; \quad \beta = 1; \quad \gamma = \delta = \frac{1}{2}$

$$y_{k+1} = y_k + f_k h_k + [\frac{1}{2} \partial_x f_k + \frac{1}{2} f_k \partial_y f_k] h_k^2$$

Runge-Kutta de cuarto orden aproxima la función  $f(\xi, y(\xi))$  en cuatro puntos intermedios en el intervalo  $x_k < x < x_{k+1}$  por lo cual

$$y_{k+1} = y_k + [\alpha \kappa_1 + \beta \kappa_2 + \gamma \kappa_3 + \delta \kappa_4] h_k$$

podemos plantearnos varias formas de hacerlo

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h_k}{6} [\kappa_1 + 2\kappa_2 + 2\kappa_3 + \kappa_4]$$

donde

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= f(x_k, y_k) \\ \kappa_2 &= f\left(x_k + \frac{1}{2}h_k, y_k + \frac{1}{2}\kappa_1\right) \\ \kappa_3 &= f\left(x_k + \frac{1}{2}h_k, y_k + \frac{1}{2}\kappa_2\right) \\ \kappa_4 &= f(x_k + h_k, y_k + \kappa_3) \end{aligned}$$

o también

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h_k}{8} [\kappa_1 + 3\kappa_2 + 3\kappa_3 + \kappa_4]$$

donde

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= f(x_k, y_k) \\ \kappa_2 &= f\left(x_k + \frac{1}{3}h_k, y_k + \frac{1}{3}\kappa_1\right) \\ \kappa_3 &= f\left(x_k + \frac{1}{3}h_k, y_k + \frac{1}{3}\kappa_2\right) \\ \kappa_4 &= f(x_k + h_k, y_k + \kappa_3) \end{aligned}$$

Más aún el método de **Fehlberg de 4/5 orden** se puede escribir como

$$y_{k+1} = y_k + h_k [C_1\kappa_1 + C_2\kappa_2 + C_3\kappa_3 + C_4\kappa_4 + C_5\kappa_5 + C_6\kappa_6] + O(h^6)$$

$$\begin{aligned}
\kappa_1 &= f(x_k, y_k) \\
\kappa_2 &= f(x_k + a_2 h_k, y_k + b_{21} \kappa_1) \\
\kappa_3 &= f(x_k + a_3 h_k, y_k + b_{31} \kappa_1 + b_{32} \kappa_2) \\
\kappa_4 &= f(x_k + a_4 h_k, y_k + b_{41} \kappa_1 + b_{42} \kappa_2 + b_{43} \kappa_3) \\
&\vdots \\
\kappa_6 &= f(x_k + a_6 h_k, y_k + b_{61} \kappa_1 + b_{62} \kappa_2 + b_{63} \kappa_3 + b_{64} \kappa_4 + b_{65} \kappa_5)
\end{aligned}$$

la cual puede ser redefinida y truncada para obtener

$$\tilde{y}_{k+1} = y_k + h_k \left[ \tilde{C}_1 \kappa_1 + \tilde{C}_2 \kappa_2 + \tilde{C}_3 \kappa_3 + \tilde{C}_4 \kappa_4 + \tilde{C}_5 \kappa_5 \right] + O(h^5)$$

### Métodos Multipaso

Los métodos multipaso se basan encontrar el valor  $y_{n+k}$  como una función de  $k$  valores precedentes:  $y_{n+k-1}, y_{n+k-2}, y_{n+k-3}, \dots, y_n$ . Para  $k = 1$ , retomamos los métodos de paso único del tipo Euler o Runge-Kutta. Será *explícito (abierto)* si el valor  $y_{n+k}$  puede ser calculado directamente o *implícito (abierto)* si la fórmula contiene el valor  $y_{n+k}$  deseado.

Otra vez la idea está en aproximar el argumento de la integración formal

$$y'(x) = f(y(x), x) \Rightarrow y_{i+1} = y_i + \int_{x_{i-k}}^{x_{i+1}} d\xi f(\xi, y(\xi))$$

nótese en este caso que el punto  $i + 1$  recibe la contribución de  $k$  puntos anteriores. El integrando  $f(\xi, y(\xi))$  lo aproximaremos con un polinomio de interpolación de Newton de orden  $n$ . Tal que

$$f(\xi, y(\xi)) \rightarrow f(\xi) = p_n(\xi) + R_n(\xi)$$

con  $p_n(\xi)$  el polinomio de interpolación y  $R_n(\xi)$  el residuo. Donde  $i$

$$\begin{aligned}
p_n(x) &= f[x_n] + (x - x_n) f[x_n, x_{n-1}] + (x - x_n)(x - x_{n-1}) f[x_n, x_{n-1}, x_{n-2}] + \dots \\
&\quad + (x - x_n)(x - x_{n-1})(x - x_{n-2}) \dots (x - x_1) f[x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, x_{n-3}, \dots, x_0] \\
R_n(x) &= (x - x_n)(x - x_{n-1})(x - x_{n-2}) \dots (x - x_0) \frac{f^{(n+1)}(\zeta)}{(n+1)!} \quad \text{con } x_0 < \zeta < x_n
\end{aligned}$$

haciendo  $p_n(x) \equiv f(x_n + \alpha h)$  con  $\alpha$  cero o negativo de tal modo que en términos del operador diferencias atrasada  $\nabla f(x) = f(x) - f(x - h)$  siendo  $h$  el incremento

$$\begin{aligned}
f(x_n + \alpha h) &= f_n + \alpha \nabla f_n + \frac{\alpha(\alpha+1)}{2!} \nabla^2 f_n + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{3!} \nabla^3 f_n + \\
&\quad + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2) \dots (\alpha+r-1)}{r!} \nabla^r f_n
\end{aligned}$$

donde hemos denotado  $f_n \equiv f(x_n, y(x_n))$ ,  $\nabla^m f_n \equiv \nabla^m f|_{x=x_n}$ , y  $\alpha = (x - x_i)/h$ . Por lo tanto

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + \int_{x_{i-k}}^{x_{i+1}} d\xi f(\xi, y(\xi)) \\ &= y_i + h \int_{-k}^1 d\alpha f(x_n + \alpha h) \\ y_{i+1} &= y_i + h \left[ \alpha f_i + \frac{\alpha^2}{2} \nabla f_i + \alpha^2 \left( \frac{\alpha}{3} + \frac{1}{2} \right) \frac{\nabla^2 f_i}{2!} + \alpha^2 \left( \frac{\alpha^2}{4} + \alpha + 1 \right) \frac{\nabla^3 f_i}{3!} + \right. \\ &\quad \left. + \alpha^2 \left( \frac{\alpha^3}{5} + \frac{3\alpha^2}{2} + \frac{11\alpha}{3} + 3 \right) \frac{\nabla^4 f_i}{4!} + \dots \right]_{-k}^1 \end{aligned}$$

por razones de conveniencia que son evidentes al hacer el desarrollo, se toman las fórmulas para  $k = r$  y  $k$  impar y obtendremos

$$\begin{aligned} \left. \begin{array}{l} k=0 \\ r=3 \end{array} \right\} &\Rightarrow \begin{cases} y_{i+1} = y_i + h \left[ f_i + \frac{1}{2} \nabla f_i + \frac{5}{12} \nabla^2 f_i + \frac{3}{8} \nabla^3 f_i \right] \\ R = \frac{251}{720} h^5 f^{(4)}(\zeta) \end{cases} \\ \left. \begin{array}{l} k=1 \\ r=1 \end{array} \right\} &\Rightarrow \begin{cases} y_{i+1} = y_i + h [2f_i + 0 \nabla f_i] \\ R = \frac{1}{3} h^3 f^{(2)}(\zeta) \end{cases} \\ \left. \begin{array}{l} k=3 \\ r=3 \end{array} \right\} &\Rightarrow \begin{cases} y_{i+1} = y_i + h \left[ 4f_i - 4 \nabla f_i + \frac{3}{8} \nabla^2 f_i + 0 \nabla^3 f_i \right] \\ R = \frac{14}{45} h^5 f^{(4)}(\zeta) \end{cases} \\ \left. \begin{array}{l} k=5 \\ r=5 \end{array} \right\} &\Rightarrow \begin{cases} y_{i+1} = y_i + h \left[ 6f_i - 12 \nabla f_i + 15 \nabla^2 f_i - 9 \nabla^3 f_i + \frac{33}{10} \nabla^4 f_i \right] \\ R = \frac{41}{140} h^7 f^{(6)}(\zeta) \end{cases} \end{aligned}$$

y al expresar las diferencias atrasadas las fórmulas explícitas (abierta) quedan expresadas como

$$\begin{aligned} \left. \begin{array}{l} k=0 \\ r=3 \end{array} \right\} & y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24} [55f_i - 59f_{i-1} + 37f_{i-2} - 9f_{i-3}] & R \sim O(h^5) \\ \left. \begin{array}{l} k=1 \\ r=1 \end{array} \right\} & y_{i+1} = y_i + 2hf_i & R \sim O(h^3) \\ \left. \begin{array}{l} k=3 \\ r=3 \end{array} \right\} & y_{i+1} = y_i + \frac{4h}{3} [2f_i - f_{i-1} + 2f_{i-2}] & R \sim O(h^5) \\ \left. \begin{array}{l} k=5 \\ r=5 \end{array} \right\} & y_{i+1} = y_i + \frac{3h}{10} [11f_i - 14f_{i-1} + 26f_{i-2} - 14f_{i-3} + 11f_{i-4}] & R \sim O(h^7) \end{aligned}$$

Si siguiendo el mismo procedimiento se pueden escribir las fórmulas implícitas (cerradas) para las mismas “curiosas” situaciones. Para este caso la conveniencia se obtiene para  $k$  impar y  $r = k + 2$

$$\begin{aligned} \left. \begin{array}{l} k=0 \\ r=3 \end{array} \right\} &\Rightarrow \begin{cases} y_{i+1} = y_i + h \left[ f_{i+1} - \frac{1}{2} \nabla f_{i+1} - \frac{1}{12} \nabla^2 f_{i+1} - \frac{1}{24} \nabla^3 f_{i+1} \right] \\ R = \frac{-19}{720} h^5 f^{(4)}(\zeta) \end{cases} \\ \left. \begin{array}{l} k=1 \\ r=3 \end{array} \right\} &\Rightarrow \begin{cases} y_{i+1} = y_{i-1} + h \left[ 2f_{i+1} - 2 \nabla f_i - \frac{1}{3} \nabla^2 f_{i+1} - 0 \nabla^3 f_{i+1} \right] \\ R = \frac{-1}{90} h^5 f^{(4)}(\zeta) \end{cases} \\ \left. \begin{array}{l} k=3 \\ r=5 \end{array} \right\} &\Rightarrow \begin{cases} y_{i+1} = y_{i-3} + h \left[ 4f_{i+1} - 8 \nabla f_i - \frac{20}{3} \nabla^2 f_{i+1} - \frac{8}{3} \nabla^3 f_{i+1} + \frac{14}{45} \nabla^4 f_{i+1} \right] \\ R = \frac{-8}{945} h^5 f^{(4)}(\zeta) \end{cases} \end{aligned}$$

desarrollando las diferencias atrasadas, tendremos

$$\left. \begin{array}{l} k=0 \\ r=3 \end{array} \right\} y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24} [9f_{i+1} + 19f_{i-1} - 5f_{i-2} + 9f_{i-3}] \quad R \sim O(h^5)$$

$$\left. \begin{array}{l} k=1 \\ r=3 \end{array} \right\} y_{i+1} = y_{i-1} + \frac{h}{3} [f_{i+1} + f_i + f_{i-1}] \quad R \sim O(h^5)$$

$$\left. \begin{array}{l} k=3 \\ r=5 \end{array} \right\} y_{i+1} = y_{i-3} + \frac{2h}{45} [7f_{i+1} + 32f_i + 12f_{i-1} + 32f_{i-2} + 7f_{i-3}] \quad R \sim O(h^7)$$

Se debe puntualizar lo siguiente respecto a las fórmulas explícitas e implícitas de los métodos multipaso antes mencionados

- Los métodos multipaso, normalmente, requieren menos evaluaciones de las funciones que los métodos monopaso para un mismo nivel de precisión.
- Los métodos multipaso requieren de un método monopaso que le permita determinar los  $y_{n+k-1}, y_{n+k-2}, y_{n+k-3}, \dots, y_n$  puntos iniciales.
- Las fórmulas explícitas son, normalmente, menos precisas que las implícitas. La razón se fundamenta en que, mientras las explícitas extrapolan la solución al punto  $y_{i+1}$ , las implícitas la interpolan, por cuanto la toman en cuenta en el momento de calcularla.
- Las fórmulas explícitas e implícitas deben ser consideradas como complementarias, por cuanto las explícitas pueden *predecir* el valor de  $y_{i+1}$  necesario para la  $f_{i+1} = f(x_{i+1}, y_{i+1})$  del cálculo de  $y_{i+1}^*$  en la fórmula implícita.

Existen varias combinaciones *predictor-corrector*, entre ellas mencionamos:

#### Milne de cuarto orden

- Predictor

$$y_{i+1} = y_{i-3} + \frac{4h}{3} [2f_i - f_{i-1} + 2f_{i-2}]$$

- Corrector

$$y_{i+1} = y_{i-1} + \frac{h}{3} [f_{i+1} - 4f_i + f_{i-1}]$$

#### Milne de sexto orden

- Predictor

$$y_{i+1} = y_{i-5} + \frac{3h}{10} [11f_i - 14f_{i-1} + 26f_{i-2} - 14f_{i-3} + 11f_{i-4}]$$

- Corrector

$$y_{i+1} = y_{i-3} + \frac{2h}{45} [7f_{i+1} + 32f_i + 12f_{i-1} + 32f_{i-2} + 7f_{i-3}]$$

#### Adams Modificado o Adams Moulton

- Predictor

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24} [55f_i - 59f_{i-1} + 37f_{i-2} - 9f_{i-3}]$$

- Corrector

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24} [9f_{i+1} + 19f_i - 5f_{i-1} + f_{i-2}]$$

El método de extrapolación multipaso más exitoso (conjuntamente con los métodos de paso único del tipo **Runge-Kutta**) es el de extrapolación racional de **Bulirsch-Stoer** en el cual se define un paso superior de  $H$  y una serie de subpaso  $h_\eta = H/\eta$  con el aumento del número de subpasos, en algún momento siguiendo algún criterio de convergencia se hace una extrapolación (racional) que representa el límite  $\eta \rightarrow \infty$ .

El método de Bulirsch-Stoer tiene una estrategia diferente al los anteriores y posee, como motor de aproximación el método del punto medio modificado o salto de rana (*leap frog*). Este esquema se utiliza con frecuencia en discretizaciones de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales y se basa en aproximar la derivada por el valor el promedio en los dos extremos:

$$y'(x) = f(y(x), x) \Rightarrow y'(x_n) = f(y(x_n), x_n) = \frac{y(x_n) - y(x_{n-1}))}{2h}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} z_0 &\equiv y(x) \\ z_1 &= z_0 + hf(x, z_0) \\ &\vdots \\ z_{n+1} &= z_{n-1} - 2hf(x + nh, z_n) \end{aligned}$$

para finalmente calcular

$$y(x + H) \approx y_n \equiv \frac{1}{2} [z_n + z_{n-1} + hf(x + H, z_n)]$$

Nótese que si reacomodamos

$$y(x + H) \approx \frac{4y_n - y_{n/2}}{3}$$

obtendremos un método de cuarto orden que requiere menos evaluaciones de  $f(y(x_n), x_n)$  por paso  $h$

### 0.4.3. Control del Paso

**En General para métodos de 4<sup>to</sup> orden.** Tal y como se mencionó en el caso de la integración numérica, el primer criterio que surge es dividir el paso  $h$  en la mitad, calcular todo de nuevo y comparar los resultados a ver si está dentro de los límites de tolerancia que nos hemos impuesto

$$\begin{aligned} \left\| \frac{y_h - y_{h/2}}{y_h} \right\| &\equiv \Delta(y_h, y_{h/2}) < \varepsilon_{\text{máx}} \Rightarrow \\ \frac{\varepsilon_{\text{máx}}}{\Delta(y_h, y_{h/2})} &\approx \left( \frac{h_0}{h_t} \right)^5 \Rightarrow h_0 = h_t \left( \frac{\varepsilon_{\text{máx}}}{\Delta(y_h, y_{h/2})} \right)^{1/5} \end{aligned}$$

donde hemos denotado  $h_0$  como el paso ideal. Esta relación es general para cualquier método de 4 orden de paso único, multipaso, implícito o explícito.

Más aún, la práctica ha indicado que

$$h_0 = \begin{cases} \mathcal{M}h_t \left( \frac{\varepsilon_{\text{máx}}}{\Delta(y_h, y_h^*)} \right)^{0,20} \equiv \mathcal{M}h_t \left( \frac{\Delta_0}{\Delta_h} \right)^{0,20} & \Delta_0 \geq \Delta_1 \\ \mathcal{M}h_t \left( \frac{\varepsilon_{\text{máx}}}{\Delta(y_h, y_h^*)} \right)^{0,25} \equiv \mathcal{M}h_t \left( \frac{\Delta_0}{\Delta_h} \right)^{0,25} & \Delta_0 < \Delta_1 \end{cases}$$

donde  $0 < \mathcal{M} < 1$  un factor de seguridad

**Para métodos Runge-Kutta.** es importante mencionar que se utilizan mayoritariamente métodos hasta cuarto orden porque de mayor orden ( $M$ , por ejemplo) involucran más de  $M$  evaluaciones (y menos  $M - 2$ ) de la derivada. Por ello para este tipo de métodos se descubrió que considerando el mismo número de puntos para la evaluación intermedia se pueden generar métodos de distinto orden, y para colmo de suerte el menor orden de esta situación se expresa para métodos de 4 y 5 orden. En particular Runge-Kutta de 5 orden se puede escribir como:

$$y_{k+1} = y_k + h_k [C_1\kappa_1 + C_2\kappa_2 + C_3\kappa_3 + C_4\kappa_4 + C_5\kappa_5 + C_6\kappa_6] + O(h^6)$$

$$\kappa_1 = f(x_k, y_k)$$

$$\kappa_2 = f(x_k + a_2h_k, y_k + b_{21}\kappa_1)$$

$$\kappa_3 = f(x_k + a_3h_k, y_k + b_{31}\kappa_1 + b_{32}\kappa_2)$$

$$\kappa_4 = f(x_k + a_4h_k, y_k + b_{41}\kappa_1 + b_{42}\kappa_2 + b_{43}\kappa_3)$$

$$\vdots$$

$$\kappa_6 = f(x_k + a_6h_k, y_k + b_{61}\kappa_1 + b_{62}\kappa_2 + b_{63}\kappa_3 + b_{64}\kappa_4 + b_{65}\kappa_5)$$

y con los mismos puntos (¡ las mismas evaluaciones ! ) se puede reescribir para 4 orden como:

$$\tilde{y}_{k+1} = y_k + h_k [\tilde{C}_1\kappa_1 + \tilde{C}_2\kappa_2 + \tilde{C}_3\kappa_3 + \tilde{C}_4\kappa_4 + \tilde{C}_5\kappa_5] + O(h^5)$$

por lo tanto el error se puede estimar

$$\Delta(y_{k+1}, \tilde{y}_{k+1}) = \sum_{i=1}^6 (C_i - \tilde{C}_i) \kappa_i$$

y el control del paso se utiliza exactamente igual

$$h_0 = h_t \left( \frac{\varepsilon_{\text{máx}}}{\Delta(y_h, \tilde{y}_h)} \right)^{0,20}$$

**Para métodos multipasos y predictor corrector** la situación puede tener un refinamiento adicional antes de proceder a modificar el paso  $h$ . El esquema sería para un método predictor corrector del tipo Adams Modificado o Adams Moulton, donde el

- Predictor

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24} [55f_i - 59f_{i-1} + 37f_{i-2} - 9f_{i-3}]$$

- Corrector

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24} [9f_{i+1} + 19f_i - 5f_{i-1} + f_{i-2}]$$

se realiza una serie de iteraciones dentro de la fórmula de corrector, i.e.

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24} \left[ 9f \left( x_{i+1}, y_{i+1} \right) + 19f(x_i, y_i) - 5f(x_{i-1}, y_{i-1}) + f(x_{i-2}, y_{i-2}) \right]$$

## 0.5. Algunas Aplicaciones de Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden

Modelar o describir matemáticamente un fenómeno es el fin último de la ciencia. Las matemáticas son el lenguaje de la física. ¿Cómo describir el chisporroteo de una llama? ¿la textura de una pintura al óleo? ¿el tráfico en carreteras durante horas pico? ¿el titilar de las estrellas? Describir matemáticamente estas situaciones no sólo no es fácil, pero tampoco es única. Son fenómenos complejos y su descripción puede tener muchos grados de profundidad.

### 0.5.1. Ley de Malthus/Decaimiento Radioactivo.

Malthus<sup>3</sup>

$$\frac{d}{dx}y(x) = k y(x) \quad \begin{array}{l} k > 0 \\ k < 0 \end{array} \quad y(0) = y_0. \quad (30)$$

$$y(t) = y_0 e^{kt}$$

Para  $k < 0$  tenemos una situación de decaimiento: la población decrece con el tiempo. Este concepto se utiliza en los procesos de decaimiento radiactivo. El tiempo de vida media se define como el tiempo necesario para que la mitad de los núcleos decaigan, lo cual es independiente de la cantidad de la muestra y permite medir la edad de todo aquello que contenga isótopos radioactivos. En particular el  $C^{14}$  del cual se sabe que: tiene una vida media de 5730 años y que todos los organismos están (o estuvieron) formados por carbono. Por lo tanto, si sabemos el porcentaje de  $C^{14}$  en una muestra, digamos el 63% podremos inferir su edad

$$y(0) = 1$$

$$y(5730) = e^{k \cdot 5730} = \frac{1}{2}$$

Por lo tanto, despejando  $k$

$$k = \frac{-\ln 2}{5730}$$

tendremos finalmente

$$y(t) = 2^{-t/5730}$$

de aquí obtendremos la edad en años de la muestra

$$y(t) = 0,63 \Rightarrow t = -\frac{\ln 0,63}{\ln 2} 5730 \approx 3819,48$$

Para  $k > 0$  la ecuación 30 describe el incremento poblacional. El valor de  $k$  se calcula experimentalmente (promediando sus valores para cada uno de los parámetros). Para la población venezolana  $k = 0,018$

<sup>3</sup>En honor al economista político inglés Thomas Robert Malthus (1766-1834). Quien fue uno de los primeros en darse cuenta que la población crece como una razón geométrica mientras que los medios de subsistencia crecen de manera aritmética. Esta afirmación plasmada en su *Ensayo sobre el Principio de Poblaciones*, el cual inspiró a Darwin en la formulación de principio de selección natural. Malthus, muy religioso y creyente pensaba que esa diferencia en el crecimiento de la población y las necesidades que ellas generaban, eran de procedencia divina y que forzaría a la humanidad a ser más laboriosa e ingeniosa para lograr los medios de subsistencia. Darwin, no tan religioso, lo formuló como una situación natural presente en todas las especies.

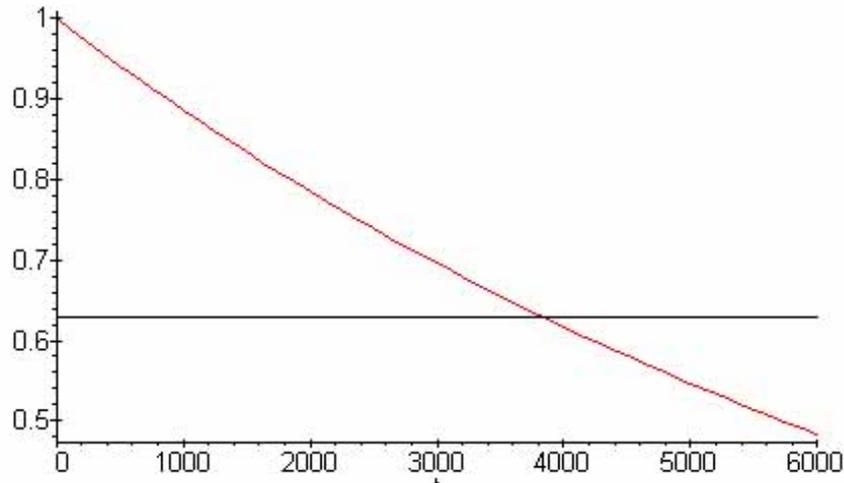


Figura 7: Decaimiento Radioactivo

Población Venezolana (Millones Hab.)		
Año	Población	$y(t) = 0,350 e^{0,018t}$
1800 (0)	0.350	0.350
1847 (47)	0.750	0.816
1873 (73)	1.000	1.302
1881 (81)	1.750	1.504
1891 (91)	2.100	1.801
1926 (126)	2.850	3.381
1936 (136)	3.200	4.048
1941 (141)	3.850	4.429
1950 (150)	4.350	5.208
1961 (161)	6.800	6.348
1971 (171)	10.800	7.600
1981 (181)	14.100	9.099

### 0.5.2. La Ecuación logística o Ley de Verhulst

Esta ecuación se utiliza para describir el crecimiento de la población de una manera más precisa que la Ley de Malthus. Esta ecuación toma en cuenta el decrecimiento de la población con el término  $-y^2$

$$y' = (k - ay) y = ky - ay^2$$

donde  $k$  y  $a$  son constantes arbitrarias. Esta ecuación es separable y la solución tiene la forma de

$$\ln \left| \frac{y}{k - ay} \right| = k t + C$$

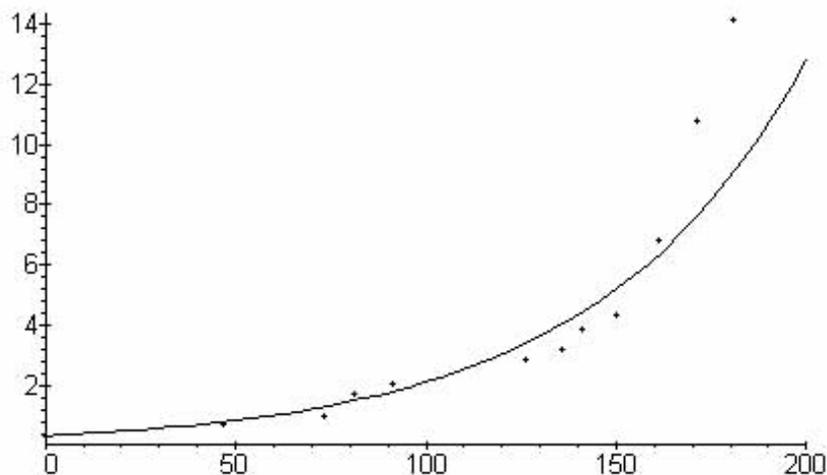


Figura 8: Población de Venezuela desde 1800

y por lo tanto

$$y(t) = \frac{k y_0}{a y_0 + (k - a y_0) e^{-k t}}$$

el crecimiento de la población venezolana desde 1800 puede modelarse con  $k = 0,018$ ,  $a = 0,001$

### 0.5.3. La Ley de Enfriamiento de Newton

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_m) \quad T(0) = T_0$$

la solución será

$$T = (T_0 - T_m) e^{k t} + T_m$$

y para el caso de una torta recién sacada del horno a una temperatura de  $T_0 = 176^\circ$ , y una temperatura ambiente de  $T_m = 23^\circ$ , con  $T(80) = 63^\circ$ , la gráfica será

también se puede modelar el enfriamiento con una temperatura del ambiente variable esto es

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_m(t)) \quad T(0) = T_0$$

tómese, por ejemplo,

$$T_m(t) = 23 - 10 \cos\left(\frac{\pi t}{12}\right) \quad \text{con } 0 \leq t \leq 24 \text{ horas}$$

si  $T(0) = 15^\circ$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{4} \left( T - 23 - 7 \cos\left(\frac{\pi t}{12}\right) \right)$$

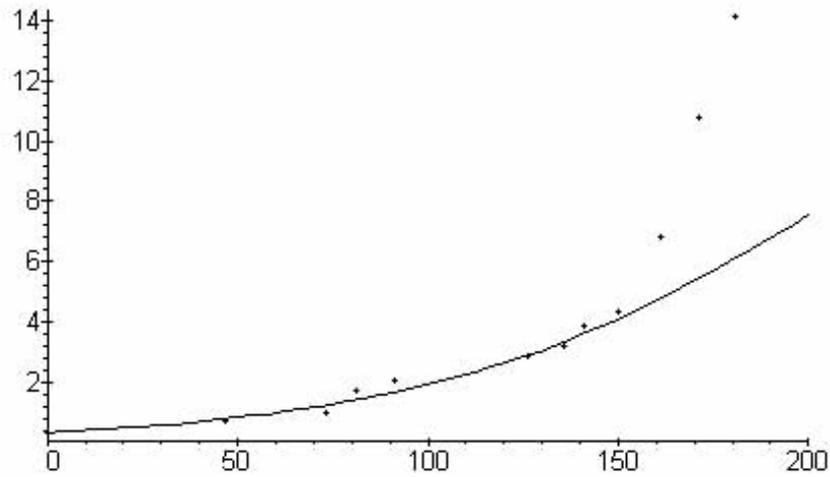


Figura 9: Población de Venezuela desde 1800

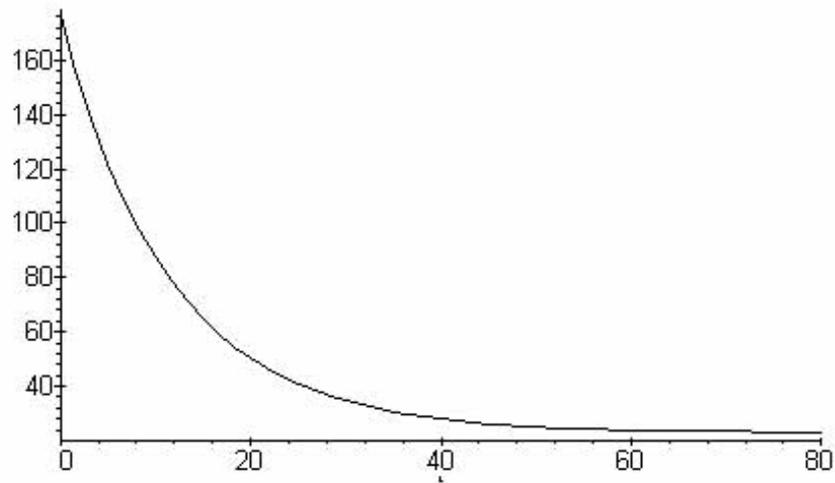


Figura 10: Enfriamiento de una torta recién horneada

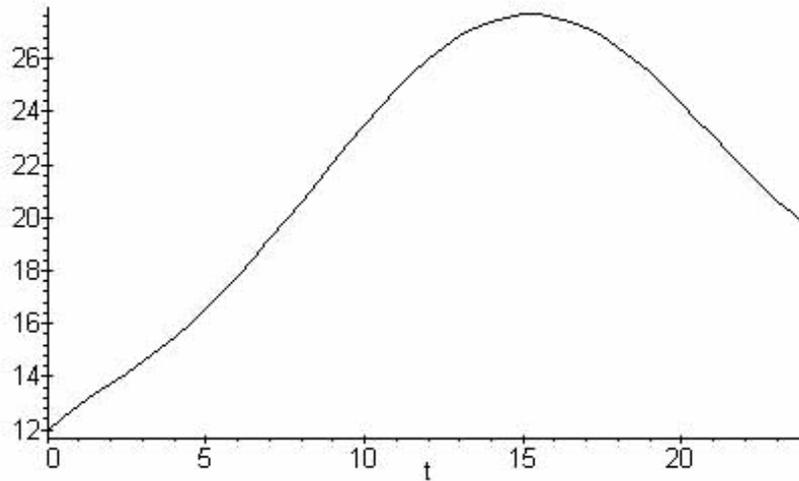


Figura 11: Variación de la Temperatura Construcciones

con la solución

$$T(t) = -\frac{-23\pi^2 + 11e^{-\frac{t}{4}}\pi^2 + 21\pi \sin\left(\frac{\pi t}{12}\right) + 63 \cos\left(\frac{\pi t}{12}\right) - 207 + 36e^{-\frac{t}{4}}}{9 + \pi^2}$$

y la siguiente evolución

#### 0.5.4. Interés Compuesto.

Otra de las aplicaciones de las ecuaciones diferenciales es en el cálculo del crecimiento del capital inicial, depositado en un banco  $C_0$  durante un cierto lapso de tiempo y sujeto a un determinada tasa de interés. Luego del lapso de tiempo, el nuevo capital será

$$C_1 = C_0 \left(1 + \frac{int}{100}\right)$$

Pasados dos lapsos (años) de tiempo el capital será

$$C_2 = C_1 \left(1 + \frac{int}{100}\right) = C_0 \left(1 + \frac{int}{100}\right) \left(1 + \frac{int}{100}\right)$$

en  $t$  lapsos de tiempo,

$$C(t) = C_0 \left(1 + \frac{int}{100}\right)^t$$

Ahora bien, si el pago de los intereses se hace varias veces durante ese lapso, entonces tendremos

$$C_2 = C_1 \left(1 + \frac{int}{100 \cdot 2}\right) = C_0 \left(1 + \frac{int}{100 \cdot 2}\right) \left(1 + \frac{int}{100 \cdot 2}\right).$$

Finalmente, si el interés se paga  $k$  veces en cada lapso, entonces

$$C(t) = C_0 \left( 1 + \frac{int}{100 \cdot k} \right)^{kt}. \quad (31)$$

Si  $k = 12$  entonces se tienen intereses pagaderos sobre saldos mensuales. En el caso de que  $k = 365$ , los intereses son pagaderos sobre saldos diarios. Nótese que si

$$k \rightarrow \infty \Rightarrow \left( 1 + \frac{int}{100 \cdot k} \right)^{kt} \rightarrow e^{\frac{int}{100} t};$$

entonces, podemos aproximar este modelo discreto de pagos sobre saldos por uno continuo, i.e.

$$C(t) = C_0 e^{\frac{int}{100} t} \Leftrightarrow C'(t) = \frac{int}{100} C(t).$$

Existen situaciones en las cuales los bancos, movidos por la competencia, ofrecen cancelar los intereses sobre un año hipotético de 360 días. En este caso, el capital crece como:

$$C(t) = C_0 \left( 1 + \frac{int}{100 \cdot 360} \right)^{365t}. \quad (32)$$

La siguiente tabla muestra una comparación del crecimiento del capital inicial  $C_0 = 1$ , en un lapso de 10 años, sujeto a intereses del 40% sobre saldos diarios y siguiendo los tres modelos antes mencionados.

Años	$C(t) = C_0 e^{\frac{int}{100} t}$	$C(t) = C_0 \left( 1 + \frac{int}{100 \cdot k} \right)^{kt}$	$C(t) = C_0 \left( 1 + \frac{int}{100 \cdot 360} \right)^{365t}$
0	1.0	1.0	1.0
1	1.491497997	1.491824698	1.499797972
2	2.224566275	2.225540928	2.249393957
3	3.317936142	3.320116923	3.373636494
4	4.948695110	4.953032424	5.059773172
5	7.380968843	7.389056099	7.588637542
6	11.00870024	11.02317638	11.38142320
7	16.41945436	16.44464677	17.06983543
8	24.48958329	24.53253020	25.60130455
9	36.52616442	36.59823444	38.39678465
10	54.47870107	54.59815003	57.58741975

### 0.5.5. Mecánica Elemental.

El estudio del movimiento de los cuerpos sometidos a la acción de un conjunto de fuerzas externas, fue una de las principales motivaciones para el planteamiento y solución de las ecuaciones diferenciales.

$$\sum_{externas} \overrightarrow{F(r(t), v(t), t)} = \frac{d \overrightarrow{mv(t)}}{dt} = m \overrightarrow{a(t)}, \quad (33)$$

para sistemas con  $m = cte$  (partículas) y con  $\overrightarrow{v(t)}$  la velocidad y  $\overrightarrow{r(t)}$  la posición.

$$\overrightarrow{v(t)} = \frac{d\overrightarrow{r(t)}}{dt}.$$

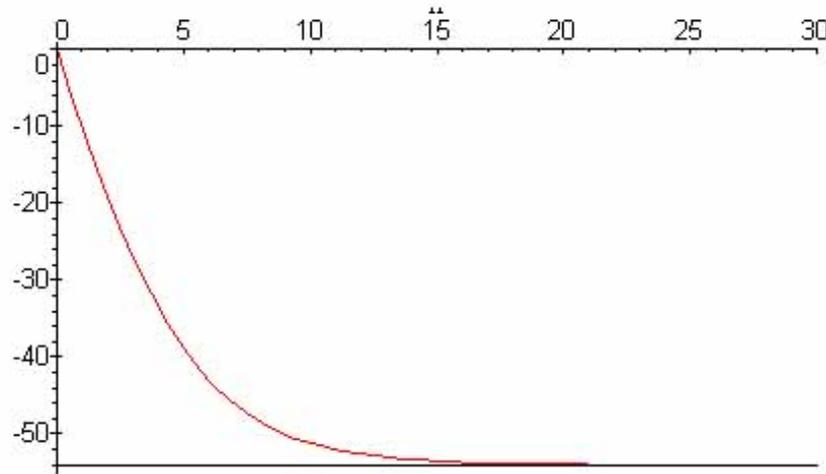


Figura 12: Velocidad del paracaidista en función del tiempo

### Movimientos con Aceleración Constante

Así en carreras de velocidad, en las cuales los autos tienen que generar el máximo posible de velocidad para una distancia dada tendremos, que la ecuación Newton 44 se expresa

$$cte = F = m \frac{dv(t)}{dt} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} v(t) = v_0 + \frac{F}{m}t \\ x(t) = x_0 + v_0t + \frac{1}{2}\frac{F}{m}t^2 \end{array} \right\}$$

Los valores típicos para este caso son  $v_0 = r_0 = 0$ ,  $a = \frac{F}{m} = 9,8 \text{ m/s}^2$ , y por lo tanto la velocidad final a los 400 m. es

$$v_f = \sqrt{2ax} \approx 89 \text{ m/s} = 320,4 \text{ Km/h}$$

### Fricción en Fluidos

Por su parte, la descripción del movimiento de un paracaidista la ecuación 44 se convierte en

$$\sum_{\text{externas}} F(v(t)) = -mg + cv^2 = \frac{d p(t)}{dt} = m \frac{d v(t)}{dt} = m a(t), \quad (34)$$

con  $c$  una constante arbitraria que depende de la forma del cuerpo. Integrando esta ecuación separable se obtiene

$$v(t) = -v_t \frac{1 - \exp\left(-\frac{2gt}{v_t}\right)}{1 + \exp\left(-\frac{2gt}{v_t}\right)} \quad (35)$$

Donde hemos definido la velocidad terminal

$$v_t = \sqrt{\frac{mg}{c}}$$

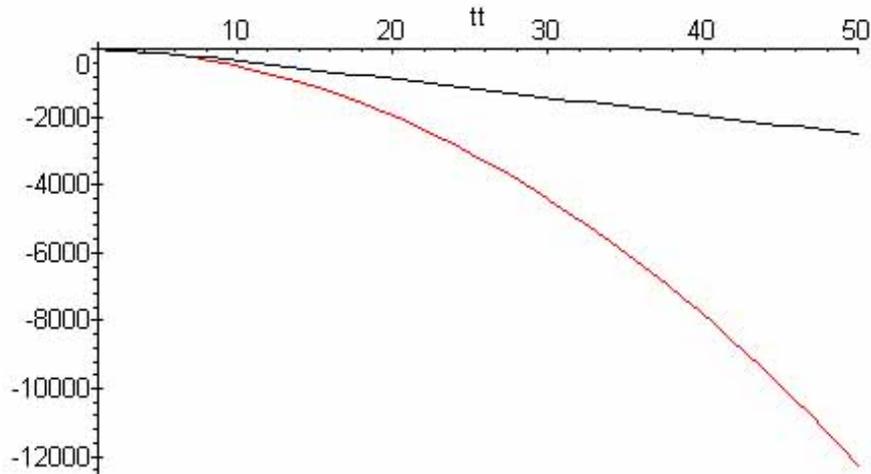


Figura 13: Posición del paracaidista respecto al tiempo

como la velocidad que anula la sumatoria de fuerzas y a partir de la cual el cuerpo cae sin aceleración. El tiempo que tarda en alcanzar esa velocidad es estrictamente para  $t \rightarrow \infty$ , sin embargo, una buena aproximación que surge de la ecuación 35, la constituye:  $t \gg v_t/2g$ . La velocidad terminal típica en un día soleado para un paracaidista de 70 Kg., en posición de “águila extendida”, es 54 m/s. (194,4 Km/h.) y por lo tanto alcanza la velocidad terminal luego de aproximadamente 15 s. esta situación se aprecia claramente en la figura 12.

Por su parte, la posición surge al integrar la ecuación 35

$$v(t) = \frac{dy(t)}{dt} = -v_t \frac{1 - \exp\left(-\frac{2gt}{v_t}\right)}{1 + \exp\left(-\frac{2gt}{v_t}\right)}$$

integrando esta ecuación obtendremos

$$y_0 - y(t) = v_t \left( t + \frac{v_t}{g} \ln \left( \frac{2}{\exp\left(-\frac{2gt}{v_t}\right) + 1} \right) \right) \quad (36)$$

Con el comportamiento gráfico que muestra la figura 13.

### Fuerzas Elásticas

Otra situación muy conocida se presenta bajo la acción de fuerzas elásticas. Así, la ecuación 44, ahora se expresa como

$$\sum_{externas} F(x(t)) = -kx(t) = m \frac{dv(t)}{dt} = m a(t),$$

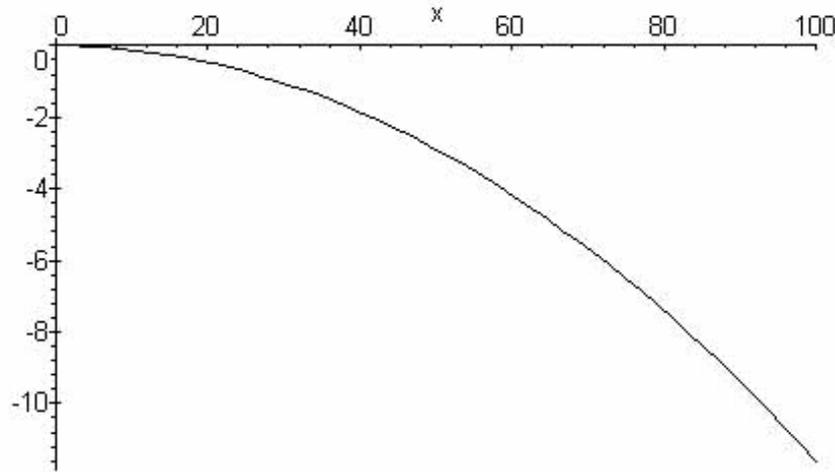


Figura 14: Trayectoria de la Flecha al abandonar el arco.

Utilizando la “regla de la cadena”

$$\frac{dv(t)}{dt} = \frac{dv(t)}{dx(t)} \frac{dx(t)}{dt} = v(t) \frac{dv(t)}{dx(t)}$$

Se convierte en separable y se integra para obtener la velocidad

$$m v(t)^2 = -k x(t)^2 + C_1 \Rightarrow v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \sqrt{\frac{-k x(t)^2 + C_0}{m}} \quad (37)$$

La posición será

$$x(t) = C_1 \operatorname{sen} \left( \sqrt{\frac{k}{m}} t + C_2 \right)$$

Para analizar el caso del lanzamiento de una flecha (23 g.) por una arco de 30 lb (134 N) el cual un arquero puede separarlo 0,72 m. se obtiene la velocidad de salida de la flecha como

$$v_f = d \sqrt{\frac{k}{m}} = 0,72 \sqrt{\frac{134}{23 \times 10^{-3}}} = 65 \text{ m/s}$$

Es interesante mencionar que en 100 m la flecha baja una distancia de  $\approx 11$  m. ¡!

### Sistemas de Masa Variable

Otro de los ejemplos interesantes es la evolución de sistemas de masa variable. El primero de los casos tiene que ver con una barca de masa  $m_0$  que tiene una velocidad inicial  $v_0$  en su navegar, comienza a llover y se va llenando de agua. El agua se acumula con una tasa  $\sigma$  (masa por unidad de tiempo). Se pide encontrar la velocidad de la barca como función del tiempo.

$$P = mv = \text{const} = m_0 v_0$$

si  $\frac{dm}{dt} = \sigma = \text{const} \Rightarrow m(t) = m_0 + \sigma t$  y consecuentemente

$$v(t) = v_0 \frac{m_0}{m_0 + \sigma t}$$

Un segundo caso tiene que ver con una masa  $M$  atada a una cadena de densidad lineal de masa  $\rho$ . Esta masa se impulsa hacia arriba con una velocidad inicial  $v_0$ . Se pide encontrar el tiempo en que alcanza la altura máxima. La ecuación de Newton para este caso se puede expresar como

$$-Peso_{Masa} - Peso_{cadena} = \frac{d(mv)}{dt} \quad \Leftrightarrow \quad -Mg - \rho xg = \frac{dm}{dt}v + \frac{dv}{dt}m$$

o equivalentemente

$$-g\rho\xi = \frac{dp}{dt} \quad \text{donde} \quad \begin{cases} \xi = \frac{M}{\rho} + x \\ y \\ p = mv = \rho\xi \frac{d\xi}{dt} \end{cases}$$

con lo cual

$$\begin{aligned} -g\rho\xi p &= p \frac{dp}{dt} \quad \Rightarrow \quad -g\rho\xi m d\xi = p dp \quad \Rightarrow \quad -g\rho\xi \rho\xi d\xi = p dp \\ -\int_{\frac{M}{\rho}}^{\xi} g\rho^2 \xi^2 d\xi &= \int_{m_0 v_0}^p p dp \quad \Rightarrow \quad g\rho^2 \left( \frac{\xi^3}{3} - \frac{\left(\frac{M}{\rho}\right)^3}{3} \right) = \frac{p^2}{2} - \frac{(m_0 v_0)^2}{2} \\ t - t_0 &= \int \frac{\rho\xi d\xi}{\sqrt{2g\rho^2 \left( \frac{\xi^3}{3} - \frac{\left(\frac{M}{\rho}\right)^3}{3} + \frac{(m_0 v_0)^2}{2} \right)}} \end{aligned}$$

### Un Cohete en Movimiento

Finalmente el caso más emblemático es el movimiento de un cohete que consume una fracción importante de su combustible. Llamemos  $v$  la velocidad de cohete para un instante de tiempo  $t$  y  $v'$  la velocidad de salida de los gases respecto a tierra. Para ese instante  $t$  la cantidad de movimiento del cohete es  $mv$  un instante  $dt$  más tarde la cantidad de movimiento será

$$p' = \underbrace{(m + dm)(v + dv)}_{\text{cohete}} + \underbrace{(-dm)v'}_{\text{gases}} = mv + m dv - dm \underbrace{(v' - v)}_{\text{vel. rel.}}$$

Entonces el cambio en la cantidad de movimiento será

$$dp = p' - p = m dv - v_{gases} dm$$

y por lo tanto la ecuación de Newton

$$m(t) \frac{dv(t)}{dt} - v_{gases} \frac{dm}{dt} = \sum_{\text{externas}} F$$

Despreciando la resistencia del aire y suponiendo la gravedad constante, tendremos

$$\frac{dv(t)}{dt} - \frac{v_{gases}}{m} \frac{dm}{dt} = -g$$

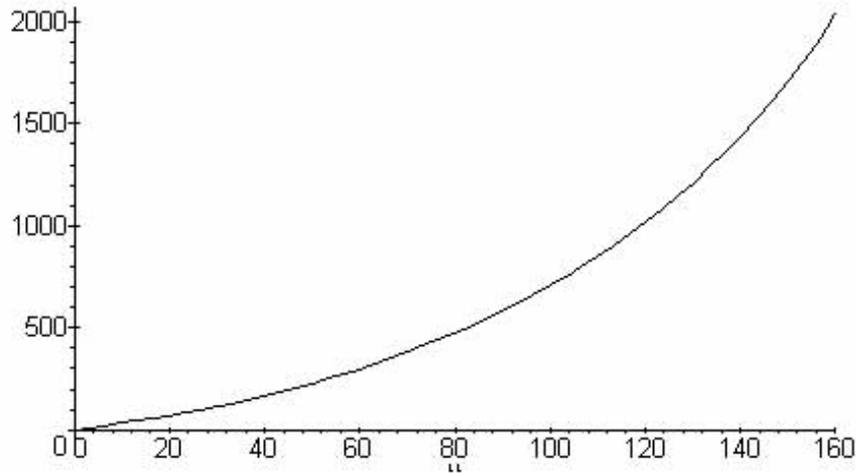


Figura 15: Velocidad del Cohete

integrando

$$v = v_0 + v_{gases} \ln \left( \frac{m_i}{m(t)} \right) - gt$$

si suponemos que el combustible se quema de la forma

$$m(t) = m_i(1 + \alpha t) \leftrightarrow \frac{dm}{dt} = \alpha = cte$$

La cantidad

$$E = v_{gases} \left| \frac{dm}{dt} \right|$$

se denomina el empuje del cohete.

### 0.5.6. Modelado de Concentración/Desliamiento de Soluciones

Otro de los problemas típicos donde se aplican exitosamente las ecuaciones diferenciales son los problemas de manejo de concentración de sustancias en soluciones líquidas. El principal objetivo, consiste en plantear el problema en términos del problema de valores iniciales que gobierna el fenómeno (ecuación diferencial + condiciones iniciales). Para ello, en este tipo de problemas, siempre utilizaremos la regla intuitiva de

$$\text{Tasa de Cambio de la Concentración} = \text{Tasa de Ingreso} - \text{Tasa de Egreso}$$

Así, tendremos que para un problema típico en el cual inicialmente se encuentran diluidos en un recipiente (un tanque)  $y_0$  gr de una sustancia en  $V_0$  litros de un líquido. A este tanque le cae otro líquido con una concentración distinta de la misma sustancia a  $v_{entrada}$  lit/min, mientras que  $v_{salida}$  lit/min salen del tanque. Si suponemos que dentro del tanque sucede algún proceso de homogenización de la solución, la pregunta típica es que queremos saber la cantidad de sustancia que se encuentra en el tanque en un tiempo  $t$ . A la

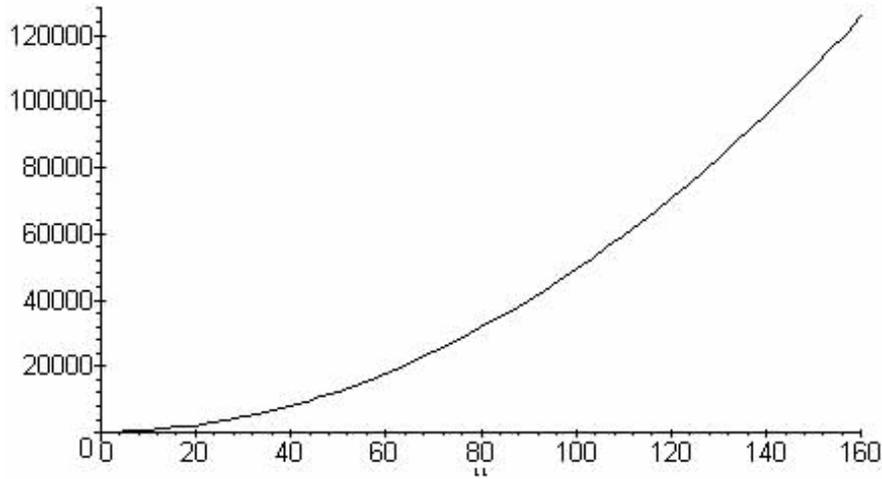


Figura 16: Posición del Cohete

concentración de la sustancia en el líquido de entrada (gr/lit), en un tiempo  $t$ , la denotaremos como  $C(t)$  gr/lit. La figura (17) ilustra este proceso.

Para empezar notemos que, en esta situación el volumen no es constante. Por lo tanto, con el mismo espíritu de la “ley de balanceo” que hemos propuesto, si las velocidades de ingreso y egreso son constantes, nos queda que la variación del volumen inicial viene dada por la diferencia de estas velocidades, esto es

$$V'(t) = v_{\text{entrada}} - v_{\text{salida}} \Rightarrow V(t) = V_0 + (v_{\text{entrada}} - v_{\text{salida}})t$$

con lo cual también hemos integrado una ecuación diferencial para encontrar como variar[ia el volumen con el tiempo.

Para la construcción de la ecuación diferencial, procedemos de manera similar y si describimos la cantidad de sustancia en el tanque como  $y(t)$ , nos queda que la tasa de cambio de la cantidad de sustancia en el tanque ser[ia

$$y'(t) = \underbrace{v_{\text{entrada}} \left( \frac{\text{lit}}{\text{mín}} \right) C(t) \left( \frac{\text{gr}}{\text{lit}} \right)}_{\text{Tasa de Ingreso}} - \underbrace{v_{\text{salida}} \left( \frac{\text{lit}}{\text{mín}} \right) \left( \frac{y(t)}{V_0 + (v_{\text{entrada}} - v_{\text{salida}})t} \right) \frac{\text{gr}}{\text{lit}}}_{\text{Tasa de Egreso}}$$

Por lo tanto la ecuación diferencial tomar[ia la forma típica de una ecuación diferencial lineal de primer orden inhomog[enea

$$y'(t) + y(t) \frac{v_{\text{sal}}}{V_0 + (v_{\text{ent}} - v_{\text{sal}})t} = v_{\text{ent}} C(t)$$

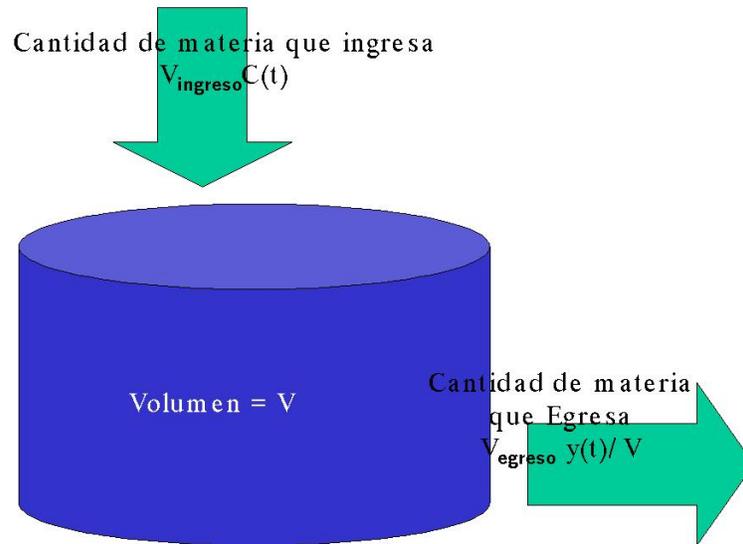


Figura 17: Soluciones y tanques

que tendr[ame]a por soluci[ame]on

$$y(t) = \underbrace{\frac{y_0}{(-V_0) - \left(\frac{v_{sal}}{v_{ent} - v_{sal}}\right)} \left( (-v_{ent} + v_{sal})t - V_0 \right) \left( \frac{-v_{sal}}{v_{ent} - v_{sal}} \right)}_{\text{Respuesta a las Condiciones iniciales}} - \underbrace{\left( (-v_{ent} + v_{sal})t - V_0 \right) \frac{v_{sal}}{-v_{ent} + v_{sal}} \int_0^t v_{ent} C(u) \left( u(v_{ent} - v_{sal}) + V_0 \right) \left( \frac{v_{sal}}{v_{ent} - v_{sal}} \right) du}_{\text{Respuesta a la Exitaci[ame]on externa}}$$

Notese lo gen[ame]rico de esta soluci[ame]on. Por un lado, la concentraci[ame]on de la sustancia,  $C(t)$ , en la soluci[ame]on que entra al sistema es distinta a la concentraci[ame]on de la sustancia presente en el tanque, m[ame]as a[ame]un, puede ser variable con el tiempo. Por otro lado esta soluci[ame]on presenta una singularidad (un infinito) cuando la velocidad de ingreso es igual a la velocidad de egreso. Para este caso en el cual el volumen del tanque permanece constante tendremos que resolver la ecuaci[ame]on diferencial

$$y'(t) + y(t) \frac{v_{sal}}{V_0} = v_{ent} C(t) \Rightarrow y(t) = \left( \int_0^t C(u) v_{entrada} e^{\left(\frac{v_{salida} u}{V}\right)} du + y_0 \right) e^{-\frac{v_{salida} t}{V}}$$

Tal y como hemos mencionado varias veces (y seguiremos mencionando) la soluci[ame]on general para una ecuaci[ame]on diferencial inhomog[ame]nea se compone de dos soluciones, la soluci[ame]on de la ecuaci[ame]on diferencial homg[ame]nea m[ame]as la soluci[ame]on de la inhomog[ame]nea.

$$y_{general}(x) = y_{homog[ame]nea}(x) + y_{inhomog[ame]nea}(x)$$

Este ejemplo nos permite constatar el sentido cada una de estas soluciones, vale decir

$$y(t) = \underbrace{y_0 e^{-\frac{v_{salida} t}{V}}}_{\text{Respuesta a las Condiciones Iniciales}} + \underbrace{e^{-\frac{v_{salida} t}{V}} \int_0^t C(u) v_{entrada} e^{\left(\frac{v_{salida} u}{V}\right)} du}_{\text{Respuesta a la Exitaci[on externa]}$$

En esta es una visi[on que debemos conservar, en general para todas las ecuaciones lineales inhomog[eneas independientes del orden de la ecuaci[on diferencial, as[i recordando, dada una ecuaci[on diferencial y su soluci[on tal que se cumple la condici[on inicial  $y(0) = y_0$  entonces siempre es posible

$$\frac{d}{dx}y(x) + p(x)y(x) = g(x) \Leftrightarrow y(x) = \underbrace{y_0 e^{\int_0^x -p(u)du}}_{\text{soluci[on homog[enea}} + \underbrace{e^{\int_0^x -p(u)du} \int_0^x g(u) e^{\int p(u)du} du}_{\text{Soluci[on inhomog[enea}}$$

donde ahora vemos claramente que la soluci[on de la homog[enea da cuenta a las condiciones iniciales del proceso y la soluci[on de la inhomog[enea provee la respuesta a la exitaci[on externa al sistema.

Este comportamiento de las soluciones es [util si nos planteamos que al tratar de “limpiar” una piscina, a la cual le hemos a[adido el doble de la cantidad de sulfatos permitida, y queremos saber cuanto tiempo tenemos que mantener abierta una entrada de 120 lits/min de agua sin sulfatos y la salida de la piscina que responde a 60 lits/min. La piscina en cuesti[on tiene 20 m de longitud, 10 m de ancho y 2 m de profundidad. Siguiendo los pasos anteriormente planteados, tendremos que

$$y'(t) + y(t) \left( \frac{v_{sal}}{V_0 + (v_{ent} - v_{sal})t} \right) = 0 \Rightarrow y'(t) + y(t) \left( \frac{60 \left( \frac{\text{lit}}{\text{m[in}} \right)}{4 \times 10^5 \text{lit} + (120 - 60)t \left( \frac{\text{lit}}{\text{m[in}} \right)} \right) = 0$$

$$y'(t) + y(t) \left( \frac{60 \left( \frac{\text{lit}}{\text{m[in}} \right)}{4 \times 10^5 \text{lit} + 60 \left( \frac{\text{lit}}{\text{m[in}} \right) t} \right) = 0 \Rightarrow y(t) = 20000 \frac{y_0}{3t + 20000}$$

donde el volumen es  $V = 400m^3 = 400(100cm)^3 = 4 \times 10^8 cm^3 = 4 \times 10^8 (10^{-3}lit) = 4 \times 10^5 lit$ .

Con lo cual el tiempo para que la cantidad final decaiga a la mitad de la inicial surge de

$$y_0 = 20000 \frac{2y_0}{3t + 20000} \Rightarrow t \approx 6,666,66 \text{ minutos}!!!!$$

## 0.6. Definiciones para comenzar

### Definici[on

La ecuaci[on diferencial

$$a_0(x)y(x) + a_1(x)y'(x) + \dots + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + a_n(x)y^{(n)}(x) = \mathcal{F}(x) \Leftrightarrow \sum_{i=0}^n a_i(x)y^{(i)}(x) = \mathcal{F}(x)$$

es lineal de orden  $n$ . Obviamente,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(x) = 0 &\implies \text{Homog[enea} \\ \mathcal{F}(x) \neq 0 &\implies \text{InHomog[enea} \\ a_i(x) = a_i &= \text{ctes} \end{aligned}$$

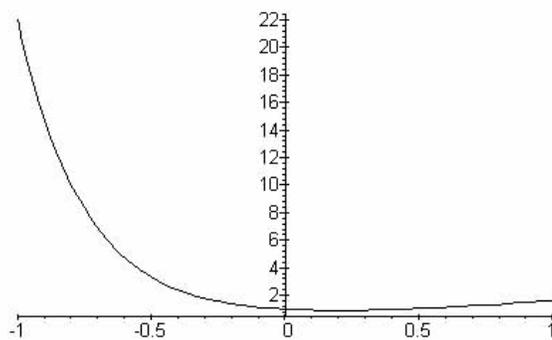


Figura 18:  $y(x) = \frac{2}{5}e^{-4x} + \frac{3}{5}e^x$

### Definición

Si los coeficientes  $a_i = \text{ctes}$  entonces la ecuación diferencial lineal y homogénea, de orden  $n$ , tiene asociada un polinomio característico de la forma

$$a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \dots + a_2 r^2 + a_1 r + a_0 = 0$$

Las raíces de este polinomio indicarán la forma de la solución.

### Definición

Si el polinomio característico puede factorizarse

$$(r - m_1)^{k_1} (r - m_2)^{k_2} (r - m_3)^{k_3} \dots (r - m_l)^{k_l} = 0$$

entonces diremos que las raíces  $m_{k_1}, m_{k_2}, m_{k_3}, \dots, m_{k_l}$  tienen multiplicidades  $k_1, k_2, k_3, \dots, k_l$ , respectivamente.

## 0.7. Homogéneas, Lineales, de Segundo Orden

La ecuación

$$a y'' + b y' + c y = 0 \Leftrightarrow a r^2 + b r + c = 0$$

tiene asociada ese polinomio característico y sus raíces  $m_1$  y  $m_2$  condicionan la solución de la manera siguiente

1. Si  $m_1 \neq m_2$  y  $m_1$  y  $m_2$  son reales, entonces la solución es

$$y = C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x}$$

2. Si  $m_1 = m_2$  y  $m_1$  y  $m_2$  son reales, entonces la solución es

$$y = C_1 e^{m_1 x} + C_2 x e^{m_1 x}$$

3. Si  $m_1 = \alpha + i\beta$  con  $\beta \neq 0$  y  $m_2 = \bar{m}_1 = \alpha - i\beta$ , entonces la solución es

$$y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \text{sen } \beta x)$$

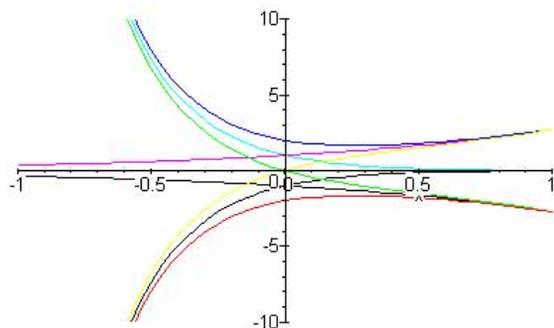


Figura 19:  $y(x) = C_1e^{-4x} + C_2e^x$  para  $C_1 = \{-1, 0, 1\}$  y  $C_2 = \{-1, 0, 1\}$

### Ejemplos

La ecuación

$$y'' + 3y' - 4y = 0; \quad y(0) = 1 \quad \wedge \quad y'(0) = -1 \quad \Leftrightarrow \quad r^2 + 3r - 4 = (r + 4)(r - 1) = 0$$

tiene asociado ese polinomio característico y por lo tanto tiene como solución general

$$y(x) = C_1e^{-4x} + C_2e^x \quad \text{y como solución particular} \quad y(x) = \frac{2}{5}e^{-4x} + \frac{3}{5}e^x$$

En la figura 18 se encuentra graficada esa solución particular. De igual modo, para distintos valores de  $C_1 = \{-1, 0, 1\}$  y  $C_2 = \{-1, 0, 1\}$  tendremos las gráficas representadas en la figura 19 ¿Cuáles son las condiciones iniciales a las cuales corresponden esos valores de las constantes?

Otra ecuación podría ser

$$y'' + 2y' + y = 0; \quad y(0) = 1 \quad \wedge \quad y'(0) = -1 \quad \Leftrightarrow \quad r^2 + 2r + 1 = (r + 1)^2 = 0$$

y por lo tanto tiene como solución general

$$y(x) = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x} \quad \text{y como solución particular} \quad y(x) = e^{-x}$$

La gráfica para esta solución está representada en la figura 20

Para distintos valores de  $C_1 = \{-1, 0, 1\}$  y  $C_2 = \{-1, 0, 1\}$  tendremos las gráficas representadas en la figura 21. Cabe seguir preguntando ¿Cuáles son las condiciones iniciales a las cuales corresponden esos valores de las constantes?

Finalmente, la ecuación

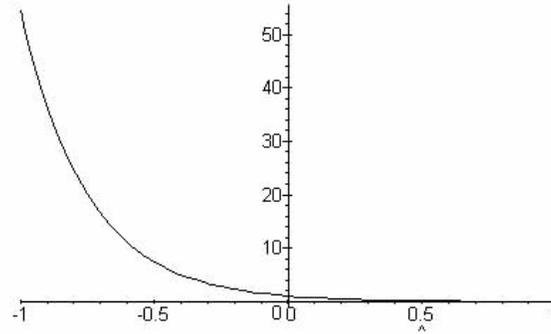
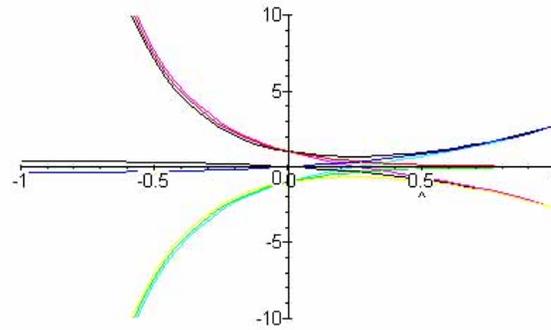
$$y'' + 4y' + 20y = 0; \quad y(0) = 3 \quad \wedge \quad y'(0) = -1 \quad \Leftrightarrow \quad r^2 + 4r + 20 = (r + 2)^2 + 16 = 0$$

con las siguientes soluciones  $r = -2 \pm 4i$  y por lo tanto tiene como solución general

$$y(x) = e^{-2x} (C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x) \quad \text{y como solución particular} \quad y(x) = e^{-2x} \left( 3 \cos 4x + \frac{5}{4} \sin 4x \right)$$

y su representación gráfica se encuentra en la figura 22 y para distintos valores de las constantes

Al igual que en los casos anteriores, para distintos valores de las constantes de integración, tendremos las gráficas de la figura 23

Figura 20:  $y(x) = e^{-x}$ Figura 21:  $y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}$  para  $C_1 = \{-1, 0, 1\}$  y  $C_2 = \{-1, 0, 1\}$ 

## 0.8. Ecuaciones Diferenciales de Orden $n$

La ecuación

$$a_0 y(x) + a_1 y'(x) + \cdots + a_{n-1} y^{(n-1)}(x) + a_n y^{(n)}(x) = 0$$

con  $a_i = \text{ctes}$  tiene asociada un polinomio característico de la forma

$$a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \cdots + a_2 r^2 + a_1 r + a_0 = 0$$

el cual condicionará la solución de la siguiente forma

1. Si  $m$  es una raíz real con multiplicidad  $k \geq 2$  entonces las  $k$  soluciones asociadas con  $m$  serán de la forma

$$e^{mx}, x e^{mx}, x^2 e^{mx}, x^3 e^{mx}, \dots, x^{k-1} e^{mx}$$

2. Si  $m$  y  $\bar{m}$  son parejas de soluciones complejas,  $\alpha \pm i\beta$ , del polinomio característico y tienen multiplicidad  $k$ , entonces las soluciones correspondientes serán

$$e^{\alpha x} \cos \beta x; e^{\alpha x} \sin \beta x; \dots, x^{k-1} e^{\alpha x} \cos \beta x; x^{k-1} e^{\alpha x} \sin \beta x$$

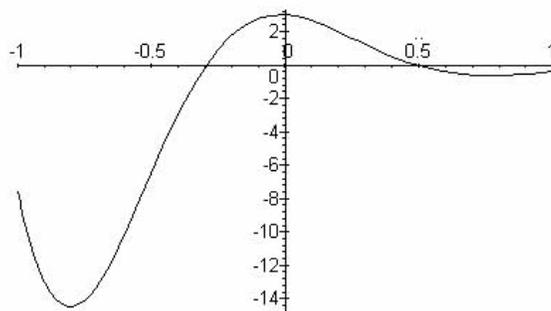


Figura 22:  $y(x) = e^{-2x} \left( 3 \cos 4x + \frac{5}{4} \text{sen} 4x \right)$

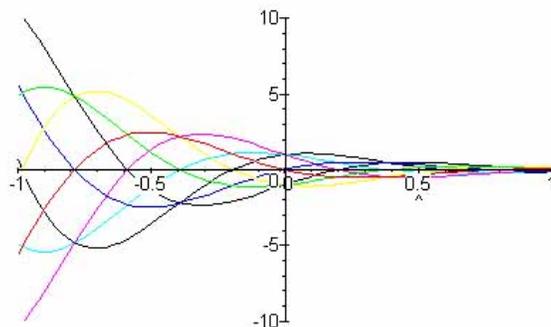


Figura 23:  $y(x) = e^{-2x} (C_1 \cos 4x + C_2 \text{sen} 4x)$  para  $C_1 = \{-1, 0, 1\}$  y  $C_2 = \{-1, 0, 1\}$

### Ejemplos

■ La ecuación

$$24y''' + 2y'' - 5y' - y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 24r^3 + 2r^2 - 5r - 1 = (3r + 1)(2r - 1)(4r + 1) = 0$$

consecuentemente con las raíces

$$m_1 = -\frac{1}{3}, \quad m_2 = \frac{1}{2}, \quad m_3 = -\frac{1}{4},$$

y con la solución de la forma

$$y(x) = C_1 e^{-x/3} + C_2 e^{x/2} + C_3 e^{-x/4}$$

■ La ecuación

$$y''' + 3y'' + 3y' + y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r^3 + 3r^2 + 3r + 1 = (r + 1)^3 = 0$$

con las raíces  $m = -1$  con multiplicidad  $k = 3$  y con una solución de la forma

$$y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + C_3 x^2 e^{-x}$$

- La ecuación

$$4y^{(4)} + 12y''' + 49y'' + 42y' + 10y = 0 \Leftrightarrow 4r^4 + 12r^3 + 49r^2 + 42r + 10 = (r^2 + 2r + 10)(2r + 1)^2 = 0$$

consecuentemente con las raíces

$$m_1 = -1 + 3i, \quad m_2 = -1 - 3i, \quad m_3 = -\frac{1}{2}, \text{ con multiplicidad } 2$$

Entonces la solución es de la forma

$$y(x) = e^{-x}(C_1 \cos 3x + C_2 \operatorname{sen} 3x) + C_3 e^{-x/2} + C_4 x e^{-x/2}$$

- La ecuación

$$y^{(4)} + 4y''' + 24y'' + 40y' + 100y = 0 \Leftrightarrow r^4 + 4r^3 + 24r^2 + 40r + 100 = (r^2 + 2r + 10)^2 = 0$$

con las raíces

$$m_1 = -1 + 3i, \quad m_2 = -1 - 3i, \quad \text{con multiplicidad } 2.$$

Entonces la solución es de la forma

$$y(x) = e^{-x}(C_1 \cos 3x + C_2 \operatorname{sen} 3x + C_3 x \cos 3x + C_4 x \operatorname{sen} 3x)$$

- La ecuación

$$4y''' + 33y' - 37y = 0;$$

con

$$y(0) = 0; \quad y'(0) = -1; \quad y''(0) = 3 \Leftrightarrow 4r^3 + 33r - 37 = (r - 1)(4r^2 + 4r + 37) = 0$$

consecuentemente con una solución general de la forma

$$y(x) = C_1 e^x + e^{-x/2}(C_2 \cos 3x + C_3 \operatorname{sen} 3x)$$

y con la solución particular

$$y(x) = \frac{8}{45} e^x - e^{-x/2} \left( \frac{8}{45} \cos 3x + \frac{19}{45} \operatorname{sen} 3x \right)$$

## 0.9. Algunos Métodos de Solución para Ecuaciones Inhomog'eneas

### 0.9.1. El Wronskiano

**Definición:** Independencia y Dependencia Lineal.

Sean  $n$  funciones  $f_1(x), f_2(x), f_3(x), f_4(x), \dots, f_n(x)$ , cuando menos  $n - 1$  veces diferenciables. Entonces, el conjunto  $S = \{f_1(x), f_2(x), f_3(x), f_4(x), \dots, f_n(x)\}$ , se dice linealmente dependiente en el intervalo  $I$ , si existen algunas constantes,  $c_1, c_2, c_3, c_4, \dots, c_n$  distintas de cero tal que

$$\sum_{i=1}^n c_i f_i(x) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \dots + c_n f_n(x) = 0$$

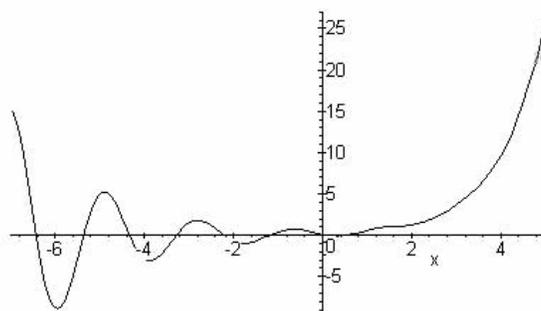


Figura 24:  $y(x) = \frac{8}{45}e^x - e^{-x/2}\left(\frac{8}{45}\cos 3x + \frac{19}{45}\text{sen}3x\right)$

Por el contrario, si no existe ninguna constante  $c_i \neq 0$ , se dirá que  $S$  es linealmente dependiente.

**Definición:** Wronskiano

El conjunto  $S = \{f_1(x), f_2(x), f_3(x), f_4(x), \dots, f_n(x)\}$  de funciones, cuando menos  $n-1$  veces diferenciables, conforman el Wronskiano,

$$W(S) = W(f_1(x), f_2(x), f_3(x), f_4(x), \dots, f_n(x))$$

a través del siguiente determinante

$$W(S) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

Si  $W(S) \neq 0$  al menos en un punto dentro del intervalo  $I$ , entonces  $S$  es linealmente independiente

**Definición:** Conjunto Fundamental de Soluciones.

El conjunto  $S = \{f_1(x), f_2(x), f_3(x), f_4(x), \dots, f_n(x)\}$  de  $n$  soluciones no triviales a la ecuación diferencial:

$$a_0(x) y(x) + a_1(x) y'(x) + \cdots + a_n(x) y^{(n)}(x) = 0, \quad (38)$$

Se le denomina conjunto fundamental de soluciones. La combinación lineal

$$f(x) = \sum_{i=1}^n c_i f_i(x) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \cdots + c_n f_n(x)$$

también es solución de la ecuación diferencial (38) y se denomina como solución general de (38). Adicionalmente, si los coeficientes  $a_i(x)$  son continuos en el intervalo abierto  $I$  para todo  $i = 1, 2, \dots, n$ , entonces la ecuación diferencial (38) tiene un conjunto fundamental de  $n$  soluciones linealmente independientes.

**Definición:** Soluciones Particulares y Generales.

Dada una ecuación diferencial lineal Inhomogénea

$$a_0(x) y(x) + a_1(x) y'(x) + \cdots + a_n(x) y^{(n)}(x) = \mathcal{F}(x) \quad (39)$$

Si  $y_p(x)$  es solución de (39) sin constantes arbitrarias, entonces  $y_p(x)$  se denomina solución particular de (39). De igual modo, se denominará solución general de (39) a la suma de la solución,  $y_h(x)$ , de la ecuación homogénea (38) más la solución particular:

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

### 0.9.2. Métodos de los Coeficientes Indeterminados

Dada la ecuación diferencial

$$a_0 y(x) + a_1 y'(x) + \cdots + a_n y^{(n)}(x) = \mathcal{F}(x) \quad (40)$$

con  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$  coeficientes constantes, el método de los coeficientes indeterminados se puede esquematizar de la siguiente manera

1. Resuelva la ecuación diferencial homogénea

$$a_0 y(x) + a_1 y'(x) + \cdots + a_n y^{(n)}(x) = 0 \quad (41)$$

y obtenga  $y_h(x)$ .

2. Proponga la forma de la solución particular para la ecuación inhomogénea (40) siguiendo el siguiente procedimiento. Dada  $F(x) = b_0 g_0(x) + b_1 g_1(x) + \cdots + b_n g_n(x)$ , con los  $b_i$  coeficientes constantes, entonces

- a) Si  $F(x) = P(x)$ , un polinomio, es decir  $g_i(x) = x^m$  entonces proponga como solución particular a

$$y_p(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \cdots + A_m x^m$$

- b) Si  $g_i(x) = x^m e^{kx}$  entonces proponga como conjunto fundamental de soluciones particulares a

$$y_p(x) = e^{kx} (A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \cdots + A_m x^m)$$

- c) Si  $g_i(x) = x^m e^{kx} \cos \beta x$  o  $g_i(x) = x^m e^{kx} \sin \beta x$ , entonces proponga como conjunto fundamental de soluciones particulares a

$$y_p(x) = \begin{aligned} &e^{kx} (A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \cdots + A_m x^m) \cos \beta x + \\ &e^{kx} (\tilde{A}_0 + \tilde{A}_1 x + \tilde{A}_2 x^2 + \tilde{A}_3 x^3 + \cdots + \tilde{A}_m x^m) \sin \beta x \end{aligned}$$

3. Determine el valor de los coeficientes  $A_i$  al sustituir la solución propuesta  $y_p(x)$  en (40)
4. Construya la solución general  $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$

Ejemplos

$$y'' + 4y' + 4y = 4x^2 + 6e^x$$

Tiene como solución de la homogénea

$$y_h = (C_1 + C_2 x) e^{-2x}$$

y proponemos como solución particular de la ecuación a

$$y_p = (Ax^2 + Bx + C) + De^x$$

sustituimos su expresión en la ecuación y obtenemos

$$\begin{aligned} & 2A + De^x + \\ & 4(2Ax + B + De^x) + \\ & 4((Ax^2 + Bx + C) + De^x) + \\ & = 4x^2 + 6e^x \end{aligned}$$

de donde surge el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 4A &= 4 \\ 8A + 4B &= 0 \\ 2A + 4B + 4C &= 0 \\ 9D &= 6 \end{aligned}$$

y de allí el valor de los coeficientes

$$A = 1; \quad B = -2; \quad C = \frac{3}{2}; \quad D = \frac{2}{3}$$

y con ellos la solución general

$$y = (C_1 + C_2x)e^{-2x} + x^2 - 2x + \frac{3}{2} + \frac{2}{3}e^x$$

Ejercicios

1. La ecuación

$$y'' - 3y' + 2y = 2x e^{3x} + 3\text{sen}x$$

tiene como solución

$$y = C_1e^x + C_2e^{2x} + x e^{3x} - \frac{3}{2}e^{3x} + \frac{3}{10}\text{sen}x + \frac{9}{10}\text{cos}x$$

2. La ecuación

$$y'' - 3y' + 2y = 2x^2 + 3e^{2x}$$

tiene como solución

$$y = C_1e^x + C_2e^{2x} + \frac{7}{2} + 3x + x^2 + 3xe^{2x}$$

### 0.9.3. Métodos de Variación de los Parámetros

Dada la ecuación diferencial

$$a_0y(x) + a_1 y'(x) + \cdots + a_n y^{(n)}(x) = \mathcal{F}(x) \quad (42)$$

El método de variación de los parámetros se puede esquematizar de la siguiente manera

1. Resuelva la ecuación diferencial homogénea

$$a_0 y(x) + a_1 y'(x) + \cdots + a_n y^{(n)}(x) = 0 \quad (43)$$

y obtenga  $y_h(x)$ .

2. Proponga como solución particular

$$y_p = u_1(x) y_{h1} + u_2(x) y_{h2}$$

donde las funciones  $u_1(x)$  y  $u_2(x)$  son funciones a determinar en el método y las  $y_1$  y  $y_2$  son las soluciones a la ecuación homogénea (43).

3. Sustituya esta solución propuesta en la ecuación (42) para obtener, luego de algún nivel de álgebra elemental

$$\begin{aligned} & u_1(x) \overbrace{(a_0 y_1 + a_1 y_1' + a_2 y_1'')}_{=0} + \\ & u_2(x) \overbrace{(a_0 y_2 + a_1 y_2' + a_2 y_2'')}_{=0} + \\ & a_2 (u_1' y_1 + u_2' y_2)' + a_1 (u_1' y_1 + u_2' y_2) \\ & a_2 (u_1' y_1' + u_2' y_2') = \mathcal{F}(x) \end{aligned}$$

de donde surge el siguiente sistema de ecuaciones algebraico

$$\begin{aligned} u_1' y_1 + u_2' y_2 &= 0 \\ a_2 (u_1' y_1' + u_2' y_2') &= \mathcal{F}(x) \end{aligned}$$

con sus soluciones de la forma

$$\begin{aligned} u_1' &= \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ \frac{\mathcal{F}(x)}{a_2} & y_2' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ \frac{\mathcal{F}(x)}{a_2} & y_2' \end{vmatrix}}{W(y_1, y_2)} = \mathcal{G}_1(x) \\ u_2' &= \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & \frac{\mathcal{F}(x)}{a_2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & \frac{\mathcal{F}(x)}{a_2(x)} \end{vmatrix}}{W(y_1, y_2)} = \mathcal{G}_2(x) \end{aligned}$$

e integrando se obtienen los coeficientes respectivos,

$$u_1(x) = \int \mathcal{G}_1(x) dx; \quad u_2(x) = \int \mathcal{G}_2(x) dx$$

para finalmente obtener la solución general

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + u_1(x) y_1 + u_2(x) y_2$$

nótese que no incorporamos las constantes de integración en la funciones  $u_1(x)$  y  $u_2(x)$ .

Ejemplo:

La ecuación inhomogénea de Cauchy<sup>4</sup>-Euler<sup>5</sup>

$$a_0 y(x) + a_1 x y'(x) + \cdots + a_n x^n y^{(n)}(x) = \mathcal{F}(x)$$

<sup>4</sup>**Louis Augustin Baron de Cauchy** (1789-1857). Matemático francés, uno de los creadores del análisis matemático moderno. Estudió, entre otras cuestiones, los criterios de convergencia de series, las funciones de variable compleja y los sistemas de ecuaciones diferenciales

<sup>5</sup>**Leonhard Euler** (1707-1783). Matemático suizo. Destacó en el estudio de diversas cuestiones del cálculo logarítmico y diferencial, así como de las series algebraicas y la trigonometría.

con los  $a_i = \text{ctes}$ , puede ser resuelta por este método. Consideremos una ecuación de orden 2

$$c y(x) + b x y'(x) + a x^2 y''(x) = \mathcal{F}(x)$$

La solución de la homogénea se propone como  $y_h = x^m$  por lo tanto

$$\begin{aligned} c y(x) + b x y'(x) + a x^2 y''(x) &= 0 \\ c x^m + b x m x^{m-1} + a x^2 m(m-1)x^{m-2} &= 0 \\ x^m (c + bm + am(m-1)) &= 0 \end{aligned}$$

por lo tanto

$$am^2 + (b-a)m + c = 0$$

con

$$m = \frac{-(b-a) \pm \sqrt{(b-a)^2 - 4ac}}{2a}$$

por lo tanto

1. Si  $m_1 \neq m_2$  y ambas reales, entonces la solución de la homogénea será

$$y_h = C_1 x^{m_1} + C_2 x^{m_2}$$

2. Si  $m_1 = m_2$  y ambas reales, entonces la solución de la homogénea será

$$y_h = x^{m_1} (C_1 + C_2 \ln x)$$

3. Si  $m_1 = \bar{m}_2 = \alpha + i\beta$ , entonces la solución de la homogénea será

$$y_h = x^\alpha (C_1 \cos(\beta \ln x) + C_2 \operatorname{sen}(\beta \ln x))$$

Ahora para lograr la solución de la inhomogénea suponemos el caso  $m_1 \neq m_2$  por lo tanto

$$y_{1h} = x^{m_1} \quad y_{2h} = x^{m_2}$$

$$\begin{aligned} u'_1 &= \frac{\begin{vmatrix} 0 & x^{m_2} \\ \frac{\mathcal{F}(x)}{a x^2} & m_2 x^{m_2-1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x^{m_1} & x^{m_2} \\ m_1 x^{m_1-1} & m_2 x^{m_2-1} \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & x^{m_2} \\ \frac{\mathcal{F}(x)}{a x^2} & m_2 x^{m_2-1} \end{vmatrix}}{W(y_1, y_2)} = \mathcal{G}_1(x) \\ u'_2 &= \frac{\begin{vmatrix} x^{m_1} & 0 \\ m_1 x^{m_1-1} & \frac{\mathcal{F}(x)}{a x^2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x^{m_1} & x^{m_2} \\ m_1 x^{m_1-1} & m_2 x^{m_2-1} \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} x^{m_1} & 0 \\ m_1 x^{m_1-1} & \frac{\mathcal{F}(x)}{a x^2} \end{vmatrix}}{W(y_1, y_2)} = \mathcal{G}_2(x) \end{aligned}$$

La siguiente ecuación diferencial

$$x^2 y'' - xy' + 5y = \frac{1}{x}$$

tiene como solución de la homogénea

$$y_h = x (C_1 \cos(2 \ln x) + C_2 \operatorname{sen}(2 \ln x))$$

la solución particular por el método de variación de los parámetros queda como

$$y_p = u_1(x) y_{h1} + u_2(x) y_{h2}$$

calculando los coeficientes respectivos en donde el Wronskiano

$$W(x \cos(2 \ln x); x \operatorname{sen}(2 \ln x)) = 2x$$

por lo cual los coeficientes quedan

$$u_1 = \int \mathcal{G}_1(x) dx = \int \frac{x \operatorname{sen}(2 \ln x) \frac{1}{x}}{2x} dx = \frac{1}{4} \cos(2 \ln x)$$

$$u_2 = \int \mathcal{G}_2(x) dx = \int \frac{x \cos(2 \ln x) \frac{1}{x}}{2x} dx = \frac{1}{4} \operatorname{sen}(2 \ln x)$$

finalmente la solución particular será

$$y_p = x \left( \frac{1}{4} \cos^2(2 \ln x) + \frac{1}{4} \operatorname{sen}^2(2 \ln x) \right) = \frac{1}{4} x$$

y la general

$$y = x (C_1 \cos(2 \ln x) + C_2 \operatorname{sen}(2 \ln x)) + \frac{1}{4} x$$

#### 0.9.4. Métodos de Reducción de Orden

Este método supone, por lo tanto

$$a_0(x) y(x) + a_1(x) y'(x) + a_2(x) y''(x) = \mathcal{F}(x)$$

tendrá como primer solución no trivial para la ecuación homogénea,  $y_{h1}(x)$ , entonces la segunda solución vendrá dada por

$$y_{h2}(x) = y_{h1}(x) \int u(x) dx$$

donde  $u(x)$  es la función incógnita a determinar. Sustituyendo esta expresión en la ecuación homogénea se obtiene

$$\overbrace{(a_0(x) y_1(x) + a_1(x) y_1'(x) + a_2(x) y_1''(x))}^{=0} \int u(x) dx + a_2(x) y_1(x) u'(x) + (2a_2(x) y_1'(x) + a_1(x) y_1(x)) u(x) = 0$$

resolviendo la ecuación diferencial para  $u(x)$  tendremos que:

$$u(x) = \frac{e^{-\int \frac{a_1}{a_2} dx}}{y_1^2}$$

La ecuación

$$(x-1)y''' + 2y'' = \frac{x+1}{2x^2}$$

tiene como solución  $y_1 = C_1 x + C_2$  y como solución general

$$y = C_1 x + C_2 + C_3 \ln|x-1| + \frac{1}{2} x \ln|x|$$

## 0.10. Algunas Aplicaciones de las Ecuaciones de Orden Superior

### 0.10.1. Mecánica y Electricidad

Una de las más famosas ecuaciones diferenciales, lineales, ordinaria con coeficientes constantes es

$$\alpha \ddot{u} + \beta \dot{u} + \gamma u \equiv \alpha \frac{d^2 u}{dt^2} + \beta \frac{du}{dt} + \gamma u = \Lambda(t)$$

La cual utiliza para describir sistemas mecánicos y toma la forma

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + \eta \frac{dx}{dt} + k x = F(t) \quad \text{donde} \quad \begin{cases} x & \Rightarrow \text{Desplazamiento} \\ \frac{dx}{dt} & \Rightarrow \text{Velocidad} \\ m & \Rightarrow \text{masa} \\ \eta & \Rightarrow \text{Constante de Amortiguamiento} \\ k & \Rightarrow \text{Constante Elástica} \\ F(t) & \Rightarrow \text{Fuerza Aplicada} \end{cases}$$

y circuitos eléctricos

$$L \frac{d^2 Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C} Q = E(t) \quad \text{donde} \quad \begin{cases} Q & \Rightarrow \text{Carga Eléctrica} \\ \frac{dQ}{dt} = I & \Rightarrow \text{Intensidad de Corriente} \\ L & \Rightarrow \text{Inductancia} \\ R & \Rightarrow \text{Resistencia} \\ C & \Rightarrow \text{Capacitancia} \\ E(t) & \Rightarrow \text{Fuerza Electromotriz} \end{cases}$$

Analicemos la ecuación que describe sistemas mecánicos y dejamos la cual describe sistemas eléctricos para un análisis posterior. El primero de los casos a analizar será el de las oscilaciones libres, vale decir  $F(t) = 0$ , lo cual en el lenguaje de las ecuaciones diferenciales se traduce a ecuaciones diferenciales homogéneas. En contraste, si  $F(t) \neq 0$ , es decir, el caso inhomogéneo, estaremos describiendo oscilaciones forzadas.

### 0.10.2. Oscilaciones libres

Analicemos pues del caso del oscilador armónico libre, i.e.

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + k x = 0 \quad \Rightarrow \quad x(t) = C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t) \quad \text{con} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$\omega_0$  se denomina la frecuencia natural de oscilación y  $C_1$  y  $C_2$  las constantes de integración que se determinan de las condiciones iniciales. Es claro que

$$\text{si} \quad \begin{cases} C_1 = A \cos \delta \\ C_2 = A \sin \delta \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x(t) = C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t) \quad \Leftrightarrow \quad x(t) = A \cos(\omega_0 t + \delta)$$

con  $R$  la amplitud y  $\delta$  en ángulo de fase. Obviamente, el período del movimiento será

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

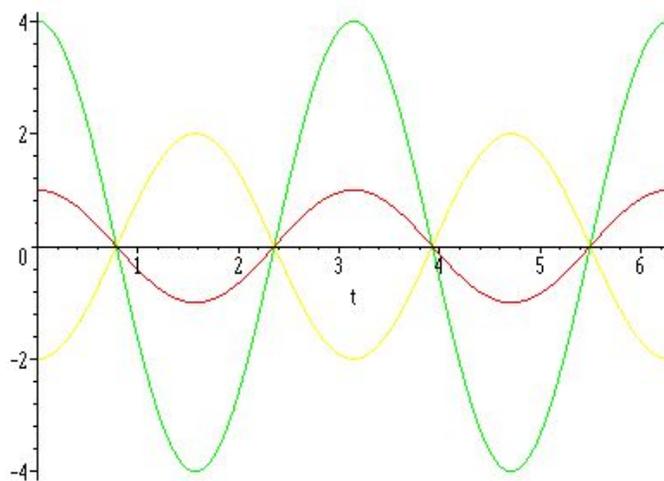


Figura 25: Oscilador armónico libre. Cambios en la posición inicial no afectan la frecuencia natural.

**Ejemplo** Como un ejemplo analicemos el caso de un sistema en el cual  $m = 0,1$  Kg. y  $k = 0,4$  N/m En este caso la frecuencia angular  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 2$  rad/sg. La ecuación diferencial que describe este movimiento será

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4x = 0 \quad \wedge \quad \begin{cases} x(0) = 1; & \frac{dx}{dt}|_{t=0} = 0; & \Rightarrow x(t) = \cos(2t) \\ x(0) = 4; & \frac{dx}{dt}|_{t=0} = 0 & \Rightarrow x(t) = 4 \cos(2t) \\ x(0) = -2; & \frac{dx}{dt}|_{t=0} = 0 & \Rightarrow x(t) = -2 \cos(2t) \end{cases}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4x = 0 \quad \wedge \quad \begin{cases} x(0) = 0; & \frac{dx}{dt}|_{t=0} = 1; & \Rightarrow x(t) = \frac{1}{2} \sin(2t) \\ x(0) = 0; & \frac{dx}{dt}|_{t=0} = 4; & \Rightarrow x(t) = 2 \sin(2t) \\ x(0) = 0; & \frac{dx}{dt}|_{t=0} = -2 & \Rightarrow x(t) = -\sin(2t) \end{cases}$$

### 0.10.3. Oscilaciones Libres Amortiguadas

Consideremos que en el movimiento actúa una fuerza de amortiguación proporcional a la velocidad, por lo cual el movimiento viene descrito por

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + \eta \frac{dx}{dt} + kx = \frac{d^2x}{dt^2} + 2\mu \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

la cual constituye una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden. Las raíces del polinomio característico asociado serán

$$r = \frac{-\eta \pm \sqrt{\eta^2 - 4km}}{2m} = -\frac{\eta}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{\eta}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} = -\mu \pm \sqrt{\mu^2 - \omega_0^2}$$

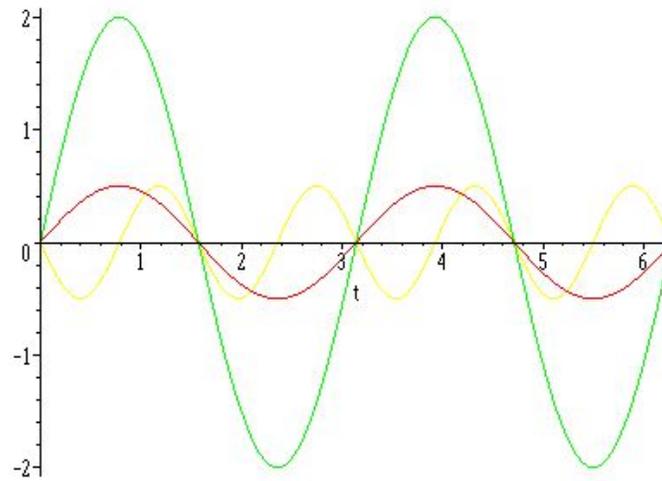


Figura 26: Oscilador Armónico Libre. Cambios de velocidad inicial no afectan la frecuencia natural

por lo tanto la solución será

$$x(t) = C_1 e^{-(\mu + \sqrt{\mu^2 - \omega_0^2})t} + C_2 e^{-(\mu - \sqrt{\mu^2 - \omega_0^2})t}$$

de donde se deducen los siguientes casos

$$x(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} \quad \Leftrightarrow \quad \mu^2 - \omega_0^2 > 0 \quad \text{Sobreamortiguado}$$

$$x(t) = (C_1 + C_2 t) e^{\mu t} \quad \Leftrightarrow \quad \mu^2 - \omega_0^2 = 0 \quad \text{Crítico}$$

$$x(t) = e^{-\mu t} \left\{ C_1 \cos \left[ \left( \sqrt{\omega_0^2 - \mu^2} \right) t \right] + C_2 \sin \left[ \left( \sqrt{\omega_0^2 - \mu^2} \right) t \right] \right\} \quad \Leftrightarrow \quad \mu^2 - \omega_0^2 < 0 \quad \text{Subamortiguado}$$

**Ejemplo** Como un ejemplo analicemos el mismo caso del sistema anterior en el cual  $m = 0,1$  Kg. y  $k = 0,4$  N/m, sólo que ahora la constante de amortiguamiento será  $\eta = 0,60, 0,40$  y  $0,15$  En todos los caso la frecuencia angular  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 2$  rad/sg. y la cantidad subradical  $(\mu^2 - \omega_0^2)$  corresponderá a los tres casos anteriormente mencionados. Las ecuaciones diferenciales que describen este movimiento serán

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 6 \frac{dx}{dt} + 4 x = 0 \quad \wedge \quad \left\{ \begin{array}{l} x(0) = 0 \\ \frac{dx}{dt} \Big|_{t=0} = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow x(t) = \left( \frac{1}{2} + \frac{7}{2\sqrt{5}} \right) e^{(\sqrt{5}-3)t} + \left( \frac{1}{2} - \frac{7}{2\sqrt{5}} \right) e^{-(3+\sqrt{5})t}$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 4 \frac{dx}{dt} + 4 x = 0 \quad \wedge \quad \left\{ \begin{array}{l} x(0) = 0 \\ \frac{dx}{dt} \Big|_{t=0} = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow x(t) = (1 + 6t) e^{-2t}$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + 4 x = 0 \quad \wedge \quad \left\{ \begin{array}{l} x(0) = 0 \\ \frac{dx}{dt} \Big|_{t=0} = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow x(t) = e^{-\frac{1}{2}t} \left[ \frac{9}{\sqrt{15}} \sin \left( \frac{\sqrt{15}}{2} t \right) + \cos \left( \frac{\sqrt{15}}{2} t \right) \right]$$

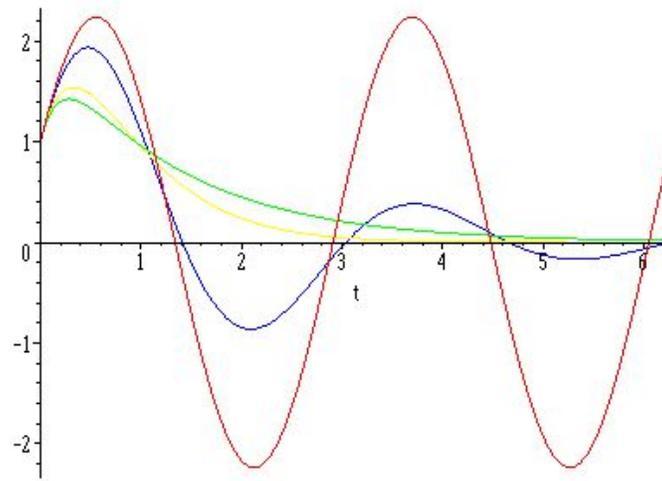


Figura 27: Oscilaciones libres amortiguadas y no amortiguadas. Nótese que el período es mayor para el caso subamortiguado

Si en los casos anteriores cambiamos el signo de la velocidad inicial, i.e.  $\frac{dx}{dt}|_{t=0} = -4$  m/s, tendremos la siguiente representación gráfica.

$$x(0) = 1; \quad \frac{dx}{dt}|_{t=0} = -4; \quad \Rightarrow \quad x(t) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{5}}\right) e^{(\sqrt{5}-3)t} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{5}}\right) e^{-(3+\sqrt{5})t}$$

$$x(0) = 1; \quad \frac{dx}{dt}|_{t=0} = -4; \quad \Rightarrow \quad x(t) = (1 + 2t) e^{-2t}$$

$$x(0) = 1; \quad \frac{dx}{dt}|_{t=0} = -4 \quad \Rightarrow \quad x(t) = e^{-\frac{1}{2}t} \left[ \frac{-7}{\sqrt{15}} \operatorname{sen} \left( \frac{\sqrt{15}}{2}t \right) + \cos \left( \frac{\sqrt{15}}{2}t \right) \right]$$

En todos los casos dado que  $r_1, r_2 < 0$  se tiene que  $x(t \rightarrow \infty) \rightarrow 0$ . El movimiento subamortiguado es periódico y el período viene descrito por

$$T_{am} = \frac{\frac{2\pi}{\omega_0}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\mu}{\omega_0}\right)^2}} = \frac{T}{\sqrt{1 - \left(\frac{\mu}{\omega_0}\right)^2}} \quad \text{si} \quad \left(\frac{\mu}{\omega_0}\right)^2 \ll 1 \quad \Rightarrow \quad T_{am} \approx T \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\mu}{\omega_0}\right)^2\right)$$

el cual siempre será mayor que el período de oscilación natural del sistema.

#### 0.10.4. Oscilaciones Forzadas

Supongamos ahora que existe una fuerza aplicada al sistema tal que

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\mu \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos(\varpi t)$$

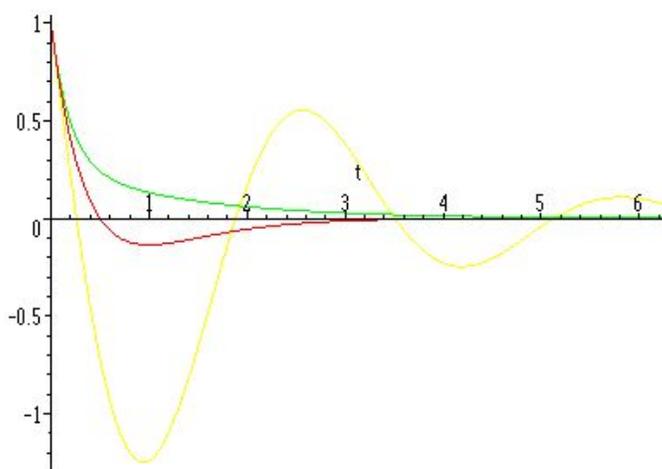


Figura 28: Oscilaciones Libres amortiguadas con cambio de signo en la velocidad inicial

### Oscilaciones Forzadas no amortiguadas

En este caso  $\mu = 0$  y por lo tanto

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos(\varpi t)$$

#### Amplitud modulada $\varpi \neq \omega_0$

y tendrá como solución

$$x(t) = \underbrace{C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \operatorname{sen}(\omega_0 t)}_{\text{homogénea}} + \underbrace{\frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \varpi^2)} \cos(\varpi t)}_{\text{inhomogénea}} = A \cos(\omega_0 t + \delta) + \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \varpi^2)} \cos(\varpi t)$$

con lo cual es la suma de dos movimientos armónicos con distintas frecuencias y amplitudes. Si el cuerpo parte del reposo, esto es:  $x(0) = \dot{x}(0) = 0$  entonces

$$\left. \begin{array}{l} C_1 = \frac{-F_0}{m(\omega_0^2 - \varpi^2)} \\ C_2 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x(t) = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \varpi^2)} [\cos(\varpi t) - \cos(\omega_0 t)]$$

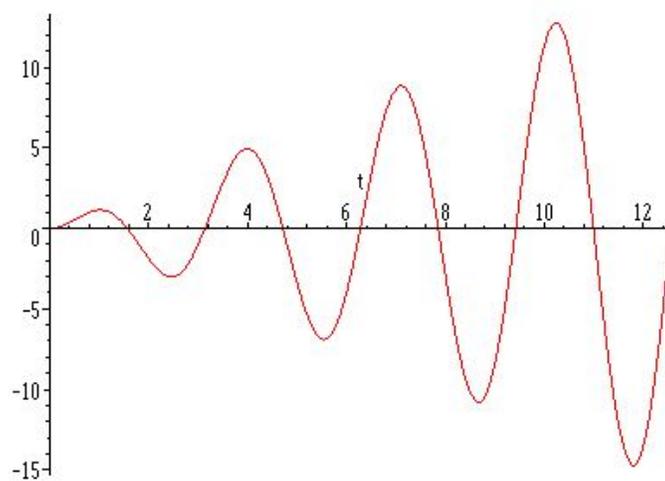


Figura 29: Oscilador armónico forzado con  $\varpi = \omega_0^2$  Nótese el fenómeno de resonancia

dato que

$$\begin{aligned} \cos(\omega_0 t) &= \cos \left[ \left\{ \left( \frac{\omega_0 - \varpi}{2} \right) + \left( \frac{\omega_0 + \varpi}{2} \right) \right\} t \right] \\ \cos(\omega_0 t) &= \cos \left( \frac{\omega_0 - \varpi}{2} \right) \cos \left( \frac{\omega_0 + \varpi}{2} \right) - \operatorname{sen} \left( \frac{\omega_0 - \varpi}{2} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{\omega_0 + \varpi}{2} \right) \\ \cos(\varpi t) &= \cos \left[ \left\{ \left( \frac{\omega_0 - \varpi}{2} \right) - \left( \frac{\omega_0 + \varpi}{2} \right) \right\} t \right] \\ \cos(\varpi t) &= \cos \left( \frac{\omega_0 - \varpi}{2} \right) \cos \left( \frac{\omega_0 + \varpi}{2} \right) + \operatorname{sen} \left( \frac{\omega_0 - \varpi}{2} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{\omega_0 + \varpi}{2} \right) \\ x(t) &= \underbrace{\frac{2F_0}{m(\omega_0^2 - \varpi^2)}}_{\text{Envolvente}} \left[ \operatorname{sen} \left( \frac{\omega_0 - \varpi}{2} t \right) \right] \left[ \operatorname{sen} \left( \frac{\omega_0 + \varpi}{2} t \right) \right] \end{aligned}$$

**Ejemplo** El mismo sistema anterior en el cual  $m = 0,1$  Kg. y  $k = 0,4$  N/m, cuando parte del reposo desde el origen de coordenadas y existe una fuerza de excitación  $F = 0,5 \cos(3t)$ . Por lo tanto la ecuación diferencial que describe el movimiento sera

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 4x = 5 \cos(3t) \quad \left\{ \begin{array}{l} x(0) = 0 \\ \frac{dx}{dt} \Big|_{t=0} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x(t) = \underbrace{\cos(2t)}_{\text{homogénea}} - \underbrace{\cos(3t)}_{\text{inhomogénea}} \equiv \underbrace{2 \operatorname{sen} \left( \frac{1}{2} t \right) \operatorname{sen} \left( \frac{5}{2} t \right)}_{\text{envolvente}}$$

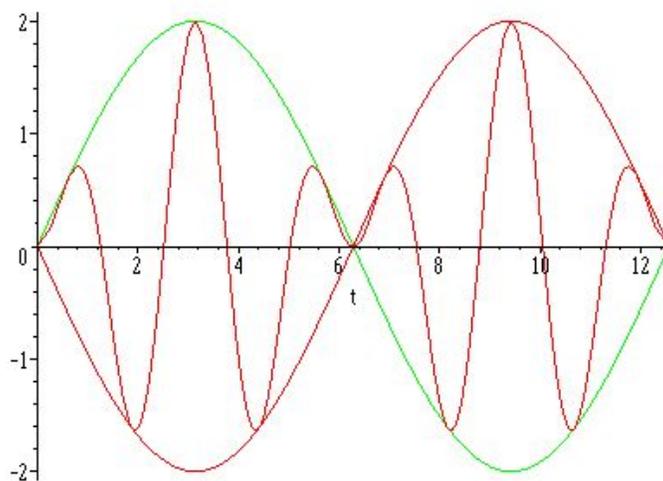


Figura 30: Oscilador armónico forzado. Nótese la envoltura de la función

### Resonancia $\varpi = \omega_0$

En el caso que la frecuencia de la fuerza de excitación coincida con la frecuencia natural del sistema, se tiene

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = F_0 \cos(\omega_0 t) \implies x(t) = C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t) + \underbrace{\frac{F_0}{2m\omega_0} t}_{\text{envoltura}} \sin(\omega_0 t)$$

**Ejemplo** El sistema anterior ( $m = 0,1$  Kg. y  $k = 0,4$  N/m), cuando parte del reposo desde el origen de coordenadas y existe una fuerza de excitación  $F = 0,5 \cos(2t)$ . Por lo tanto la ecuación diferencial que describe el movimiento será

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4x = 5 \cos(2t) \quad \wedge \quad \left\{ \begin{array}{l} x(0) = 0 \\ \frac{dx}{dt} \Big|_{t=0} = 0 \end{array} \right\} \implies x(t) = \frac{5t}{4} \sin(2t)$$

### 0.10.5. Oscilaciones Forzadas amortiguadas

En este caso  $\mu \neq 0$  y por lo tanto

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\mu \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos(\varpi t)$$

la cual tendrá como solución

$$x(t) = C_1 e^{-(\mu + \sqrt{\mu^2 - \omega_0^2})t} + C_2 e^{-(\mu - \sqrt{\mu^2 - \omega_0^2})t} + \frac{F_0}{m} \left( \frac{(\omega_0^2 - \varpi^2) \cos(\varpi t) + 2\mu\varpi \sin(\varpi t)}{(\omega_0^2 - \varpi^2)^2 + (2\mu\varpi)^2} \right)$$

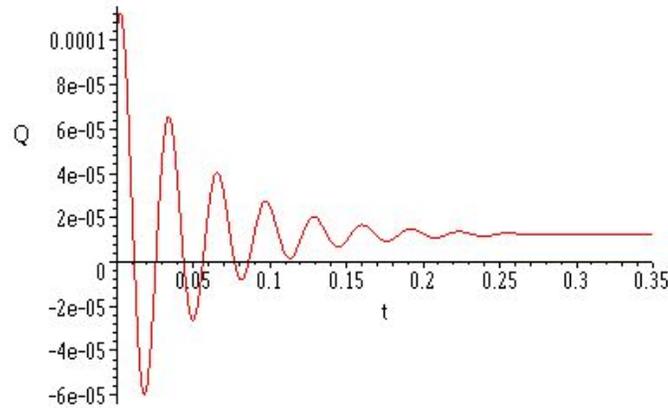


Figura 31: Carga en función del tiempo en un circuito RLC sometido a un voltaje constante. Nótese que el sistema alcanza el régimen estacionario cercano a los 0,3 sg

una vez más se puede convertir en

$$x(t) = \underbrace{C_1 e^{-(\mu + \sqrt{\mu^2 - \omega_0^2})t} + C_2 e^{-(\mu - \sqrt{\mu^2 - \omega_0^2})t}}_{\text{solución homogénea} \equiv \text{régimen transitorio}} + \underbrace{\frac{F_0}{m} \frac{\cos(\omega t - \zeta)}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\mu\omega)^2}}}_{\text{solución inhomogénea} \equiv \text{régimen estacionario}}$$

donde

$$\cos(\zeta) = \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\mu\omega)^2}} \quad \text{y} \quad \sin(\zeta) = \frac{2\mu\omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\mu\omega)^2}}$$

Es claro que el término homogéneo en todos sus casos (sobreamortiguado, crítico y subamortiguado) tiende a cero, por ello se considera un término transitorio, no así el término inhomogéneo que permanece oscilando. En términos Físico se puede decir que el término transitorio representa la disipación de la energía inicial que se le provee al sistema a través de la posición y la velocidad inicial de lanzamiento. Esta energía inicial se expresa a través de las condiciones iniciales se disipa. Si no existiera disipación esta energía inicial permanecería por siempre en el sistema. Finalmente el término inhomogéneo, a través de la fuerza de excitación, impone el movimiento al sistema. Nótese además que el término inhomogéneo nunca se hace infinito, ni siquiera para el caso para el cual tiene un máximo y es aquel en el cual la frecuencia de excitación coincide con la frecuencia natural del sistema.

**Ejemplo** En un circuito RLC, cuyos componentes son  $L = 1$  henry,  $R = 40$  ohmios y  $C = \frac{1}{40000}$  faradios, se le aplica un tensión de  $V = 24$  voltios. Determine el comportamiento de la carga y la intensidad de corriente en el circuito.

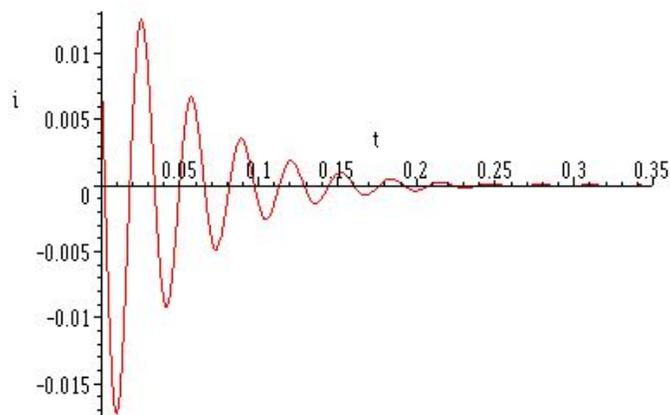


Figura 32: Intensidad en un circuito RLC sometido a un voltaje constante.

La ecuación diferencial que describe el comportamiento del sistema

$$L \frac{d^2 Q(t)}{dt^2} + R \frac{dQ(t)}{dt} + \frac{1}{C} Q = E(t) \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2 Q(t)}{dt^2} + 40 \frac{dQ(t)}{dt} + 40000 Q(t) = \frac{1}{2}$$

$$L \frac{d^2 I(t)}{dt^2} + R \frac{dI(t)}{dt} + \frac{1}{C} I(t) = \frac{dE(t)}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2 I(t)}{dt^2} + 40 \frac{dI(t)}{dt} + 40000 I(t) = 0$$

tomando en cuenta las condiciones iniciales tendremos como solución

$$\left. \begin{array}{l} Q(0) = 10^{-4} \\ I(0) = \left. \frac{dQ}{dt} \right|_{t=0} = 10^{-2} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} Q(t) = \frac{1}{8000} + e^{-20t} \left[ \frac{47\sqrt{11}}{2640000} \operatorname{sen}(\sqrt{11}60t) + \frac{7}{8000} \cos(\sqrt{11}60t) \right] \\ I(t) = \frac{dQ}{dt} = e^{-20t} \left[ \frac{1}{100} \cos(\sqrt{11}60t) - \frac{37\sqrt{11}}{6600} \operatorname{sen}(\sqrt{11}60t) \right] \end{array} \right.$$

Si en vez de un tensión constante de 0,5 V. la fuente de tensión es sinusoidal de la forma  $E(t) = \frac{1}{2} \cos(180t)$  voltios las ecuaciones se transforman en

$$\frac{d^2 Q}{dt^2} + 40 \frac{dQ}{dt} + 40000 Q = \frac{1}{2} \cos(180t) \quad \text{con} \quad Q(0) = 10^{-4} \quad \wedge \quad I(0) = \left. \frac{dQ}{dt} \right|_{t=0} = 10^{-2}$$

$$\frac{d^2 I}{dt^2} + 40 \frac{dI}{dt} + 40000 I = -90 \operatorname{sen}(180t)$$

con sus correspondientes soluciones a las condiciones iniciales del sistema

$$Q(t) = \frac{1}{1000} \left\{ e^{-20t} \left[ \frac{293\sqrt{11}}{30140} \operatorname{sen}(60\sqrt{11}t) + \frac{91}{685} \cos(60\sqrt{11}t) \right] - \frac{9}{274} \cos(180t) + \frac{19}{548} \operatorname{sen}(180t) \right\}$$

$$I(t) = \frac{1}{100} \left\{ e^{-20t} \left[ \frac{103}{274} \cos(60\sqrt{11}t) - \frac{2461\sqrt{11}}{3014} \operatorname{sen}(60\sqrt{11}t) \right] + \frac{81}{137} \operatorname{sen}(180t) + \frac{171}{274} \cos(180t) \right\}$$

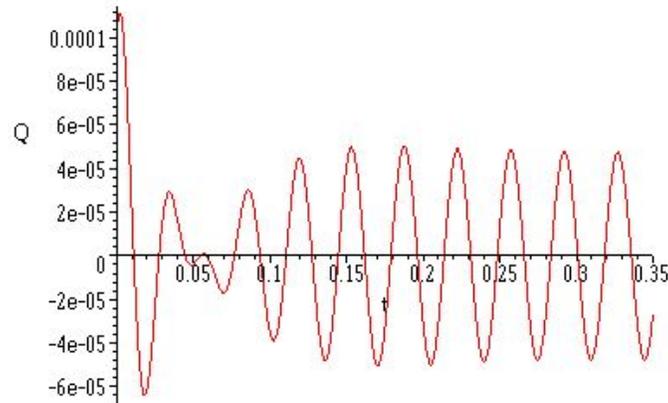


Figura 33: Carga en función del tiempo en un circuito RLC sometido a un voltaje sinusoidal  $V(t) = \frac{1}{2} \cos(180t)$ . Nótese el régimen transitorio ( $0 \leq t \lesssim 0,17$ ) y estacionario ( $t \gtrsim 0,17$ ).

Por analogía con el caso mecánico procedemos a identificar cantidades

$$\left. \begin{array}{l} 2\mu = \frac{R}{L} \\ \omega_0^2 = \frac{1}{LC} \end{array} \right\} \Rightarrow A = \frac{V_0}{L\sqrt{\left(\frac{1}{LC} - \omega^2\right)^2 + \left(\frac{R}{L}\omega\right)^2}} = \frac{1}{2\sqrt{\omega^4 - 78400\omega^2 + 1600000000}}$$

con ello se puede ver la funcionalidad de la amplitud con la frecuencia excitatriz

### 0.10.6. Movimiento alrededor de un punto de equilibrio

La fuerza elástica  $F = -k x$  más allá de ser el caso más simple, representa la primera aproximación al movimiento alrededor de un punto de equilibrio estable. Si recordamos que para una fuerza que derive de un potencial

$$F = -\frac{dV}{dx} \Rightarrow F = -k x = -\frac{d\left(\frac{1}{2}k x^2\right)}{dx}$$

mas aun, un punto de equilibrio estable se define aquel en el cual no existen fuerzas externas, vale decir

$$F|_{x=x_0} = 0 \Rightarrow -\frac{dV}{dx}\Big|_{x=x_0} = 0$$

por lo cual, dado un potencial de una fuerza arbitraria siempre podemos expandirlo en series de Taylor alrededor de un punto de equilibrio  $x = x_0$

$$V(x) = v(x_0) + \underbrace{(x - x_0) \frac{dV}{dx}\Big|_{x=x_0}}_{=0} + \frac{1}{2!} (x - x_0)^2 \frac{d^2V}{dx^2}\Big|_{x=x_0} + \frac{1}{3!} (x - x_0)^3 \frac{d^3V}{dx^3}\Big|_{x=x_0} \dots$$

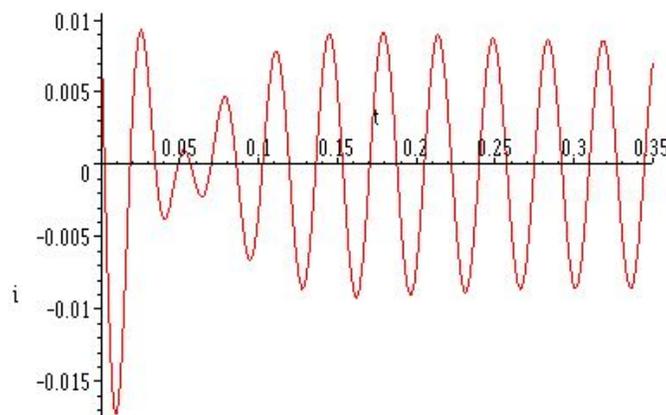


Figura 34: Intensidad de corriente en un circuito RLC sometido a un voltaje sinusoidal  $V(t) = \frac{1}{2} \cos(180t)$

Así, en general, alrededor de un punto de equilibrio  $x = x_0$  la primera aproximación de una función potencial sera  $V(x) \approx \frac{1}{2!} (x - x_0)^2 \left. \frac{d^2V}{dx^2} \right|_{x=x_0} \approx \frac{1}{2} k (x - x_0)^2$ . Así, un potencial de la forma

$$V(x) = \frac{1}{6}x^6 - 2x^5 + \frac{35}{4}x^4 - \frac{50}{3}x^3 + 12x^2$$

Solución:  $x^5 - 10x^4 + 35x^3 - 50x^2 + 24x$  Solución: que genera una fuerza

$$F = -\frac{dV(x)}{dx} = -(x^5 - 10x^4 + 35x^3 - 50x^2 + 24x)$$

tendrá dos puntos de equilibrio  $x = 0$  y  $x = 4$ . En torno a  $x = 0$  se podrá aproximar con un potencial parabólico

$$\tilde{V}(x) = \frac{1}{2!} (x - x_0)^2 \left. \frac{d^2V(x)}{dx^2} \right|_{x=x_0} = 12x^2$$

tal y como se observa gráficamente

### 0.10.7. Péndulo Simple con desplazamiento finito.

El caso típico de esta aproximación lo constituye el péndulo simple: una masa  $m$ , empotrada a una varilla, de masa despreciable y de longitud  $L$ . La varilla se desplaza un ángulo  $\theta$  de la vertical y se suelta. La Figura (37) muestra el diagrama de cuerpo libre del Péndulo Físico. Desde la ancestral física general, aún en secundaria, era proverbial resolver este problema suponiendo ángulos pequeños. En esas tempranas épocas de nuestro conocimiento de Física era limitado y más limitado aún era nuestra capacidad para resolver ecuaciones diferenciales. A este “problema” se le conoce con el péndulo físico. Como siempre, aproximar es un arte y exploremos este arte. Como norma general tendremos que se debe aproximar al final. Pero no siempre. Si suponemos un cuerpo de masa constante,  $m$ , las ecuaciones diferenciales que describen el movimiento no

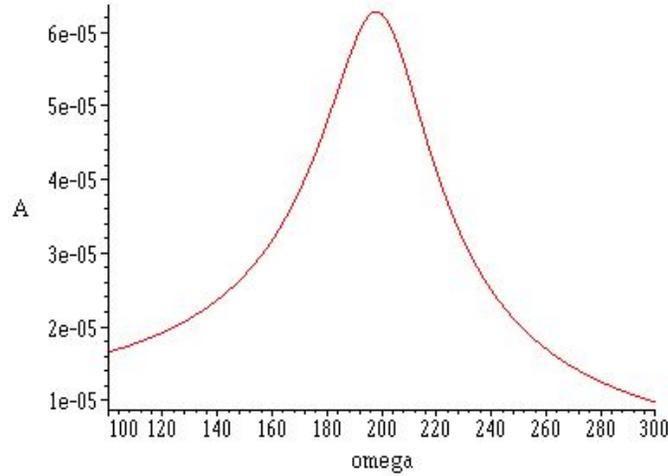


Figura 35: Amplitud como función de la frecuencia excitatriz. Nótese el máximo de la amplitud cuando el sistema entra en resonancia, i.e.  $\varpi = \omega_0$

pueden ser otras que aquellas que provengan de las ecuaciones de Newton

$$\sum_{\text{externas}} \overrightarrow{F(r(t), v(t), t)} = \frac{d \overrightarrow{mv(t)}}{dt} = m \overrightarrow{a(t)} = m (a_r \hat{\mathbf{u}}_r + a_\theta \hat{\mathbf{u}}_\theta), \quad (44)$$

Es bueno recordar que hay que expresar la aceleración en un sistema de coordenadas móviles ( $\hat{\mathbf{u}}_r, \hat{\mathbf{u}}_\theta$ ). Esto es

$$\hat{\mathbf{u}}_r = \cos(\theta) \hat{\mathbf{i}} + \sin(\theta) \hat{\mathbf{j}} \implies \frac{d\hat{\mathbf{u}}_r}{dt} = (-\sin(\theta) \hat{\mathbf{i}} + \cos(\theta) \hat{\mathbf{j}}) \frac{d\theta(t)}{dt} = \frac{d\theta(t)}{dt} \hat{\mathbf{u}}_\theta = \dot{\theta}(t) \hat{\mathbf{u}}_\theta$$

$$\hat{\mathbf{u}}_\theta = -\sin(\theta) \hat{\mathbf{i}} + \cos(\theta) \hat{\mathbf{j}} \implies \frac{d\hat{\mathbf{u}}_\theta}{dt} = -(\cos(\theta) \hat{\mathbf{i}} + \sin(\theta) \hat{\mathbf{j}}) \frac{d\theta(t)}{dt} = -\frac{d\theta(t)}{dt} \hat{\mathbf{u}}_r = -\dot{\theta}(t) \hat{\mathbf{u}}_r$$

con lo cual

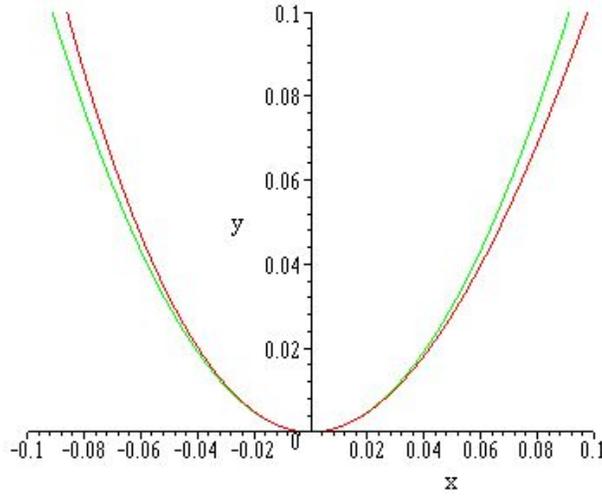
$$\vec{r}(t) = r(t) \hat{\mathbf{u}}_r \implies \vec{v}(t) = \frac{d(r(t) \hat{\mathbf{u}}_r)}{dt} = \dot{r}(t) \hat{\mathbf{u}}_r + r(t) \dot{\theta}(t) \hat{\mathbf{u}}_\theta$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d(\dot{r}(t) \hat{\mathbf{u}}_r + r(t) \dot{\theta}(t) \hat{\mathbf{u}}_\theta)}{dt} = (\ddot{r}(t) - r(t) \dot{\theta}^2(t)) \hat{\mathbf{u}}_r + (2\dot{r}(t) \dot{\theta}(t) + r(t) \ddot{\theta}(t)) \hat{\mathbf{u}}_\theta$$

es claro que si  $r(t) = L = cte \implies \dot{r}(t) = \ddot{r}(t) = \vec{v}(t) = \vec{a}(t) = 0$

$$\vec{r}(t) = L \hat{\mathbf{u}}_r \implies \vec{v}(t) = \frac{d(L \hat{\mathbf{u}}_r)}{dt} = L \dot{\theta}(t) \hat{\mathbf{u}}_\theta$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d(L \dot{\theta}(t) \hat{\mathbf{u}}_\theta)}{dt} = (-L (\dot{\theta}(t))^2) \hat{\mathbf{u}}_r + (L \ddot{\theta}(t)) \hat{\mathbf{u}}_\theta$$

Figura 36: Aproximación por una parábola en torno a  $x = 0$ 

Así, y para este caso particular, las ecuaciones de Newton quedan como

$$m \vec{a} = \vec{T} + m \vec{g} \implies \begin{cases} m a_r \equiv -mL\dot{\theta}^2(t) = -T + mg \cos(\theta) \\ m a_\theta = mL\ddot{\theta}(t) = -mg \sin(\theta). \end{cases} \quad (45)$$

El caso que todos nos aprendimos de memoria, proviene de la suposición  $\theta \approx \sin(\theta) \ll 1$  que implica:

$$m \vec{a} = \vec{T} + m \vec{g} \implies \begin{cases} mL\dot{\theta}^2(t) = -T + mg \\ mL\ddot{\theta}(t) = -mg\theta. \end{cases} \quad (46)$$

con lo cual, ahora, en este curso, sabemos que lo podemos integrar inmediatamente. Si suponemos que parte del reposo:  $\dot{\theta}(0) = 0$  y  $\theta(0) = \theta_0$

$$L\ddot{\theta}(t) = -g\theta(t) \implies \theta(t) = C_1 \sin\left(\sqrt{\frac{g}{L}}t\right) + C_2 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{L}}t\right) \implies \theta(t) = \theta_0 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{L}}t\right)$$

y el período puede ser integrado

$$\dot{\theta}(t)\ddot{\theta}(t) = -\frac{g}{L}\theta(t)\dot{\theta}(t) \implies E_{total} \propto cte = \dot{\theta}(t)^2 + 2\frac{g}{L}\theta(t)^2 \implies \dot{\theta}(t) = \sqrt{\frac{g}{L}(\theta_0^2 - \theta^2)} \quad (47)$$

que no es otra cosa que la energía total del sistema. Por lo tanto sabemos que en el instante inicial, si soltamos la masa desde un ángulo  $\theta_0$ , la energía total es puramente potencial. Es decir

$$E_{total} = E_{potencial} = mgL(1 - \cos(\theta_0)) = 2mgL \sin^2\left(\frac{1}{2}\theta_0\right) \quad (48)$$

por otro lado, de la ecuación (47) podemos obtener el período de oscilación para el Péndulo Físico linealizado:

$$\omega = \dot{\theta}(t) = \sqrt{\frac{g}{L}(\theta_0^2 - \theta^2)} \implies T = \frac{1}{\sqrt{\frac{g}{L}}} \arctan\left(\frac{\theta}{\sqrt{\theta_0^2 - \theta^2}}\right)$$

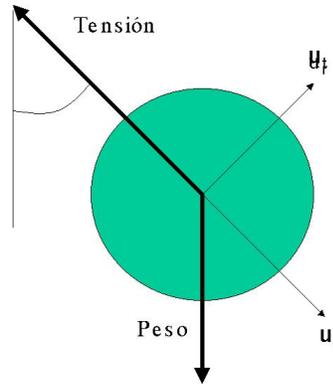


Figura 37: Diagrama de Cuerpo Libre, del Péndulo Físico

Este caso también se conoce con el nombre de oscilador armónico simple o péndulo físico linealizado. Igualmente podemos analizar el caso de general del péndulo amortiguado forzado linealizado. Vale decir, una masa,  $m$ , atada a una varilla sin masa de longitud  $L$ , y que oscila, inmersa en un fluido que la frena el movimiento de la masa con una fuerza,  $-\eta \vec{v}(t)$  y que adicionalmente está excitada por una fuerza exterior  $F(t) = F_0 \cos(\varpi t)$ . Recordamos que en este caso la ecuación en la dirección tangente ( $\hat{u}_\theta$ ), es

$$mL \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + \eta \frac{d\theta(t)}{dt} + mg \theta(t) = F_0 \cos(\varpi t) \implies \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + 2\mu \frac{d\theta(t)}{dt} + \omega_0^2 \theta(t) = \frac{F_0}{mL} \cos(\varpi t)$$

donde, por costumbre, hemos rebautizado las constantes tales que  $\mu = \frac{\eta}{2mL}$  y  $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}$ .

Por lo tanto, su solución tendrá la forma

$$\theta(t) = \underbrace{C_1 e^{-(\mu + \sqrt{\mu^2 - \omega_0^2})t} + C_2 e^{-(\mu - \sqrt{\mu^2 - \omega_0^2})t}}_{\text{solución homogénea} \equiv \text{régimen transitorio}} + \underbrace{\frac{F_0}{mL} \frac{\cos(\varpi t - \zeta)}{\sqrt{(\omega_0^2 - \varpi^2)^2 + (2\mu\varpi)^2}}}_{\text{solución inhomogénea} \equiv \text{régimen estacionario}}$$

donde

$$\cos(\zeta) = \frac{(\omega_0^2 - \varpi^2)}{\sqrt{(\omega_0^2 - \varpi^2)^2 + (2\mu\varpi)^2}} \quad \text{y} \quad \sin(\zeta) = \frac{2\mu\varpi}{\sqrt{(\omega_0^2 - \varpi^2)^2 + (2\mu\varpi)^2}}$$

Hemos aprendido que dependiendo del valor de los coeficientes de la ecuación característica del Péndulo Físico amortiguado libre ( $F_0 = 0$ ) se derivan tres casos posibles:

- Subamortiguado:  $\mu^2 - \omega_0^2 < 0$
- Sobreamortiguado:  $\mu^2 - \omega_0^2 > 0$

Oscilador Armonico Simple, Evolucion temporal

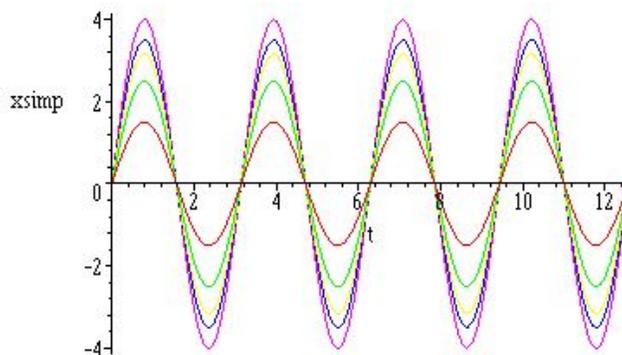


Figura 38: Evolución  $\theta(t)$  vs  $t$  del Péndulo Físico libre, para distintos valores de la velocidad inicial  $V_0 = 3, 5, \sqrt{40}, 7, 8$ .

- Crítico  $\mu^2 - \omega_0^2 = 0$

En el caso del Péndulo Físico amortiguado forzado ( $F_0 \neq 0$ ) la física se hace mucho más rica y pueden ocurrir fenómenos de resonancia cuando  $(\omega_0^2 - \varpi^2)^2 + (2\mu\varpi)^2 \rightarrow 0$ .

Es interesante considerar los gráficos tanto de la evolución del sistema en el espacio directo:  $\theta(t)$  vs  $t$ ; como la evolución del sistema en el espacio de fases  $\omega = \dot{\theta}(t)$  vs  $\theta(t)$ . Las figuras (40) y (42) muestran la primera de estas evoluciones, es decir, la evolución del ángulo en el espacio directo. Las figuras (41) y (43) muestran la evolución del sistema en el espacio de fases. Es claro de la ecuación (47), en la cual aparece  $\omega = \dot{\theta}(t) = \dot{\theta}(\theta(t))$ , que las curvas en el diagrama de fase tanto para el caso libre (figura (39)) como para los de los casos amortiguados (figuras (41) y (43)) corresponden a curvas de misma energía. En el caso del Péndulo Físico linealizado libre, corresponden a curvas de energía constante. en los otros casos el sistema va disipando energía debido al coeficiente de amortiguación.

Nótese que la disipación obliga al sistema a evolucionar al punto de equilibrio siguiendo trayectorias espirales en el espacio de fases. Claramente más rápidamente en el caso sobreamortiguado que en el subamortiguado. También sabemos que para el caso crítico ( $\mu^2 - \omega_0^2 = 0$ ) el tiempo de evolución del sistema hasta llegar al punto de equilibrio será menor que en cualquiera de los casos sobreamortiguados. Dejamos al lector la comprobación de esta última afirmación.

Hemos aprendido que dependiendo del valor de los coeficientes de la ecuación característica del Péndulo Físico amortiguado libre ( $F_0 = 0$ ) se derivan tres casos posibles:

Ahora bien, la situación que nos interesa simular es la del péndulo físico para los casos en los cuales los ángulos de oscilación no necesariamente sean pequeños.

Denominaremos péndulo libre al caso en el cual no recurriremos a ninguna aproximación respecto al ángulo de oscilación. Recordemos que para este caso partimos de la ecuación (45) en la dirección tangente. Es decir

$$L\ddot{\theta}(t) = -g \operatorname{sen}(\theta) \implies \dot{\theta}(t)\ddot{\theta}(t) = -\frac{g}{L} \operatorname{sen}(\theta(t))\dot{\theta}(t) \implies E_{total} \propto cte = \left( \frac{\dot{\theta}(t)^2}{2} - \frac{g}{L} \cos \theta(t) \right)$$

Oscilador Armónico Simple, Diagrama de Fase

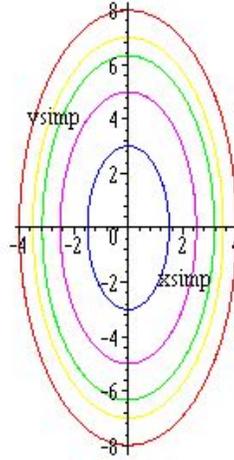


Figura 39: Digrama de Fase para el Oscilador Armónico Simple. Nótese que el punto de equilibrio es el origen de coordenadas.

Al igual que en la ecuación en la dirección tangente linealizada (47), nos encontramos con la Energía total del sistema. Con lo cual Es fácil despejar  $\dot{\theta}(t) = \dot{\theta}(\theta(t))$  y construir los diagramas de fases del sistema. Otra vez, las líneas del diagrama de fase serán líneas de la misma energía. Así podemos graficar

$$\dot{\theta}(t) = \pm \sqrt{C + \frac{2g}{L} \cos(\theta(t))} \quad (49)$$

para distintos valores de la constante  $C = 4, 01; 4, 1; 6; 8; 10; 20$  y para el caso  $\frac{g}{L} = 4$ . La Figura (44) representa el diagrama de fase para estos casos. Las curvas cerradas (aquellas que tienen los valores de ángulos y velocidades acotadas) representan oscilaciones del sistema, mientras que las curvas abiertas (aquellas en las cuales las velocidades están acotadas pero no así el valor del ángulo) representan que el sistema rota. Nótese que el sistema presenta puntos de equilibrio inestable para  $\theta(t) \approx \pm n\pi$  con  $n = 0, 1, 2$ . Lo cual era de esperarse por cuanto corresponde al ángulo en el cual el sistema *varilla-masa* se encuentran verticalmente dispuestos y el peso y la tensión son colineales y se anulan momentáneamente.

Otro enfoque, quizá más intuitivo para resolver este problema, pudo haber sido el análisis energético. Para ello sabemos que, por ser un sistema conservativo, la energía total viene definida por

$$E_{total} = \underbrace{\frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}(t)^2}_{\text{Energía Cinética}} + \underbrace{mgL(1 - \cos(\theta(t)))}_{\text{Energía Potencial}} \equiv \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}(t)^2 + 2mgL \sin^2\left(\frac{\theta(t)}{2}\right)$$

por consiguiente

$$\dot{\theta}(t) = \pm \sqrt{\frac{2E_{total}}{mL^2} - \frac{4g}{L} \sin^2\left(\frac{\theta(t)}{2}\right)} \equiv \pm 2\sqrt{\frac{g}{L} \left[ \sin^2\left(\frac{\theta_{m\acute{a}x}}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\theta(t)}{2}\right) \right]} \quad (50)$$

donde hemos sustituido  $E_{total} = 2mL \sin^2\left(\frac{\theta_{m\acute{a}x}}{2}\right)$  con  $\theta_{m\acute{a}x}$  el ángulo máximo que alcanza el Péndulo Físico, por cuanto en ese punto la energía total es puramente potencial. Nótese que ese ángulo no necesariamente es el ángulo inicial, debido a que la velocidad inicial puede ser distinta de cero.

Oscilador Armonico Amortiguado, Evolucion temporal

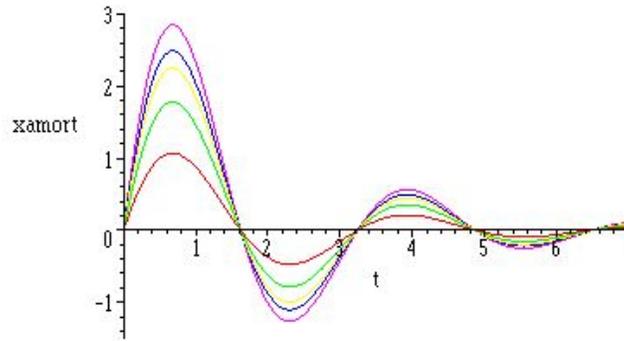


Figura 40: Evolución  $\theta(t)$  vs  $t$  del Péndulo Simple, Subamortiguado ( $\frac{g}{L} = 4; \mu = 0,5$ ) libre, para distintos valores de la velocidad inicial  $V_0 = 3, 5, \sqrt{40}, 7, 8$ .

La ecuación (50) es claramente integrable por separación de variables y conduce a encontrar la expresión para el período:

$$t = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{L}{g}} \int_{\theta_0}^{\theta(t)} \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{g}{L} [\text{sen}^2(\frac{\theta_{\text{máx}}}{2}) - \text{sen}^2(\frac{\theta}{2})]}} \quad \text{con } -\pi \leq \theta(t) \leq \pi \quad \text{y } \theta_0 = \theta(0)$$

La integral anterior, puede ser transformada en otra que aparece en las tablas integrales, si hacemos  $\text{sen } \beta = \frac{\text{sen}(\frac{\theta}{2})}{\text{sen}(\frac{\theta_{\text{máx}}}{2})}$ , con lo cual

$$t = \sqrt{\frac{L}{g}} \int_{\zeta(0)}^{\zeta(t)} \frac{d\beta}{\sqrt{1 - \text{sen}^2(\frac{\theta_{\text{máx}}}{2}) \text{sen}^2 \beta}} \quad \text{donde } \begin{cases} \text{sen } \beta = \frac{\text{sen}(\frac{\theta}{2})}{\text{sen}(\frac{\theta_{\text{máx}}}{2})} \\ \zeta(t) = \arcsin \left[ \frac{\text{sen}(\frac{\theta(t)}{2})}{\text{sen}(\frac{\theta_{\text{máx}}}{2})} \right] \end{cases} \quad (51)$$

Es claro que el recorrido entre  $\zeta(0) = 0 \implies \theta = 0$  a  $\theta = \theta_{\text{máx}} \implies \zeta(t) = \frac{\pi}{2}$  representa un cuarto del período, por consiguiente el período total del Péndulo Físico será:

$$T = 4 \sqrt{\frac{L}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\beta}{\sqrt{1 - \text{sen}^2(\frac{\theta_{\text{máx}}}{2}) \text{sen}^2 \beta}}$$

Oscilador Armónico Subamortiguado, Diagrama de Fase

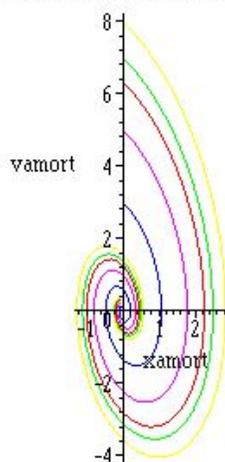


Figura 41: Evolución  $\dot{\theta}(t)$  vs  $\theta(t)$  del Péndulo Físico Subamortiguado libre ( $\frac{g}{L} = 4; \mu = 0,5$ ) en el Espacio de Fases para distintos valores de la velocidad inicial  $V_0 = 3, 5, \sqrt{40}, 7, 8$ . Nótese que la disipación lleva irremediabilmente al sistema al punto de equilibrio, vale decir al origen de coordenadas del espacio de fases.

### 0.10.8. Disgresión Elíptica

En este punto haremos una disgresión respecto a las integrales elípticas, su clasificación y algunas de sus propiedades. En general encontrarán en la bibliografía que las integrales elípticas se dividen en

- *Integrales Elípticas de Primera Especie*

$$F(\varphi|\alpha) = \int_0^\varphi \frac{d\beta}{\sqrt{1 - \alpha^2 \sin^2 \beta}} \iff F(x|m) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-mt^2)}} \quad \text{con } 0 \leq m \leq 1$$

las cuales, para el caso particular  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  o  $x = 1$ , se puede reacomodar como una *Integral Elíptica de Primera Especie Completa*

$$K(m) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\beta}{\sqrt{1 - m \sin^2 \beta}} \equiv \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-mt^2)}} \quad \text{con } 0 \leq m \leq 1 \quad (52)$$

- *Integrales Elípticas de Segunda Especie*

$$E(\varphi|\alpha) = \int_0^\varphi \sqrt{1 - \alpha^2 \sin^2 \beta} d\beta \iff E(x|m) = \int_0^x \sqrt{\frac{(1-mt^2)}{(1-t^2)}} dt \quad \text{con } 0 \leq m \leq 1$$

y si  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  o  $x = 1$ , entonces se obtiene una *Integral Elíptica de Segunda Especie Completa*

$$E(m) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - m \sin^2 \beta} d\beta \equiv \int_0^1 \sqrt{\frac{(1-mt^2)}{(1-t^2)}} dt \quad \text{con } 0 \leq m \leq 1$$

Oscilador Armonico Sobrearmortiguado, Evolucion temporal

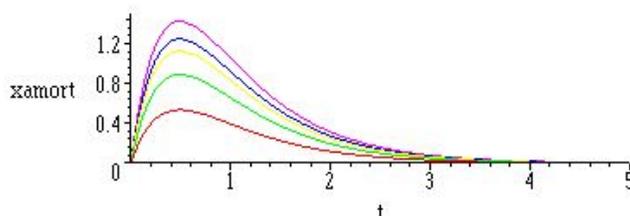


Figura 42: Evolución  $\theta(t)$  vs  $t$  del Péndulo Físico Sobrearmortiguado ( $\frac{g}{L} = 4; \mu = 3, 5$ ) libre, para distintos valores de la velocidad inicial  $V_0 = 3, 5, \sqrt{40}, 7, 8$ .

Adicionalmente, y también sin perder generalidad, dado que  $0 \leq m \leq 1$ , el denominador de la integral elíptica  $K(m)$  de la ecuación (52) y equivalentemente de la ecuación (51) puede ser expandido en series de potencias. Con lo cual

$$\frac{1}{\sqrt{1 - m \operatorname{sen}^2 \beta}} = 1 + \frac{1}{2} \operatorname{sen}^2 \beta m + \left( \frac{3}{8} \operatorname{sen}^4 \beta^2 \right) m^2 + \left( \frac{5}{16} \operatorname{sen}^6 \beta^3 \right) m^3 + \left( \frac{35}{128} \operatorname{sen}^8 \beta^4 \right) m^4 + \dots$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1 - m \operatorname{sen}^2 \beta}} &= \frac{1}{2} \pi \left[ 1 + \left[ \left( \frac{1}{2} \right) \operatorname{sen}^2 \beta \right] m + \left[ \left( \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \right) \operatorname{sen}^4 \beta \right] m^2 + \right. \\ &\quad \left. + \left[ \left( \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \right) \operatorname{sen}^6 \beta \right] m^3 + O(m^4) \right] \end{aligned}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 - m \operatorname{sen}^2 \beta}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} m^n \operatorname{sen}^{2n} \beta$$

y siendo una serie uniformemente convergente puede ser integrada término a término como

$$K(m) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\beta}{\sqrt{1 - m \operatorname{sen}^2 \beta}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\beta \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} m^n \operatorname{sen}^{2n} \beta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} m^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2n} \beta d\beta$$

$$K(m) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} m^n \left[ \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{\pi}{2} \right] = \frac{\pi}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right]^2 m^n$$

Oscilador Armonico Sobreamortiguado, Diagrama de Fase

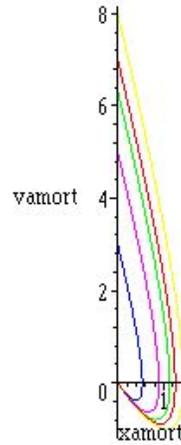


Figura 43: Físico Sobreamortiguado libre ( $\frac{g}{L} = 4; \mu = 3, 5$ ) en el Espacio de Fases para distintos valores de la velocidad inicial  $V_0 = 3, 5, \sqrt{40}, 7, 8$ . Nótese que la disipación lleva irremediamente al sistema al punto de equilibrio, vale decir al origen de coordenadas del espacio de fases.

Del mismo modo se obtiene para las integrales elípticas completas de segunda especie que

$$E(m) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - m \sin^2 \beta} d\beta = \frac{\pi}{2} \left[ 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right]^2 \frac{m^n}{2n-1} \right]$$

Finalmente podemos mencionar la relación de “recurrencia” de Legendre para las Integrales Elípticas completas. Ella es

$$E(m)K(1-m) + E(1-m)K(m) - K(m)K(1-m) = \frac{\pi}{2}$$

Las integrales elípticas de primera y segunda especie, incompletas y completa deben resolverse numéricamente y tradicionalmente están tabuladas en algunas tablas integrales<sup>6</sup>. En nuestros días también pueden ser resueltas numéricamente utilizando comandos de manipuladores simbólicos<sup>7</sup>.

<sup>6</sup>Abramowitz, M. y Stegun I.A (1964) *Handbook of Mathematical Functions* Dover, New York

<sup>7</sup>En el caso de MAPLEV se puede proceder directamente evaluando numéricamente la integral (51) a través del comando `evalf(int(...))` o mediante la función de biblioteca `EllipticF(z,k)` donde  $z = \beta$  es al argumento del seno y  $k = \sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right)$  el parámetro (consulte la ayuda de MAPLE para más detalles).

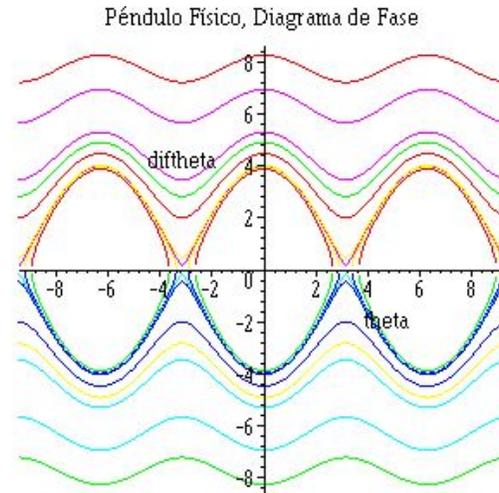


Figura 44: Diagrama de Fase para el Péndulo Físico.

### 0.10.9. ¿Cuán buena es la aproximación lineal ?

Utilizando la expansión en serie de la Integral Elíptica completa de primera especie (51) del péndulo físico, tendremos que se cumple

$$T = 4\sqrt{\frac{L}{g}} \int_0^{\pi} \frac{d\beta}{\sqrt{1 - \text{sen}^2\left(\frac{\theta_{\text{máx}}}{2}\right) \text{sen}^2 \beta}} = 4\sqrt{\frac{L}{g}} F\left(\frac{\pi}{2} \mid \text{sen}^2\left(\frac{\theta_{\text{máx}}}{2}\right)\right) \implies$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right]^2 \left( \text{sen}\left(\frac{\theta_{\text{máx}}}{2}\right) \right)^{2n}$$

más aún, dado que  $\text{sen}\left(\frac{\theta_{\text{máx}}}{2}\right) = \frac{1}{2}\theta_{\text{máx}} - \frac{1}{48}\theta_{\text{máx}}^3 + \frac{1}{3840}\theta_{\text{máx}}^5 + O(\theta_{\text{máx}}^7)$  y que  $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$  tendremos

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right]^2 \left( \frac{1}{2}\theta_{\text{máx}} - \frac{1}{48}\theta_{\text{máx}}^3 + \frac{1}{3840}\theta_{\text{máx}}^5 + O(\theta_{\text{máx}}^7) \right)^{2n} \implies$$

$$T \approx T_0 \left( 1 + \frac{1}{16}\theta_{\text{máx}}^2 + \frac{11}{3072}\theta_{\text{máx}}^4 \right)$$

y si realizamos un estimado de las correcciones al problema lineal que conlleva esta expansión veremos que aún para ángulos  $\theta_{\text{máx}} = \frac{\pi}{4}$  las correcciones son del orden de un pírrico 4%, con lo cual la aproximación lineal resulta bien razonable. Para ángulos  $\theta_{\text{máx}} \gtrsim 1$  las correcciones comienzan a ser significativas y todo este esfuerzo de integración empieza a tener sentido. La siguiente tabla da una idea más clara de este cambio en el período del péndulo y los errores relativos porcentuales respecto al período del péndulo físico linealizado  $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ , cuando se considerarán distintos valores del ángulo máximo,  $\theta_{\text{máx}}$

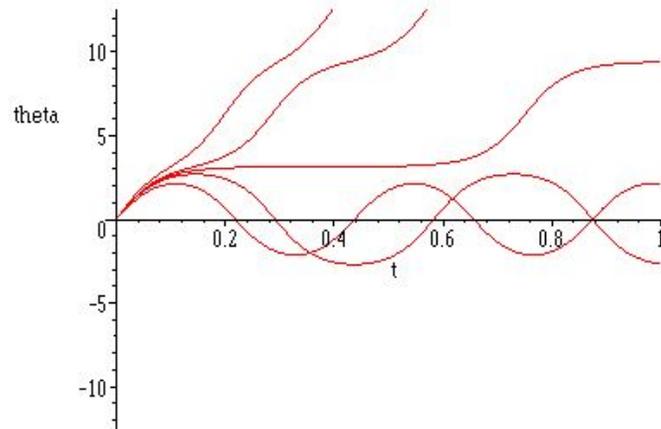


Figura 45: Integración numérica  $(\theta(\tilde{t})$  vs  $\tilde{t}$ , con  $0 \leq \tilde{t} \leq 10$ ) del Péndulo Físico, para distintos valores de la velocidad angular inicial:  $\frac{d\theta(t)}{dt} = \varphi(t) = 3,5, 3,9, 4, 4,1, 4,5$ .

$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2,83845$	$\theta_{\text{máx}} = \frac{\pi}{12}$	$\theta_{\text{máx}} = \frac{\pi}{6}$	$\theta_{\text{máx}} = \frac{\pi}{4}$	$\theta_{\text{máx}} = \frac{\pi}{3}$	$\theta_{\text{máx}} = \frac{\pi}{2}$	$\theta_{\text{máx}} = \frac{2\pi}{3}$
$T$	2,85066	2,88786	2,95191	3,04617	3,35034	3,89685
$\epsilon = 100 \frac{ T - T_0 }{T}$	0,42821	1,71109	3,84368	6,81916	15,2786	37,1283

### 0.10.10. El Péndulo Físico: Integración Numérica

Tal y como indicamos en la primera sección de este proyecto, procedemos a convertir una ecuación de segundo orden en un sistema de ecuaciones diferenciales de dos ecuaciones diferenciales de primer orden. Así, del mismo modo que en la ecuación (??) podremos escribir:

$$\ddot{\theta}(t) = -\omega_0 \text{sen}(\theta) \implies \begin{cases} \frac{d\theta(t)}{dt} = \varphi(t) \\ \frac{d\varphi(t)}{dt} = -\omega_0 \text{sen}(\theta(t)) \end{cases}$$

con lo cual podemos adimensionalizar de dos varias formas, dependiendo de las condiciones iniciales del movimiento. Si adicionalmente hemos adimensionalizado con  $\tilde{t} = \frac{t}{t_{\text{final}}}$  por lo que  $0 \leq \tilde{t} \leq 1$  y  $\frac{1}{t_{\text{final}}} \frac{d(\cdot)}{dt} = \frac{d(\cdot)}{d\tilde{t}}$  y, adicionalmente:  $\tilde{\varphi} = \frac{\varphi}{\varphi_0}$ , con  $\varphi_0 = \left. \frac{d\theta(t)}{dt} \right|_{t=0} \neq 0$ . De este modo el sistema queda escrito

$$\begin{aligned} \frac{d\theta(t)}{dt} = \varphi(t) &\implies \frac{d\theta(\tilde{t})}{d\tilde{t}} = \varphi_0 t_{\text{final}} \tilde{\varphi}(\tilde{t}) &\implies \frac{d\theta(\tilde{t})}{d\tilde{t}} = \Lambda \tilde{\varphi}(\tilde{t}) \\ \frac{d\varphi(t)}{dt} = -\omega_0 \text{sen}(\theta(t)) &\implies \frac{d\tilde{\varphi}(\tilde{t})}{d\tilde{t}} = -\frac{\omega_0^2 t_{\text{final}}}{\varphi_0} \text{sen}(\theta(\tilde{t})) &\implies \frac{d\tilde{\varphi}(\tilde{t})}{d\tilde{t}} = -\Gamma \text{sen}(\theta(\tilde{t})) \end{aligned}$$

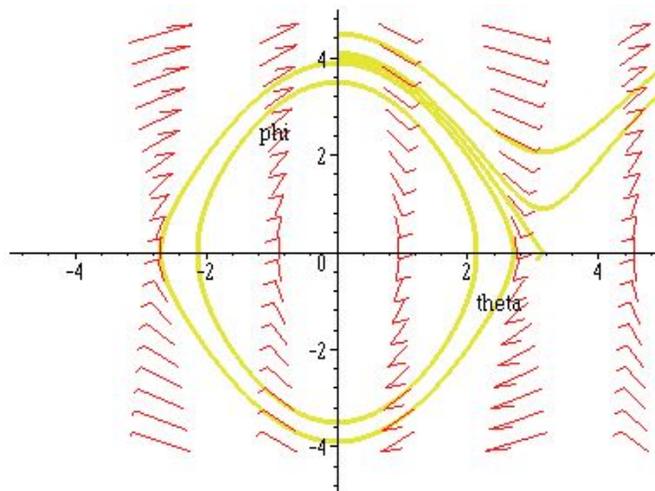


Figura 46: Digrama de Fase para el Péndulo Físico

Nótese que las cantidades  $\tilde{\varphi}(\tilde{t})$ ,  $\theta(\tilde{t})$ ,  $\tilde{t}$ ,  $\Gamma$  y  $\Lambda$  son adimensionales. Acto seguido procedemos a integrar numéricamente el sistema de ecuaciones<sup>8</sup>.

La figura (45) ilustra la evolución del ángulo  $\theta(t)$  vs  $t$ , con  $0 \leq t \leq 10$  del Péndulo Físico, para distintos valores de la velocidad angular inicial:  $\frac{d\theta(t)}{dt} = \dot{\theta}(t) = \varphi(t) = 3,5, 3,9, 4, 4,1, 4,5$ . Mientras que la figura (46) (y también la figura (44)) representan la evolución del sistema en el espacio de fases.  $\theta(t)$  vs  $\frac{d\theta(t)}{dt} = \varphi(t)$ . Las curvas cerradas en esta gráfica corresponden a las curvas oscilantes de la figura (45). Dado que el sistema parte de  $\theta_0 = \theta(t=0)$  y seleccionamos el nivel de energía potencial igual a cero allí, cada una de estas curvas representan un valor de la energía cinética inicial. El caso  $E_c = \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}_0^2 = mg2L$  corresponde a la separatriz, vale decir, la órbita que separa las curvas cerradas de las abiertas. Es claro que en este caso le móvil “subirá” y alcanzará un equilibrio inestable en la posición vertical. En la figura (45) este caso viene ilustrado por la curva que se convierte en horizontal  $0,25 \leq \tilde{t} \leq 0,5$ , luego a partir de  $\tilde{t} \approx 0,5$ , la inexactitud del cálculo numérico genera perturbaciones que en teoría no deberían existir.

$$E_c = \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}_0^2 = mg2L$$

## 0.11. Otra vez Algebra de Series

- Las series se suman

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) (x - x_0)^n$$

<sup>8</sup>En MAPLEV podemos integrar el sistema de dos maneras distintas. La primera haciendo uso del comando `dsolve({sysED,CI}, numeric, vars, options)` donde `sysED` es el sistema de ecuaciones diferenciales, `CI` sus condiciones iniciales. Si necesitáramos un análisis gráfico es mucho más útil el paquete `DEtools`.

- Las series se multiplican

$$\left[ \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \right] \left[ \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n \right] = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$$

con

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \cdots + a_j b_{n-j} + \cdots + a_{n-2} b_2 + a_{n-1} b_1 + a_n b_0$$

- Las series se derivan

$$\frac{d \left[ \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \right]}{dx} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n (x - x_0)^{n-1}$$

Nótese como cambia el comienzo de la serie.

- Los índices en las series son mudos

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n n (x - x_0)^{n-1} = \sum_{j=1}^{\infty} a_j j (x - x_0)^{j-1} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1} (k+1) (x - x_0)^k$$

en la última sumatoria hemos hecho  $k = j - 1$ , por lo cual  $j = k + 1$ .

- Las series se igualan

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n n (x - x_0)^{n-1} \\ \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n &= \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1} (k+1) (x - x_0)^k = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} (n+1) (x - x_0)^n \end{aligned}$$

por lo cual

$$b_n = a_{n+1} (n+1)$$

si la igualdad hubiera sido

$$\sum_{n=0}^{\infty} n a_n (x - x_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n (x - x_0)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} (n+1) (x - x_0)^n \implies a_{n+1} = \frac{a_n}{(n+1)}$$

## 0.12. Un Ejemplo conocido.

Consideremos la conocida ecuación diferencial

$$y'' + y = 0$$

se propone encontrar una solución entorno a  $x = 0$  por lo tanto

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \implies \begin{cases} y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \\ y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} \end{cases}$$

$$y'' + y = 0 \implies \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$y'' + y = 0 \implies \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1)a_{k+2}x^k + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$y'' + y = 0 \implies \sum_{k=0}^{\infty} [(k+2)(k+1)a_{k+2} + a_k]x^k = 0$$

entonces

$$(k+2)(k+1)a_{k+2} + a_k = 0 \implies a_{k+2} = \frac{-a_k}{(k+2)(k+1)} \quad \text{con } k = 0, 1, 2, \dots$$

por lo que

$$a_2 = \frac{-a_0}{2 \cdot 1}; \quad a_4 = \frac{-a_2}{4 \cdot 3} = \frac{-1}{4 \cdot 3} \cdot \frac{(-a_0)}{2} = \frac{a_0}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{a_0}{4!};$$

$$a_6 = \frac{-a_4}{6 \cdot 5} = \frac{-a_0}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = -\frac{a_0}{6!}$$

en general

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k}{(2k)!} a_0$$

Similarmente, para los impares se obtiene

$$a_3 = \frac{-a_1}{3 \cdot 2}; \quad a_5 = \frac{-a_3}{5 \cdot 4} = \frac{-1}{5 \cdot 4} \cdot \frac{(-a_1)}{3 \cdot 2} = \frac{a_1}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{a_1}{5!};$$

$$a_7 = \frac{-a_5}{7 \cdot 6} = \frac{-a_1}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{-a_1}{7!}$$

de donde

$$a_{2k+1} = \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} a_1$$

De este modo, la solución deseada queda como

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + \frac{(-a_0)}{2!} x^2 + \frac{(-a_1)}{3!} x^3 + \frac{a_0}{4!} x^4 + \frac{a_1}{5!} x^5 + \frac{(-a_0)}{6!} x^6 + \frac{(-a_1)}{7!} x^7 + \dots$$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 \left[ \underbrace{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots}_{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}} \right] + a_1 \left[ \underbrace{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots}_{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}} \right]$$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + a_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} = a_0 \cos x + a_1 \sin x$$

### 0.13. Otro Ejemplo menos conocido pero importante

Considere ecuación de Hermite<sup>9</sup> la cual aparece en la solución del oscilador armónico cuántico

$$y'' - 2xy' + \lambda y = 0$$

Para resolver esta ecuación alrededor del punto  $x_0 = 0$ , proponemos la siguiente expansión en series de potencias como solución:

$$y(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j \Rightarrow \begin{cases} y'(x) = \sum_{j=1}^{\infty} j a_j x^{j-1} \\ y''(x) = \sum_{j=2}^{\infty} j(j-1) a_j x^{j-2} \end{cases}$$

entonces la ecuación de Hermite queda como

$$\left[ \sum_{j=2}^{\infty} j(j-1) a_j x^{j-2} \right] - 2 \left[ \sum_{j=1}^{\infty} j a_j x^j \right] + \lambda \left[ \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j \right] = 0$$

reacomodando índices queda como

$$\left[ \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1) a_{k+2} x^k \right] - 2 \left[ \sum_{j=1}^{\infty} j a_j x^j \right] + \lambda \left[ \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j \right] = 0$$

o equivalentemente

$$(2a_2 + \lambda a_0) + \sum_{j=1}^{\infty} [(j+2)(j+1)a_{j+2} - 2ja_j + \lambda a_j] x^j = 0$$

$$a_0 = -\frac{2a_2}{\lambda} \quad \text{y} \quad a_{j+2} = \frac{-(\lambda - 2j)}{(j+2)(j+1)} a_j \quad n \geq 1$$

<sup>9</sup>Charles Hermite, (1822-1901). Matemático francés, especializado en el estudio de teoría de funciones. Profesor en la Universidad de París, ofreció importantes aportaciones al álgebra, las funciones abelianas y la teoría de las formas cuadráticas.

y tendrá como solución

$$y(x) = a_0 \left[ \underbrace{1 - \frac{\lambda}{2!}x^2 - \frac{(4-\lambda)\lambda}{4!}x^4 - \frac{(8-\lambda)(4-\lambda)\lambda}{6!}x^6 - \dots}_{y_0} \right] + a_1 \left[ \underbrace{x + \frac{(2-\lambda)}{3!}x^3 + \frac{(6-\lambda)(2-\lambda)}{5!}x^5 + \frac{(10-\lambda)(6-\lambda)(2-\lambda)}{7!}x^7 + \dots}_{y_1} \right]$$

nótese que para valores pares de  $\lambda$  una u otra serie se corta y genera polinomios de la forma

$\lambda$	Ecuación de Hermite	Polinomio asociado
0	$y'' - 2xy' = 0$	$y_0(x) = 1$
2	$y'' - 2xy' + 2y = 0$	$y_1(x) = x$
4	$y'' - 2xy' + 4y = 0$	$y_0(x) = 1 - 2x^2$
6	$y'' - 2xy' + 6y = 0$	$y_1(x) = x - \frac{2}{3}x^3$
8	$y'' - 2xy' + 8y = 0$	$y_0(x) = 1 - 10x^2 + \frac{35}{3}x^4$

También, puede ser definido a partir de una ecuación:

$$H_\lambda(x) = (-1)^\lambda e^{x^2} \frac{d^\lambda}{dx^\lambda} e^{-x^2}, \quad \lambda = 0, 1, 2, \dots \tag{53}$$

o a través de una relación de recurrencia

$$H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0$$

Las ecuaciones antes mencionadas son ecuaciones homogéneas. En el caso que la ecuación diferencial a resolver por series sea una ecuación inhomogénea, se procederá del mismo modo como se propuso en el caso de que los coeficientes de la ecuación diferencial fueran constantes. Esto es se resuelve, por series la homogénea y luego se propone una solución particular, en forma de serie de potencias, la cual se iguala con la expansión, también en series de potencias, del término inhomogéneo. Como ejemplo, antes de proceder a casos más generales resolvamos la ecuación de Airy<sup>10</sup>, pero inhomogénea planteada arriba. A pesar de su simplicidad, esta ecuación admite sólo soluciones en forma de serie. ahora el caso de la ecuación homogénea de Airy

$$y'' - xy = 0$$

Luego, compruebe, siguiendo el procedimiento arriba expuesto que una posible ecuación inhomogénea de Airy

$$y'' - xy = \exp(x)$$

tiene como solución la siguiente serie de potencias

$$y(x) = \underbrace{y(0) \left\{ 1 + \frac{1}{6}x^3 + \dots \right\}}_{y_1} + \underbrace{y'(0) \left\{ x + \frac{1}{12}x^4 + \dots \right\}}_{y_2} + \underbrace{\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \dots}_{y_{ih}}$$

<sup>10</sup>George Biddell Airy (1801-1892) Matemático y Astrónomo Inglés con contribuciones importantes en la solución de ecuaciones diferenciales y su utilización en Astronomía. Mejoró significativamente las estimaciones teóricas de la órbita de Venus y la Luna. Igualmente realizó estudios matemáticos de la formación del arcoiris y la densidad de la tierra.

Nótese que los dos primeros términos corresponden a la solución de la ecuación homogénea y el último representa la serie que anula el término inhomogéneo. Hemos hecho patente la dependencia de las constantes de integración de las condiciones iniciales.

## 0.14. Método de Diferenciaciones Sucesiva

En general, dada la Ecuación diferencial

$$a_0(x) y(x) + a_1(x) y'(x) + \cdots + a_{n-1}(x) y^{n-1}(x) + a_n(x) y^n(x) = \sum_{i=0}^n a_i(x) y^{(i)}(x) = \mathcal{F}(x) \quad (54)$$

Si los coeficientes  $a_0(x) \cdots a_n(x)$  son funciones analíticas en  $x = x_0$  (se pueden expresar como una serie de Taylor de  $(x - x_0)$  que converge al valor de la función con un radio de convergencia de  $|x - x_0| < \rho$ ), entonces, la ecuación diferencial 54 tendrá como solución única,  $y = y(x)$  de la ecuación homogénea una serie de potencias la cual satisface las  $n$  condiciones iniciales

$$y(x_0) = c_1; \quad y'(x_0) = c_2; \quad y''(x_0) = c_3; \cdots \quad y^{(n)}(x_0) = c_n$$

Adicionalmente, se expandirá en Taylor la función inhomogénea, esto es  $\mathcal{F}(x) = \sum_{i=0}^n \mathcal{F}^{(i)}(x_0) \frac{(x - x_0)^i}{i!}$  y se propondrá una solución particular de la inhomogénea, también en términos de una serie  $y_{ih}(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j$ .

Otra forma de hacerlo es proceder directamente y conservar el término inhomogéneo y a partir de la ecuación completa encontrar los coeficientes de la expansión por Taylor alrededor del punto en el cual se disponga de las condiciones iniciales. La solución en series de Taylor será

$$y_h(x) = y(0) + y'(0)x + y''(0)\frac{x^2}{2!} + y'''(0)\frac{x^3}{3!} + \cdots$$

Así para la siguiente ecuación diferencial

$$y'' - (x + 1)y' + x^2y = x; \quad \text{con } y(0) = 1; \quad \text{y } y'(0) = 1.$$

los coeficientes de la expansión se obtienen de los valores de las derivadas en  $x_0 = 0$ , los cuales salen de las condiciones iniciales, de la ecuación diferencial esto es

$$y(0) = 1; \quad y'(0) = 1; \quad y''(0) = (0) + (0 + 1)y'(0) - 0^2y(0) = 1$$

y de las derivadas de la ecuación diferencial

$$\begin{aligned} y'''(x) &= y'(x) + (x + 1)y''(x) - 2x y(x) - x^2y'(x) + 1 \\ y'''(0) &= y'(0) + (0 + 1)y''(0) - 2(0)y(0) - 0^2y'(0) + 1 \\ y'''(0) &= 1 + 1 + 1 = 3 \end{aligned}$$

finalmente, la solución

$$y_h(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + \cdots$$

Esta solución contiene las dos soluciones (la homogénea y la particular de la inhomogénea) sumadas

Dado  $|x| < 1$  y la ecuación diferencial

$$y'' + \frac{x}{1 - x^2}y' - \frac{1}{1 - x^2}y = \exp(2x); \quad \text{con } y(0) = 1; \quad \text{y } y'(0) = 1.$$

compruebe que tiene como solución general por series

$$y(x) = y(0) \left\{ 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{80}x^6 + \dots \right\} + y'(0)x + \left\{ \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{8}x^4 + \dots \right\}$$

y al incorporar los valores de las condiciones iniciales se obtiene

$$y(x) = 1 + x + x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{30}x^5 + \frac{1}{180}x^6 - \frac{4}{315}x^7 - \frac{79}{10080}x^8 + \dots$$

## 0.15. Métodos de los Coeficientes Indeterminados

En general, para encontrar la solución a la ecuación antes mencionada

$$\sum_{i=0}^n a_i(x) y^{(i)}(x) = \mathcal{F}(x)$$

Se expanden por series de potencias cada uno de los coeficientes  $a_0(x) \dots a_n(x)$ , la función  $\mathcal{F}(x)$  y se expande también la serie

$$y(x) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j \frac{(x-x_0)^j}{j!}$$

luego de bastante transpiración se despejan los coeficiente  $c_0 \dots c_n \dots$  veamos el ejemplo con la misma ecuación del ejemplo anterior.

$$y'' - (x+1)y' + x^2y = x; \quad \text{con } y(0) = 1; \quad \text{y } y'(0) = 1.$$

Como  $x_0 = 0$ , proponemos la siguiente expansión en series de potencias como solución:

$$y(x) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j x^j \quad \implies \begin{cases} y'(x) = \sum_{j=1}^{\infty} j c_j x^{j-1} \\ y''(x) = \sum_{j=2}^{\infty} j(j-1) c_j x^{j-2} \end{cases}$$

y al sustituir

$$\sum_{j=2}^{\infty} j(j-1) c_j x^{j-2} - (x+1) \sum_{j=1}^{\infty} j c_j x^{j-1} + x^2 \sum_{j=0}^{\infty} c_j x^j = x$$

expandiendo

$$\sum_{j=2}^{\infty} j(j-1) c_j x^{j-2} - \sum_{j=1}^{\infty} j c_j x^j - \sum_{j=1}^{\infty} j c_j x^{j-1} + \sum_{j=0}^{\infty} c_j x^{j+2} = x$$

si hacemos  $j-2 = l$  en el primer término,  $j-1 = k$  en el tercero y  $j+2 = m$  en el cuarto, tenemos

$$\sum_{l=0}^{\infty} (l+2)(l+1) c_{l+2} x^l - \sum_{j=1}^{\infty} j c_j x^j - \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) c_{k+1} x^k + \sum_{m=2}^{\infty} c_{m-2} x^m = x$$

acomodando

$$\sum_{n=0}^{\infty} ((n+2)(n+1) c_{n+2} - n c_n - (n+1) c_{n+1}) x^n + \sum_{m=2}^{\infty} c_{m-2} x^m = x$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}c_2 - c_1 &= 0 \\3 \cdot 2 c_3 - c_1 - 2 c_2 &= 1\end{aligned}$$

y la relación de recurrencia para  $n \geq 2$

$$(n+2)(n+1)c_{n+2} - nc_n - (n+1)c_{n+1} - c_{n-2} = 0$$

con la cual se obtienen todos los demás coeficientes.

Si la ecuación es

$$y'' + (\sin x)y' + (\exp x)y = 0$$

se expanden los coeficientes

$$y'' + \left(x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + \dots\right)y' + \left(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{120}x^5 + \dots\right)y = 0$$

se propone la solución en términos de series de potencias

$$y(x) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j x^j \Rightarrow \begin{cases} y'(x) = \sum_{j=1}^{\infty} j c_j x^{j-1} \\ y''(x) = \sum_{j=2}^{\infty} j(j-1) c_j x^{j-2} \end{cases}$$

por lo cual

$$\left[ \sum_{j=2}^{\infty} j(j-1) c_j x^{j-2} \right] + \left( x - \frac{1}{6}x^3 + \dots \right) \left[ \sum_{j=1}^{\infty} j c_j x^{j-1} \right] + \left( 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \dots \right) \left[ \sum_{j=0}^{\infty} c_j x^j \right] = 0$$

acomodando

$$(2c_2 + c_0) + (6c_3 + 2c_1 + c_0)x + (12c_4 + 3c_2 + c_1 + c_0)x^2 + (20c_5 + 4c_3 + c_2 + c_1 + c_0)x^3 + \dots = 0$$

$$2c_2 + c_0 = 0$$

$$6c_3 + 2c_1 + c_0 = 0$$

$$12c_4 + 3c_2 + c_1 + c_0 = 0$$

$$20c_5 + 4c_3 + c_2 + c_1 + c_0 = 0$$

⋮

Ejercicio. Utilice el mismo método para la ecuación ejercicio anterior

$$y'' + \frac{x}{1-x^2}y' - \frac{1}{1-x^2}y = e^{2x}; \quad \text{con } y(0) = 1; \quad \text{y } y'(0) = 1.$$

## 0.16. Los Puntos y las Estrategias

Dada una ecuación diferencial del tipo

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0 \quad \Rightarrow \quad y'' + \frac{Q(x)}{P(x)}y' + \frac{R(x)}{P(x)}y = 0$$

**Puntos ordinarios** Un punto ordinario  $x = x_0$  será aquel alrededor del cual  $p(x) = \frac{Q(x)}{P(x)}$  y  $q(x) = \frac{R(x)}{P(x)}$  sean analíticas en ese punto o

$$\lim_{x \rightarrow x_0} p(x) \equiv \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{Q(x)}{P(x)} = l_1 \quad \text{con } l_1 \text{ finito}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} q(x) \equiv \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R(x)}{P(x)} = l_2 \quad \text{con } l_2 \text{ finito}$$

O también, lo que es lo mismo, que  $p(x) = \frac{Q(x)}{P(x)}$  y  $q(x) = \frac{R(x)}{P(x)}$  tengan una expansión en Taylor alrededor de ese punto  $x = x_0$ .

**Puntos singulares regulares** Un punto  $x = x_0$  se llamará punto singular regular si

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0)p(x) \equiv \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) \frac{Q(x)}{P(x)} = l_3 \quad \text{con } l_3 \text{ finito}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0)^2 q(x) \equiv \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0)^2 \frac{R(x)}{P(x)} = l_4 \quad \text{con } l_4 \text{ finito}$$

O también, lo que es lo mismo, que  $p(x)(x - x_0) = (x - x_0) \frac{Q(x)}{P(x)}$  y  $q(x)(x - x_0)^2 = (x - x_0)^2 \frac{R(x)}{P(x)}$  tengan una expansión en Taylor alrededor de ese punto.

**Puntos singulares irregulares** Ninguna de las anteriores

## 0.17. Ecuaciones e intervalos en puntos regulares

La ecuación de Legendre<sup>11</sup>

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + \lambda(\lambda + 1)y = 0$$

tiene puntos regulares en  $x \neq \pm 1$  y puntos singulares regulares en  $x = \pm 1$ . Pero es analítica en  $x \in (-1, 1)$  lo tanto, todos los  $x$  son ordinarios si  $x \in (-1, 1)$ . En ese intervalo se propone una solución

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

<sup>11</sup> **Adrien Marie Legendre** (1752-1833). Matemático francés, encuadrado en la escuela de París, que surgió tras la revolución de 1789. Realizó una teoría general de las funciones elípticas y divulgó numerosos trabajos de investigadores jóvenes en el campo del análisis matemático.

por lo tanto

$$(1 - x^2) \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - 2x \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + \lambda(\lambda+1) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

multiplicando y acomodando

$$\sum_{j=0}^{\infty} (j+2)(j+1)a_{j+2}x^j - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^n - 2 \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + \lambda(\lambda+1) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

expandiendo

$$0 = 2a_2 + \lambda(\lambda+1)a_0 \{(\lambda+2)(\lambda-1)a_1 + (3 \cdot 2)a_3\} x + \\ + \sum_{n=2}^{\infty} \{(n+2)(n+1)a_{n+2} + (\lambda+n+1)(\lambda-n)a_n\} x^n$$

donde hemos utilizado

$$-n(n-1) - 2n + \lambda(\lambda+1) = (\lambda+n+1)(\lambda-n)$$

por lo tanto

$$a_2 = -\frac{(\lambda+1)\lambda}{2} a_0 \\ a_4 = \frac{(\lambda+3)(\lambda+1)\lambda(\lambda-2)}{4!} a_0 \\ a_{2n} = (-1)^n \frac{(\lambda+2n-1)(\lambda+2n-3) \cdots (\lambda+1)\lambda(\lambda-2) \cdots (\lambda-2n+2)}{(2n)!} a_0$$

y las potencias impares serán

$$a_3 = -\frac{(\lambda+2)(\lambda-1)}{3!} a_1 \\ a_5 = \frac{(\lambda+4)(\lambda+2)(\lambda-1)(\lambda-3)}{5!} a_1 \\ a_{2n+1} = (-1)^n \frac{(\lambda+2n)(\lambda+2n-2) \cdots (\lambda+2)(\lambda-1) \cdots (\lambda-2n+1)}{(2n+1)!} a_1$$

y su solución general de la forma

$$y(x) = a_0 y_0(x) + a_1 y_1(x)$$

con

$$y_0(x) = 1 - \frac{(\lambda+1)\lambda}{2} x^2 + \frac{(\lambda+3)(\lambda+1)\lambda(\lambda-2)}{4!} x^4 + \cdots \\ y_1(x) = x - \frac{(\lambda+2)(\lambda-1)}{3!} x^3 + \frac{(\lambda+4)(\lambda+2)(\lambda-1)(\lambda-3)}{5!} x^5 + \cdots$$

si  $\lambda = 2n$  una de las series se corta solución es un polinomio de potencias pares y si  $\lambda = 2n + 1$  la otra se corta en uno de potencias impares

$\lambda$	Ecuación de Legendre	Polinomio Asociado
0	$(1-x^2)y'' - 2xy' = 0$	$y_0(x) = 1$
1	$(1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$	$y_1(x) = x$
2	$(1-x^2)y'' - 2xy' + 6y = 0$	$y_0(x) = 1 - 3x^2$
3	$(1-x^2)y'' - 2xy' + 12y = 0$	$y_1(x) = x - \frac{5}{3}x^3$
4	$(1-x^2)y'' - 2xy' + 20y = 0$	$y_0(x) = 1 - 10x^2 + \frac{35}{3}x^4$

Los polinomios de Legendre son funciones que surgen en problemas de electrostática como solución de la ecuación de Legendre y son efectivamente polinomios para  $\lambda$  entero. Los Polinomios de Legendre también pueden ser generados a partir de la Fórmula de Rodrigues

$$P_n(x) = \frac{1}{n!2^n} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

con  $P_0(x) = 1$ . También se dispone de una relación de recurrencia

$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x)$$

## 0.18. El Método de Frobenius

Para la solución de ecuaciones diferenciales lineales ordinarias alrededor de puntos singulares regulares se utiliza el método de Frobenius<sup>12</sup>. Dada una ecuación diferencial

$$y'' + F_1(x)y' + F_2(x)y = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad y'' + \frac{f_1(x)}{(x-x_0)}y' + \frac{f_2(x)}{(x-x_0)^2}y = 0 \quad (55)$$

donde  $F_1(x)$  y  $F_2(x)$  tienen singularidades regulares en  $x = x_0$  y por lo tanto  $f_1(x)$  y  $f_2(x)$  son analíticas alrededor de ese punto entonces, la propuesta de solución será una serie de Frobenius

$$y(x) = (x-x_0)^m \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \quad (56)$$

donde  $n$  es entero positivo, pero  $m$  puede ser entero positivo (entonces la serie de Frobenius es una serie de Taylor) o entero negativo (entonces la serie de Frobenius es una serie de Laurent), o un racional. Por lo cual una serie de Frobenius incluye a las serie de Taylor y Laurent. Para hacer las cosas más simples supongamos, sin perder generalidad,  $x_0 = 0$ . Además, como  $f_1(x)$  y  $f_2(x)$  son analíticas entonces

$$f_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \quad \text{y} \quad f_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad (57)$$

por lo tanto

$$x^2 y'' + x f_1(x) y' + f_2(x) y = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 y'' + x \left[ \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \right] y' + \left[ \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \right] y = 0$$

<sup>12</sup>Ferdinand Georg Frobenius (1849-1917) Matemático Alemán famoso por sus contribuciones en Teoría de Grupos y métodos para resolver ecuaciones diferenciales.

y con la propuesta de serie de Frobenius

$$y(x) = x^m \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \Rightarrow \quad y'(x) = mx^{m-1} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right] + x^m \left[ \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \right]$$

$$\downarrow$$

$$y''(x) = m(m-1)x^{m-2} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right] + 2mx^{m-1} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \right] + x^m \left[ \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} \right]$$

sustituyendo

$$0 = x^2 \left\{ m(m-1)x^{m-2} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right] + 2mx^{m-1} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \right] + x^m \left[ \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} \right] \right\} +$$

$$+ x \left[ \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \right] \left\{ mx^{m-1} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right] + x^m \left[ \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \right] \right\} + \left[ \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \right] \left\{ x^m \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right\}$$

acomodando

$$0 = \left\{ m(m-1)x^m \left[ \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right] + 2mx^m \left[ \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n \right] + x^m \left[ \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^n \right] \right\} +$$

$$+ \left[ \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \right] \left\{ mx^m \left[ \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right] + x^m \left[ \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n \right] \right\} + \left[ \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \right] \left\{ x^m \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right\}$$

o

$$0 = x^m \left( \left\{ m(m-1) \left[ \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right] + 2m \left[ \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n \right] + \left[ \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^n \right] \right\} + \right.$$

$$\left. + \left[ \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \right] \left\{ m \left[ \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right] + \left[ \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n \right] \right\} + \left[ \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \right] \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right\} \right)$$

Expandiendo las series tendremos

$$0 = x^m \left\{ \underbrace{a_0[m(m-1) + b_0m + c_0]}_{EI(m)} \right\} + \quad (58)$$

$$+ x^{m+1} \left\{ \underbrace{a_1[m(m+1) + b_0(m+1) + c_0]}_{EI(m+1)} + a_0[b_1m + c_1] \right\} + \quad (59)$$

$$+ x^{m+2} \left\{ \underbrace{a_2[(m+2)(m+1) + b_0(m+2) + c_0]}_{EI(m+2)} + a_1[b_1(m+1) + c_1] + a_0[b_2m + c_2] \right\} \quad (60)$$

$$+ x^{m+3} \left\{ \underbrace{a_3[(m+3)(m+2) + b_0(m+3) + c_0]}_{EI(m+3)} + a_2[b_1(m+2) + c_1] + \right. \quad (61)$$

$$\left. + a_1[b_2(m+1) + c_2] + a_0[b_3m + c_3] \right\} + \dots$$

⋮

$$+ x^{m+n} \left\{ \underbrace{a_n[(m+n)(m+n-1) + b_0(m+n) + c_0]}_{EI(m+n)} + a_{n-1}[b_1(m+n-1) + c_1] + \right. \quad (62)$$

$$\left. + a_{n-2}[b_2(m+n-2) + c_2] + a_{n-3}[b_3(m+n-3) + c_3] + \dots \right. \quad (63)$$

$$\left. + a_1[b_{n-1}(m+1) + c_{n-1}] + a_0[b_nm + c_n] \right\} \quad (64)$$

+ ⋯

la cual puede ser reacomodada aún más, y toma la forma elegante y compacta de

$$0 = x^m \{ a_0 EI(m) \} + \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ a_i EI(m+i) + \sum_{k=0}^{i-1} a_k [(m+k)b_{i-k} + c_{i-k}] \right\} x^{m+i} \quad (65)$$

donde hemos identificado  $EI(m) = m(m-1) + b_0m + c_0$ . Como es de esperarse, este polinomio se anula si los coeficientes de  $x^m \dots x^{m+i}$  se anulan. La primera de las ecuaciones que surge es la ecuación indicadora o índice

$$a_0 \neq 0 \quad \implies \quad EI(m) = m(m-1) + b_0m + c_0 = 0 \quad (66)$$

que no es otra cosa que un polinomio de segundo grado en  $m$ . Al anular el coeficiente de  $x^{m+i}$

$$\left\{ a_i EI(m+i) + \sum_{k=0}^{i-1} a_k [(m+k)b_{i-k} + c_{i-k}] \right\} = 0 \quad (67)$$

obtendremos la relación de recurrencia para la serie de Frobenius, correspondientes a cada raíz de la ecuación indicadora (66). Dato que la ecuación indicadora es un polinomio de segundo grado para  $m$ , entonces de allí se derivan dos raíces  $m_1$  y  $m_2$ . Dependiendo de como sean estas raíces distinguiremos tres casos:

1.  $m_1 \neq m_2 \wedge m_1 - m_2 \neq N$  con  $N$  entero.

En este caso, la solución en términos de la serie de Frobenius para la ecuación diferencial será

$$y(x) = C_1 \underbrace{\|x\|^{m_1} \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(m_1) x^n \right]}_{y_1(x)} + C_2 \underbrace{\|x\|^{m_2} \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(m_2) x^n \right]}_{y_2(x)} \quad (68)$$

2.  $m_1 = m_2$

En este caso, la solución en términos de la serie de Frobenius para la ecuación diferencial será

$$y(x) = C_1 \underbrace{\|x\|^m \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(m) x^n \right]}_{y_1(x)} + C_2 \underbrace{\left\{ \underbrace{\|x\|^m \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(m) x^n \right]}_{y_1(x)} \ln x + \|x\|^m \left[ \sum_{n=0}^{\infty} B_n(m) x^n \right] \right\}}_{y_2(x)} \quad (69)$$

3.  $m_1 \neq m_2 \wedge m_1 - m_2 = N$  con  $N$  entero positivo.

En este caso, la solución en términos de la serie de Frobenius para la ecuación diferencial será

$$y(x) = C_1 \underbrace{\|x\|^{m_1} \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(m_1) x^n \right]}_{y_1(x)} + C_2 \underbrace{\left\{ f \underbrace{\|x\|^{m_1} \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(m_1) x^n \right]}_{y_1(x)} \ln x + \|x\|^{m_2} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} a_n(m_2) x^n \right] \right\}}_{y_2(x)} \quad (70)$$

Donde las constantes  $a_n(m_1)$ ,  $a_n(m_2)$ ,  $B_n(m_1)$  y  $f$ , surgen de sustituir estas soluciones en la ecuación diferencial y resolver por el método de los coeficientes indeterminados. Nótese que hemos indicado explícitamente que los coeficientes  $a_n = a_n(m_1)$ ;  $a_n = a_n(m_2)$ ;  $B_n = B_n(m_2)$  corresponden a las series de cada una de las raíces de la ecuación indicadora.

**En resumen**, si una ecuación diferencial  $y'' + F_1(x)y' + F_2(x)y = 0$  presenta puntos singulares regulares para  $F_1(x)$  y  $F_2(x)$  en  $x = x_0$ . Lo que se traduce en que

$$y'' + \frac{f_1(x)}{(x-x_0)}y' + \frac{f_2(x)}{(x-x_0)^2}y = 0 \quad \text{con} \quad \begin{cases} f_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n \\ f_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n \end{cases}$$

es decir, que  $f_1(x)$  y  $f_2(x)$  sean analíticas en torno a  $x = x_0$ . Entonces se aplica el método de Frobenius. Para ello,

1. se propone una solución en series de potencias de Frobenius:

$$y(x) = x^m \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

con  $m \in \mathfrak{R} \wedge n \in N$ ,

2. se sustituye en la ecuación diferencial y se aísla el término independiente (de orden cero en  $n$ ). El coeficiente de este término se anula e implica la ecuación la indicadora o índice

$$a_0 \neq 0 \quad \implies \quad EI(m) = m(m-1) + b_0 m + c_0 = 0$$

que no es otra cosa que un polinomio de segundo grado en  $m$ . De esta ecuación emergen dos raíces  $m_2 \wedge m_1$ , en función de estas raíces, procedemos de distinto modo

- a) si  $m_1 \neq m_2 \wedge m_1 - m_2 \neq N$  con  $N$  entero entonces tendremos dos series de Frobenius

$$y(x) = C_1 x^{m_1} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} a_n(m_1) x^n \right] + C_2 x^{m_2} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} a_n(m_2) x^n \right]$$

- b) si  $m_1 = m_2$  tenemos que insertar un logaritmo

$$y(x) = x^{m_1} \left\{ (C_1 + C_2 \ln x) \left[ \sum_{n=0}^{\infty} a_n(m) x^n \right] + C_2 \left[ \sum_{n=0}^{\infty} B_n(m) x^n \right] \right\}$$

- c)  $m_1 \neq m_2 \wedge m_1 - m_2 = N$  con  $N$  entero positivo, entonces, como por arte de magia

$$y(x) = x^{m_1} \left\{ (C_1 + f \ln x) \left[ \sum_{n=0}^{\infty} a_n(m_1) x^n \right] \right\} + C_2 x^{m_2} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} a_n(m_2) x^n \right]$$

3. Seguidamente se determina, según el caso, se determinan las relaciones de recurrencias para los distintos coeficientes  $a_n = a_n(m_1)$ ;  $a_n = a_n(m_2)$ ;  $B_n = B_n(m_2)$ ;  $G_n = G_n(m_2)$  a partir de la ecuación (67)

$$\left\{ a_n EI(m+n) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k [(m+k) b_{n-k} + c_{n-k}] \right\} = 0$$

tomando en cuenta los coeficientes de los desarrollos en series de potencias de las funciones

$$f_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \quad \text{y} \quad f_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

si anulamos los coeficientes de  $x^{m+n}$

$$a_n EI(m+n) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k [(m+k) b_{n-k} + c_{n-k}] = 0 \quad \iff \quad a_n = - \frac{\sum_{k=0}^{n-1} a_k [(m+k) b_{n-k} + c_{n-k}]}{EI(m+n)}$$

entonces se obtiene la relación de recurrencia, al menos para los casos (68) y (69) en los cuales  $EI(m+n) \neq 0$ . El caso  $EI(m+n) = 0$ , vale decir  $m_1 \neq m_2 \wedge m_1 - m_2 = N$  con  $N$  será analizado en detalle más adelante.

**0.18.1.**  $m_1 \neq m_2 \wedge m_1 - m_2 \neq N$  con  $N$  entero.

En ese caso es claro que la resolver la ecuación indicadora y sustituir  $m_1$  en el resto de los coeficientes, se va despejando todos los coeficientes  $a_0 \cdots a_n$  en términos de  $a_0$ . Igualmente al sustituir  $m_2$  encontramos la otra solución y ambas son linealmente independientes y la solución será

$$y(x) = C_1 x^{m_1} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right] + C_2 x^{m_2} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right]$$

Ejemplo, encuentre la solución en términos de series de Frobenius de la siguiente ecuación

$$x^2 y'' + x \left( x + \frac{1}{2} \right) y' - \left( x^2 + \frac{1}{2} \right) y = 0$$

al dividir por  $x^2$  identificamos que a  $x = 0$  es un punto singular regular. Proponemos por lo tanto una serie de Frobenius  $y(x) = x^m \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  como posible solución. La ecuación indicadora  $EI(m) = m(m-1) + b_0 m + c_0 = 0$  queda ahora, como

$$\left. \begin{array}{l} m = 1 \\ m = \frac{-1}{2} \end{array} \right\} \iff m(m-1) + \frac{1}{2}m - \frac{1}{2} = 0 \iff \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} b_0 = \frac{1}{2} \\ b_1 = 1 \end{array} \right\} \iff f_1(x) = \frac{1}{2} + x \\ \left\{ \begin{array}{l} c_0 = -\frac{1}{2} \\ c_1 = 0 \\ c_2 = -1 \end{array} \right\} \iff f_2(x) = -\frac{1}{2} - x^2 \end{array} \right.$$

los demás coeficientes  $b_2 = b_3 = \cdots = b_n = \cdots = 0$  y  $c_3 = c_4 = \cdots = c_n = \cdots = 0$ .

- El primer término del coeficiente de  $x^{m+n}$ , puede ser escrito en términos de genéricos, como

$$EI(m+n) = (m+n)(m+n-1) + \underbrace{\frac{1}{2}}_{b_0} (m+n) + \underbrace{\left(-\frac{1}{2}\right)}_{c_0} = m^2 + 2mn - \frac{1}{2}m + n^2 - \frac{1}{2}n - \frac{1}{2} \quad (71)$$

- El segundo término de ese mismo coeficiente, es una sumatoria en la cual intervienen los coeficientes de las expansiones de  $f_1(x)$  y  $f_2(x)$  (ecuación (57)). Como de esta expansión sobrevive  $b_1 = 1$  significa que sólo aparecen el coeficiente para el cual  $n-k=1 \Rightarrow k=n-1$  y como también sobrevive  $c_2 = -1$ , tendremos que  $n-k=2 \Rightarrow k=n-2$ , también estará presente. Esto es

$$a_{n-1} \left[ (m+n-1) \cdot \underbrace{1}_{b_1} \right] + a_{n-2} \left[ \underbrace{(-1)}_{c_2} \right] \quad (72)$$

En definitiva el coeficiente completo se escribe como

$$a_n \left[ m^2 + 2mn - \frac{1}{2}m + n^2 - \frac{1}{2}n - \frac{1}{2} \right] + a_{n-1} [m+n-1] - a_{n-2} = 0 \quad (73)$$

con lo cual la relación de recurrencia general será

$$a_n = \frac{a_{n-2} - a_{n-1} [m + n - 1]}{m^2 + 2mn - \frac{1}{2}m + n^2 - \frac{1}{2}n - \frac{1}{2}} \quad \text{para } n \geq 2 \quad (74)$$

Dependiendo del valor de  $m$  tendremos una relación de recurrencia para la primera de las series  $m = 1$  o para la segunda,  $m = -\frac{1}{2}$ . Analicemos cada caso por caso. Para el caso particular  $m = 1$ , se obtiene la relación de recurrencia:

$$a_n = (a_{n-2} - na_{n-1}) \frac{2}{2n^2 + 3n} \quad \text{para } n \geq 2$$

y se encuentra  $a_1$  al utilizar el coeficiente de  $x^{m+1}$  (ecuación (59))

$$a_1 \left[ 1(1+1) + \frac{1}{2}(1+1) - \frac{1}{2} \right] + a_0 [1+0] = 0 \quad \implies \quad a_1 = -\frac{2}{5}a_0$$

con lo cual

$$\begin{aligned} n = 2 &\implies a_2 = \frac{1}{7}(-2a_1 + a_0) = \frac{1}{7}\left(\frac{4}{5}a_0 + a_0\right) = \frac{9}{35}a_0 &\implies a_2 = \frac{9}{35}a_0 \\ n = 3 &\implies a_3 = \frac{2}{27}(-3a_2 + a_1) = \frac{2}{27}\left(-\frac{27}{35}a_0 - \frac{2}{5}a_0\right) = -\frac{82}{945}a_0 &\implies a_3 = -\frac{82}{945}a_0 \\ n = 4 &\implies a_4 = \frac{1}{22}(-4a_3 + a_2) = \frac{1}{22}\left(\frac{328}{945}a_0 - \frac{9}{35}a_0\right) = \frac{571}{20790}a_0 &\implies a_4 = \frac{571}{20790}a_0 \\ &\vdots && \vdots \end{aligned}$$

Así la primera solución será

$$y_1(x) = a_0 x \left( 1 - \frac{2}{5}x + \frac{9}{35}x^2 - \frac{82}{945}x^3 + \frac{571}{20790}x^4 + \dots \right)$$

Del mismo modo se construye la segunda solución linealmente independiente a partir de  $m = -\frac{1}{2}$ . Así, la relación de recurrencia para los coeficientes de la serie de Frobenius  $m = -\frac{1}{2}$  será:

$$a_n = \left( a_{n-2} - \left( n - \frac{3}{2} \right) a_{n-1} \right) \frac{2}{2n^2 - 3n} \quad \text{para } n \geq 2$$

y

$$a_1 \left[ \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{2} \right) + \left( \frac{1}{2} \right) \left( \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2} \right] + a_0 \left[ -\frac{1}{2} \right] = 0 \quad \implies \quad a_1 = -a_0$$

por lo cual

$$\begin{aligned} n = 2 &\implies a_2 = -\frac{1}{2}a_1 + a_0 = \frac{1}{2}a_0 + a_0 = \frac{3}{2}a_0 &\implies a_2 = \frac{3}{2}a_0 \\ n = 3 &\implies a_3 = \frac{2}{9} \left( -\frac{3}{2}a_2 + a_1 \right) = \frac{2}{9} \left( -\frac{9}{4}a_0 - a_0 \right) = -\frac{13}{18}a_0 &\implies a_3 = -\frac{13}{18}a_0 \\ n = 4 &\implies a_4 = \frac{1}{10} \left( -\frac{5}{2}a_3 + a_2 \right) = \frac{1}{10} \left( \frac{65}{36}a_0 + \frac{3}{2}a_0 \right) = \frac{119}{360}a_0 &\implies a_4 = \frac{119}{360}a_0 \\ &\vdots && \vdots \end{aligned}$$

Por lo cual, la solución general será

$$y(x) = C_1 x \left( 1 - \frac{2}{5}x + \frac{9}{35}x^2 - \frac{82}{945}x^3 + \frac{571}{20790}x^4 + \dots \right) \\ + C_2 x^{-\frac{1}{2}} \left( 1 - x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{13}{18}x^3 + \frac{119}{360}x^4 + \dots \right)$$

Nótese que esta solución vale para  $0 < \|x\| < \infty$  por cuanto para  $x < 0$ , la segunda solución se hace imaginaria pero se puede resolver haciendo  $C_2 = i C_3$

Como ejercicio resuelva

$$2x^2 y'' - x y' - (x+1) y = 0$$

### 0.18.2. $m_1 = m_2$ .

Del mismo modo, si tenemos una ecuación diferencial

$$x^2 y'' + x \underbrace{[x F_1(x)]}_{f_1(x)} y' + \underbrace{[x^2 F_2(x)]}_{f_2(x)} y = 0 \quad \iff \quad L\{y\} = x^2 y'' + x f_1(x) y' + f_2(x) y = 0 \quad (75)$$

donde en la cual  $F_1(x)$  y  $F_2(x)$  tienen singularidades regulares en  $x = 0$  pero  $f_1(x)$  y  $f_2(x)$  son analíticas para ese punto, vale decir

$$f_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \quad \text{y} \quad f_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

se aplica el Método de Frobenius. Pero antes de proceder a ilustrar este caso en el cual ambas raíces coinciden, veamos, un poco de dónde surge la forma general de la solución (69). Para ello reacomodemos la ecuación diferencial (75) de la forma

$$x^2 y'' + x f_1(x) y' + f_2(x) y = \left\{ x^2 \frac{d^2}{dx^2} + x f_1(x) \frac{d}{dx} + f_2(x) \right\} y \equiv \mathcal{L}\{y\} = 0$$

donde  $\mathcal{L}\{\bullet\}$  está concebido como un operador lineal. Es ilustrador mostrar de dónde sale la forma curiosa de la solución de la ecuación diferencial (69). Para ello, recordamos que

$$\mathcal{L}\{y\} \equiv x^m \{a_0 EI(m)\} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n EI(m+n) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k [(m+k) b_{n-k} + c_{n-k}] \right\} x^{m+n}$$

si anulamos los coeficientes de  $x^{m+n}$  entonces

$$a_n EI(m+n) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k [(m+k) b_{n-k} + c_{n-k}] = 0 \quad \iff \quad a_n = - \frac{\sum_{k=0}^{n-1} a_k [(m+k) b_{n-k} + c_{n-k}]}{EI(m+n)}$$

considerando  $EI(m+n) \neq 0$  por lo tanto, para los  $a_n$  seleccionados (que anulen el coeficiente  $x^{m+n}$ ) y considerando el caso  $m_1 = m_2$

$$\mathcal{L}\{y\}(m, x) = \{a_0 EI(m)\} x^m = a_0 (m - m_1)^2 x^m$$

Nótese que estamos considerando  $\mathcal{L}\{y\}(m, x)$  como una función de  $m$ , y  $x$ . Por lo cual evaluando en  $m = m_1$

$$\mathcal{L}\{y\}(m, x)|_{m=m_1} = a_0 (m - m_1)^2 x^m |_{m=m_1} = 0$$

pero además podemos intentar derivar respecto a la constante  $m$

$$\frac{\partial \{\mathcal{L}\{y\}(m, x)\}}{\partial m} = \frac{\partial}{\partial m} \left\{ x^2 \frac{d^2}{dx^2} + x f_1(x) \frac{d}{dx} + f_2(x) \right\} y = \left\{ x^2 \frac{d^2}{dx^2} + x f_1(x) \frac{d}{dx} + f_2(x) \right\} \frac{\partial y}{\partial m}$$

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{\partial y}{\partial m} \right\} (m, x) = \frac{\partial}{\partial m} \left( a_0 (m - m_1)^2 x^m \right) = a_0 \left[ (m - m_1)^2 x^m \ln x + 2(m - m_1) x^m \right]$$

y comprobamos que también se anula al evaluarla en  $m = m_1$

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{\partial y}{\partial m} \right\} (m, x) \Big|_{m=m_1} = a_0 \left[ (m - m_1)^2 x^m \ln x + 2(m - m_1) x^m \right] \Big|_{m=m_1} = 0$$

por lo tanto  $\left\{ \frac{\partial y}{\partial m} \right\} (m, x) \Big|_{m=m_1}$  también es solución, con lo cual la segunda toma la forma

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \left\{ \frac{\partial y}{\partial m} \right\} (m, x) \Big|_{m=m_1} &= \frac{\partial}{\partial m} \left\{ \|x\|^m \left[ a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(m) x^n \right] \right\} \Big|_{m=m_1} \\ &= (x^{m_1} \ln x) \left[ a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(m_1) x^n \right] + x^{m_1} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial a_n(m)}{\partial m} \Big|_{m=m_1} x^n \right] \end{aligned}$$

y la solución general tendrá la forma

$$\begin{aligned} y(x) &= C_1 \underbrace{\|x\|^{m_1} \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(m_1) x^n \right]}_{y_1(x)} \\ &+ C_2 \underbrace{\left\{ \underbrace{\|x\|^{m_1} \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(m_1) x^n \right]}_{y_1(x)} \ln x + \|x\|^{m_1} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} b_n(m_1) x^n \right] \right\}}_{y_2(x)} \end{aligned}$$

Analicemos, como ejemplo un caso particular de la ecuación de Bessel<sup>13</sup>

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 + \nu^2) y = 0$$

<sup>13</sup>**Fredrich Wilhel Bessel** (1784-1846). Astrónomo y matemático alemán. Aportó notables contribuciones a la astronomía posicional, la geodesia y la mecánica celeste. Particularmente, se dedicó a aumentar la exactitud de las mediciones de la posición y el movimiento de los astros. La precisión de sus mediciones hizo posible que determinara pequeñas irregularidades en los movimientos de Urano lo condujo a predecir la existencia de Neptuno. Análogos razonamientos lo llevaron a especular sobre la presencia de estrellas compañeras en Sirio y Procyon. A partir de datos registrados en el siglo XVII, calculó la órbita del cometa Halley

Una vez más, la ecuación viene parametrizada por  $\nu$  y dependiendo de su valor tendremos una familia de soluciones. Consideremos el caso  $\nu = 0$

$$x^2 y'' + x y' + x^2 y = 0$$

la ecuación indicadora  $EI(m) = m(m-1) + b_0 m + c_0 = 0$  nos queda como

$$m = 0 \iff m(m-1) + m = 0 \iff \left\{ \begin{array}{l} b_0 = 1 \iff f_1(x) = 1 \\ \left\{ \begin{array}{l} c_0 = 0 \\ c_1 = 0 \\ c_2 = 1 \end{array} \right\} \iff f_2(x) = x^2 \end{array} \right.$$

los demás coeficientes  $b_1 = b_2 = b_3 = \dots = b_n = 0$  y  $c_3 = c_4 = \dots = c_n = 0$ . Con lo cual  $EI(n) = n(n-1) + n = n^2$ , Por lo tanto, la relación de recurrencia se obtiene del coeficiente de  $x^{m+n}$

$$a_n = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} a_k [(m+k)b_{n-k} + c_{n-k}]}{EI(m+n)} \quad \text{dado que } \left\{ \begin{array}{l} b_1 \neq 0 \Rightarrow n-k=1 \Rightarrow k=n-1 \\ c_2 \neq 0 \Rightarrow n-k=2 \Rightarrow k=n-2 \end{array} \right.$$

$$a_n(m) = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} a_k(m) [(m+k)b_{n-k} + c_{n-k}]}{(m+n)(m+n-1) + (m+n)} = \frac{a_{n-1}(m)(m+n-1) + a_{n-2}(m)}{(m+n)^2}$$

tomando  $m = 0$ , se tiene

$$a_n(0) = -\frac{\sum_{k=0}^{n-1} a_k(0) [kb_{n-k} + c_{n-k}]}{n^2} \quad \text{con } \left\{ \begin{array}{l} b_1 \neq 0 \Rightarrow n-k=1 \Rightarrow k=n-1 \\ c_2 \neq 0 \Rightarrow n-k=2 \Rightarrow k=n-2 \end{array} \right.$$

con lo cual

$$a_n(0) = -\frac{a_{n-2}(0)[c_2] + a_{n-1}(0)[(n-1)b_1]}{n^2} = -\frac{a_{n-2}(0) + a_{n-1}(0)(n-1)}{n^2} \quad \text{para } n \geq 2$$

Otra vez, al anular el coeficiente para  $x^{m+1}$  (ecuación (59)) se obtiene  $a_1[0(0+1) + 1 \cdot (0+1) + 0] + a_0[0 \cdot 0 + 0] = 0 \Rightarrow a_1 = 0$ . Con lo cual es claro que se anulan todos los coeficientes impares, y así

$$a_{2n}(0) = -\frac{a_{2n-2}(0)}{(2n)^2} \quad \text{para } n = 1, 2, 3, \dots$$

con lo cual

$$\begin{aligned}
n = 1 &\implies a_2(0) = -\frac{1}{4}a_0(0) &&\implies a_2(0) = -\frac{1}{4}a_0(0) \\
n = 2 &\implies a_4(0) = -\frac{1}{(2 \cdot 2)^2}a_2(0) = \frac{1}{(2 \cdot 2)^2 2^2}a_0(0) &&\implies a_4(0) = \frac{1}{(2 \cdot 2)^2 2^2}a_0(0) \\
n = 3 &\implies a_6(0) = -\frac{1}{(2 \cdot 3)^2}a_4(0) = -\frac{1}{(2 \cdot 3)^2} \left[ \frac{1}{(2 \cdot 2)^2 2^2}a_0(0) \right] &&\implies a_6(0) = \frac{-1}{(2 \cdot 3)^2 2^3}a_0(0) \\
&\vdots &&\vdots \\
n = l &\implies a_{2l}(0) = -\frac{a_{2l-2}(0)}{(2l)^2} = \frac{(-1)^l}{2^{2l} (l!)^2}a_0(0) &&\implies a_{2l}(0) = \frac{(-1)^l}{2^{2l} (l!)^2}a_0(0)
\end{aligned}$$

por lo tanto la primera de las soluciones será

$$y_1(x) = a_0 \underbrace{\left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n} (n!)^2} x^{2n} \right]}_{J_0(x)}$$

Donde  $J_0(x)$  se conoce como la función de Bessel de primera especie de orden cero.

Para calcular la segunda solución de la ecuación de Bessel se sustituye

$$y_2(x) = J_0(x) \ln x + \sum_{n=0}^{\infty} B_n x^n \quad \text{en la ecuación } x^2 y'' + x y' + x^2 y = 0$$

para ello se requieren sus derivadas

$$y_2(x) = J_0(x) \ln x + \sum_{n=0}^{\infty} B_n x^n \quad \Rightarrow \quad y_2'(x) = J_0'(x) \ln x + \frac{J_0(x)}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n n x^{n-1} \quad y$$

↓

$$y_2''(x) = J_0''(x) \ln x + 2 \frac{J_0'(x)}{x} - \frac{J_0(x)}{x^2} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n n(n-1) x^{n-2}$$

entonces

$$\begin{aligned}
0 = x^2 &\left[ J_0''(x) \ln x + 2 \frac{J_0'(x)}{x} - \frac{J_0(x)}{x^2} + \sum_{n=2}^{\infty} B_n n(n-1) x^{n-2} \right] + \\
&+ x \left[ J_0'(x) \ln x + \frac{J_0(x)}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n n x^{n-1} \right] + x^2 \left[ J_0(x) \ln x + \sum_{n=0}^{\infty} B_n x^n \right]
\end{aligned}$$

con lo cual

$$0 = \left( \underbrace{x^2 J_0''(x) + x J_0'(x) + J_0(x)}_{=0} \right) \ln x + 2 J_0'(x) x + \sum_{n=2}^{\infty} B_n n(n-1) x^n + \sum_{n=1}^{\infty} B_n n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} B_n x^{n+2}$$

y finalmente

$$B_1 x + 2^2 B_2 x^2 + \sum_{n=3}^{\infty} (B_n n^2 + B_{n-2}) x^n = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2n}{2^{2n} (n!)^2} x^{2n}$$

es claro que para los coeficientes impares se obtiene  $b_1 = b_3 = b_5 = \dots = b_{2n+1} \dots = 0$  ya que

$$B_1 x + 2^2 B_2 x^2 + (3^2 B_3 + B_1) x^3 + (4^2 B_4 + B_2) x^4 + (5^2 B_5 + B_3) x^5 + \dots = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2n}{2^{2n} (n!)^2} x^{2n}$$

mientras que para las potencias pares tendremos la relación de recurrencia

$$B_{2n} = \frac{1}{(2n)^2} \left[ \frac{(-1)^{n+1} n}{2^{2(n-1)} (n!)^2} - b_{2n-2} \right]$$

entonces

$$\begin{aligned} B_2 &= 2 \frac{1}{2^2 (1!)^2} \\ B_4 &= \frac{1}{(2 \cdot 2)^2} \left( -\frac{4}{2^2 (2!)^2} - 2 \frac{1}{2^2 (1!)^2} \right) = -\frac{1}{4^2 2^2} \left( 1 + \frac{1}{2} \right) \\ B_6 &= \frac{1}{(6)^2} \left[ \frac{3}{2^4 (3!)^2} - b_4 \right] = \frac{1}{6^2} \left[ \frac{3}{2^4 (3!)^2} + \frac{1}{4^2 2^2} \left( 1 + \frac{1}{2} \right) \right] = \frac{1}{6^2 4^2 2^2} \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) \\ &\vdots \\ B_{2k} &= \frac{(-1)^{k+1}}{2^{2k} (k!)^2} \left( \underbrace{\frac{1}{k} + \frac{1}{k-1} + \frac{1}{k-2} + \dots + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 1}_{H_k} \right) = \frac{(-1)^{k+1}}{2^{2k} (k!)^2} H_k \end{aligned}$$

Así la segunda solución puede tomar la forma de

$$y_2(x) = J_0(x) \ln x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^{2n} (n!)^2} H_n x^{2n}$$

y por lo tanto la solución general tendrá la forma

$$y(x) = A_1 J_0(x) + A_2 \left[ J_0(x) \ln x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^{2n} (n!)^2} H_n x^{2n} \right]$$

es costumbre en Física recomodar la segunda solución de la forma

$$y_2(x) \equiv Y_0(x) = \frac{2}{\pi} \left[ \left( \gamma + \ln \left( \frac{x}{2} \right) \right) J_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^{2n} (n!)^2} H_n x^{2n} \right]$$

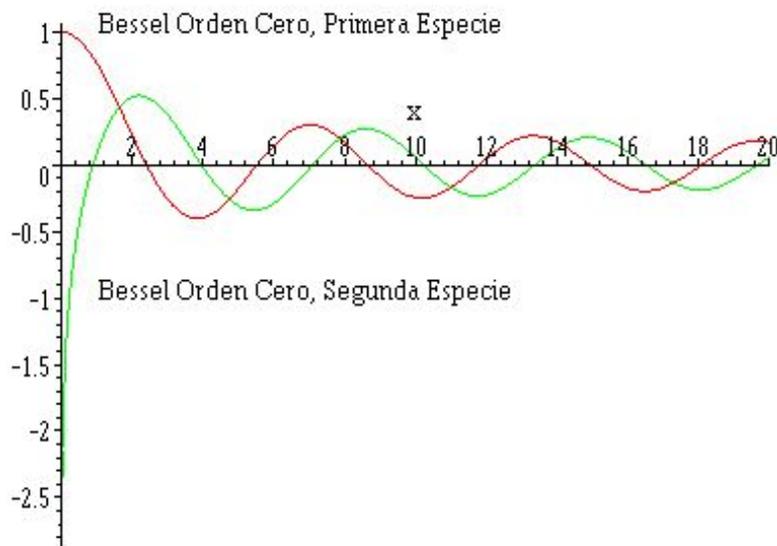
donde  $\gamma$  se conoce como la constante de Euler-Mascheroni<sup>14</sup> y tiene un valor

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-2} + \dots + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 1 - \ln(n) \right) \cong 0,5772$$

<sup>14</sup>**Lorenzo Mascheroni** (1750-1800) Monje Italiano, nacido en Bergamo, Lombardo-Veneto. Profesor de Algebra y Geometría en la Universidad de Pavia y luego Rector de la misma. Además de poeta, se destacó por sus contribuciones al Cálculo y a la Mecánica.

y así, finalmente

$$y(x) = C_1 J_0(x) + C_2 Y_0(x)$$



Comportamiento de las funciones de Bessel de orden cero. De primera especie  $J_0(x)$  y de segunda especie  $Y_0(x)$

Nótese que tanto la función de Bessel de orden cero, de primera especie,  $J_0(x)$ , como la función de Bessel de orden cero, de segunda especie,  $Y_0(x)$ , tienen un comportamiento oscilatorio cuando  $x \rightarrow \infty$ , que  $J_0(0) = 1$ , mientras que  $Y_0(x)$  se comporta como  $\frac{2}{\pi} \ln x$  cuando  $x \rightarrow 0$ .

### 0.18.3. $m_1 \neq m_2 \wedge m_1 - m_2 = N$ con $N$ entero.

En general, la ecuación indicadora para este caso,  $m_1 - m_2 = N \Rightarrow m_1 = N + m_2$ , con  $m_1 > m_2$ . Este caso nos lleva a la ecuación (65)

$$0 = x^m \{a_0 EI(m)\} + \sum_{n=1}^{N-1} \left\{ a_n EI(m+n) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k [(m+k)b_{n-k} + c_{n-k}] \right\} x^{m+n} \quad (76)$$

$$+ \left\{ a_N EI(m+N) + \sum_{k=0}^{N-1} a_k [(m+k)b_{N-k} + c_{N-k}] \right\} x^{m+N} + \quad (77)$$

$$+ \sum_{n=N+1}^{\infty} \left\{ a_n EI(m+n) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k [(m+k)b_{n-k} + c_{n-k}] \right\} x^{m+n} \quad (78)$$

donde esta  $m$  es la menor de las raíces y  $m+N$  la mayor. Anulando el término  $\{a_0 EI(m)\}$  coeficiente de  $x^m$  nos lleva a la ecuación indicadora:

$$EI(m+N) = (m+N)(m+N-1) + b_0(m+N) + c_0 = EI(m) = (m)(m-1) + b_0(m) + c_0 = 0.$$

por lo tanto  $EI(m+N) = 0$  anula al coeficiente del término  $a_n$  para  $n = N$ , esto es la ecuación (64), consecuentemente eso significa que se derivan dos casos

- $EI(m+N) = 0 \wedge \sum_{k=0}^{N-1} a_k [(m+N+k)b_{n-k} + c_{n-k}] = 0$

En este caso la solución en serie de Frobenius, partiendo de la raíz mayor de la ecuación indicadora,  $m+N$ , quedará en términos de  $a_0$  y no será linealmente independiente a la solución provista por la raíz menor, por consiguiente la solución proveniente de esta raíz menor,  $m$ , será la solución general. Esto quiere decir que en (70) la constante  $f = 0$  y por consiguiente la solución será

$$y(x) = a_0 \underbrace{\|x\|^m \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(m) x^n \right]}_{y_1(x)} + a_N \underbrace{\|x\|^m \left[ \sum_{n=0}^{\infty} a_n(m+N) x^n \right]}_{y_2(x)} \quad (79)$$

- $EI(m+N) = 0 \wedge \sum_{k=0}^{N-1} a_k [(m+N+k)b_{n-k} + c_{n-k}] \neq 0$

En este caso la raíz mayor de la ecuación indicadora  $m+N$  determinará una de las soluciones, la constante  $f \neq 0$  y la solución general tendrá la forma de

$$y(x) = C_1 \underbrace{\|x\|^{m_1} \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(m_1) x^n \right]}_{y_1(x)} + C_2 \underbrace{\left\{ f \underbrace{\|x\|^{m_1} \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(m_1) x^n \right]}_{y_1(x)} \ln x + \|x\|^{m_2} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} a_n(m_2) x^n \right] \right\}}_{y_2(x)}$$

La ecuación de Bessel de orden fraccionario puede ilustrar el primero de estos casos, resolvámosla

$$x^2 y'' + x y' + \left( x^2 - \frac{1}{4} \right) y = 0$$

una vez más, le expansión en serie de Frobenius de  $y(x)$  nos lleva a una ecuación indicadora del tipo

$$\left. \begin{array}{l} m = \frac{1}{2} \\ m = \frac{-1}{2} \end{array} \right\} \iff m(m-1) + m - \frac{1}{4} = 0 \iff \left\{ \begin{array}{l} b_0 = 1 \iff f_1(x) = 1 \\ \left\{ \begin{array}{l} c_0 = -\frac{1}{4} \\ c_1 = 0 \\ c_2 = 1 \end{array} \right\} \iff f_2(x) = x^2 - \frac{1}{4} \end{array} \right.$$

los demás coeficientes  $b_1 = b_2 = b_3 = \dots = b_n = 0$  y  $c_3 = c_4 = \dots = c_n = 0$ . Dado que  $N = 1$  se tiene que la ecuación (64)

$$\left\{ \underbrace{a_1[(m+1)(m+1-1) + b_0(m+1) + c_0]}_{EI(m+N)} + a_0 [b_1(m+1-1) + c_1] + \dots \right\} = 0 \quad (80)$$

$$\left\{ a_1 \left[ \underbrace{\left( \left( -\frac{1}{2} \right) + 1 \right) \left( \left( -\frac{1}{2} \right) \right) + \left( \left( -\frac{1}{2} \right) + 1 \right) - \frac{1}{4}}_{EI \left( \left( -\frac{1}{2} \right) + 1 \right)} \right] + a_0 [0] \right\} = 0 \Rightarrow a_1 [0] + a_0 [0] = 0 \quad (81)$$

con lo cual cualquier valor de  $a_1$  y  $a_0$  estarán permitidos. La relación de recurrencia proviene de anular el coeficiente de  $x^{m+n}$ , para  $m = -\frac{1}{2}$ . Vale decir

$$a_n EI(m+n) + \sum_{k=0}^{\infty} a_k [(m+k)b_{n-k} + c_{n-k}] = 0 \Rightarrow \quad (82)$$

$$a_n \left[ \left( \left( -\frac{1}{2} \right) + n \right) \left( \left( -\frac{1}{2} \right) + n - 1 \right) + \left( \left( -\frac{1}{2} \right) + n \right) - \frac{1}{4} \right] + a_{n-1} [0] + a_{n-2} [1] = 0 \quad (83)$$

$$a_n (n^2 - n) = -a_{n-2} \quad (84)$$

los coeficientes serán

$$\begin{aligned} n = 2 &\Rightarrow a_2 = -\frac{1}{2}a_0 & n = 3 &\Rightarrow a_3 = -\frac{1}{6}a_1 \\ n = 4 &\Rightarrow a_4 = -\frac{1}{12}a_2 = \frac{1}{24}a_0 & n = 5 &\Rightarrow a_5 = -\frac{1}{20}a_3 = \frac{1}{120}a_1 \\ n = 6 &\Rightarrow a_6 = -\frac{1}{30}a_4 = -\frac{1}{720}a_0 & n = 7 &\Rightarrow a_7 = -\frac{1}{42}a_5 = -\frac{1}{5040}a_1 \\ \vdots & & \vdots & \end{aligned}$$

Por lo cual, la solución general será

$$y(x) = a_0 x^{-\frac{1}{2}} \left( 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^6 + \dots \right) + a_1 x^{-\frac{1}{2}} \left( -\frac{1}{6}x + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{5040}x^7 + \dots \right)$$

Para considerar el segundo caso,  $EI(m+N) = 0 \wedge \sum_{k=0}^{N-1} a_k [(m+N+k)b_{n-k} + c_{n-k}] \neq 0$  analicemos la ecuación diferencial

$$x^2 y'' + x(2-x) y' + (2-x^2) y = 0$$

una vez más, la expansión en serie de Frobenius de  $y(x)$  nos lleva a una ecuación indicadora del tipo

$$\left. \begin{matrix} m = 2 \\ m = 1 \end{matrix} \right\} \Leftarrow m(m-1) - 2m + 2 = 0 \quad \Leftarrow \left\{ \begin{matrix} \left\{ \begin{matrix} b_0 = -2 \\ b_1 = 1 \end{matrix} \right\} \Leftarrow f_1(x) = -2 + x \\ \left\{ \begin{matrix} c_0 = 2 \\ c_1 = 0 \\ c_2 = 1 \end{matrix} \right\} \Leftarrow f_2(x) = x^2 + 2 \end{matrix} \right.$$

los demás coeficientes  $b_2 = b_3 = \dots = b_n = 0$  y  $c_3 = c_4 = \dots = c_n = 0$ . Dado que  $N = 1$  se tiene que la ecuación (64) para  $m = 1$

$$a_1 [(m+1)m - 2(m+1) + 2] + a_0 [m] = a_1 [2 - 4 + 2] + a_0 [2] = a_1 [0] + a_0 [1] = 0 \quad (85)$$

y no conduce a nada por cuanto  $a_0 = 0$ , mientras que, para  $m = 2$  se obtiene

$$a_1 [(m+1)m - 2(m+1) + 2] + a_0 [m] = a_1 [3 \cdot 2 - 2 \cdot 3 + 2] + a_0 [1] = a_1 [1] + a_0 [1] = 0 \quad (86)$$

por lo cual la relación de recurrencia para  $m = 2$  nos queda

$$a_n EI(m+n) + \sum_{k=0}^{\infty} a_k [(m+k)b_{n-k} + c_{n-k}] = 0 \Rightarrow \quad (87)$$

$$a_n [(2+n)(2+n-1) - 2(2+n) + 2] + a_{n-1} [1+n] + a_{n-2} [1] = 0 \quad (88)$$

$$a_n (n^2 + n) + a_{n-1} (n+1) = -a_{n-2} \quad (89)$$

los coeficientes serán

$$n = 2 \Rightarrow 6a_2 = -3a_1 - a_0 = 3a_0 - a_0 \Rightarrow a_2 = \frac{1}{3}a_0$$

$$n = 3 \Rightarrow 12a_3 = -4a_2 - a_1 = -\frac{4}{3}a_0 + a_0 \Rightarrow a_3 = -\frac{1}{36}a_0$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

Por lo cual, la solución general será

$$y_1(x) = a_0 x^2 \left( 1 - x + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{36}x^3 + \dots \right)$$

y la segunda solución linealmente independiente será

$$y_2(x) = u(x) - B_1 y_1(x) \ln x \quad (90)$$

y queda como ejercicio demostrar la relación de recurrencia para los coeficientes  $B_n$  de la serie que describe

$$u(x) = x \left( \sum_{i=0}^{\infty} B_i x^i \right) \quad (91)$$

## 0.19. Revisitando a Bessel

La Ecuación de Bessel es

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - k^2)y = 0; \quad k \in \mathfrak{R} \quad (92)$$

obviamente  $x = 0$  es una singularidad regular, por lo tanto el método de Frobenius nos permite afirmar que si  $x = x_0$  corresponde a un polo regular de la ecuación

$$x^2 y'' + x\tilde{P}(x)y' + \tilde{Q}(x)y = 0;$$

la solución vendrá expresada de la forma

$$y(x) = (x - x_0)^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

con  $r$  real y determinado a través de las raíces de la ecuación indicadora

$$r^2 + \left( \tilde{P}(x_0) - 1 \right) r + \tilde{Q}(x_0) = 0$$

y donde  $\tilde{P}(x)$  y  $\tilde{Q}(x)$  son funciones analíticas en el entorno de  $x = x_0$  y por lo tanto

$$\tilde{P}(x_0) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n \quad \wedge \quad \tilde{Q}(x_0) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$$

Para la Ecuación de Bessel

$$\tilde{P}(x) = 1 \Rightarrow b_0 = 1 \quad \wedge \quad \tilde{Q}(x) = (x^2 - k^2) \Rightarrow c_0 = -k^2; \quad c_2 = 1$$

los demás coeficientes  $b$ 's y  $c$ 's se anulan. La ecuación indicadora y sus raíces quedan como

$$m(m-1) + m - k^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad m^2 = k^2 \quad \Rightarrow \quad r_{1,2} = \pm k$$

Donde, para  $r = k$  proponemos

$$y_1(x) = x^k \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Al hacer las cuentas

$$\begin{aligned} (x^2 - k^2) y_1(x) &= x^k \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n - x^k \sum_{n=0}^{\infty} k^2 a_n x^n \\ x y_1'(x) &= x^k \sum_{n=0}^{\infty} (k+n) a_n x^n \\ x^2 y_1''(x) &= x^k \sum_{n=0}^{\infty} (k+n)(k+n-1) a_n x^n \end{aligned}$$

la ecuación de Bessel queda como

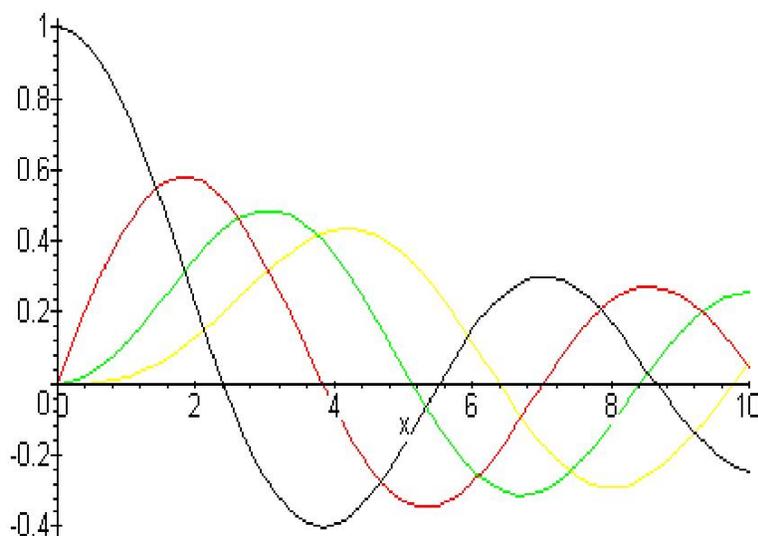
$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} [(k+n)(k+n-1) + (k+n) - k^2] a_n x^n + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n &= 0 \\ (2n+1) a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} [k(2n+k) a_k + a_{n-2}] x^n &= 0 \end{aligned}$$

y por consiguiente obtenemos la relación de recurrencia

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{n(2k+n)}$$

donde es claro que  $a_1 = 0$ . Adicionalmente, si suponemos

$$a_0 = \frac{1}{2^k \Gamma(k+1)}$$

Figura 47: Funciones de Bessel, de orden  $k$  de primera especie

tendremos

$$\begin{aligned}
 a_1 &= a_3 = a_5 = \dots = 0 \\
 a_2 &= -\frac{a_0}{2(2k+2)} \\
 a_4 &= \frac{a_0}{2 \cdot 4(2k+2)(2k+4)} \\
 &\vdots \\
 a_{2n} &= (-1)^n \frac{a_0}{2^{2n} n! (k+1)(k+2) \cdots (k+n)}
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la primera de las soluciones será

$$J_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+k}$$

la *Función de Bessel, de orden  $k$  de primera especie*.

Si  $k = 0$  entonces

$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$$

Para el caso particular de  $k = m$  entero positivo la función de Bessel de primera especie toma la forma de

$$J_m(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! (n+m)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+m}$$

Para encontrar la segunda solución linealmente independiente de la ecuación de Bessel el método de Frobenius propone tres casos dependiendo el valor de  $k$

$$\begin{cases} r_1 - r_2 \neq \text{entero} \Rightarrow k \neq \text{entero} \\ r_1 = r_2 = r \Rightarrow k = 0 \\ r_1 - r_2 = \text{entero} \Rightarrow k = \text{entero} \end{cases}$$

**Caso 1:**  $r_1 - r_2 \neq \text{entero} \Rightarrow k \neq \text{entero}$ .

La solución general será de la forma

$$y(x) = C_1 J_k(x) + C_2 J_{-k}(x)$$

donde

$$J_{-k}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\Gamma(n+1)\Gamma(n-k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n-k} \quad x > 0$$

Para  $x < 0$  se debe reemplazar  $x^{-k}$  por  $\|x\|^{-k}$ . Nótese que esta última expresión también es válida para  $k$  semientero, i.e.  $k = n + \frac{1}{2}$ .

**Caso 2:**  $r_1 = r_2 = r \Rightarrow k = 0$ .

La solución general será de la forma

$$K_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{a}_n x^n + J_0(x) \ln x$$

y los coeficientes  $\tilde{a}_n$  se encuentran mediante el tradicional método de sustituirlos en la ecuación de Bessel para  $k = 0$

$$xy'' + y' + xy = 0;$$

De donde se obtiene

$$\begin{aligned} xK_0(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{a}_n x^{n+1} + xJ_0(x) \ln x = \sum_{n=3}^{\infty} \tilde{a}_{n-2} x^{n-1} + xJ_0(x) \ln x \\ K_0'(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} n\tilde{a}_n x^{n-1} + (J_0(x) \ln x)' = \sum_{n=1}^{\infty} n\tilde{a}_n x^{n-1} + J_0'(x) \ln x + \frac{J_0(x)}{x} \\ xK_0''(x) &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\tilde{a}_n x^{n-1} + xJ_0''(x) \ln x + 2J_0'(x) - \frac{J_0(x)}{x} \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\tilde{a}_1 + 4\tilde{a}_2 x + \sum_{n=3}^{\infty} [n^2\tilde{a}_n + \tilde{a}_{n-2}] x^{n-1} + \underbrace{[xJ_0'' + J_0' + xJ_0]}_{=0} \ln x + 2J_0'(x) = 0$$

Acomodando y derivando la expresión para  $J_0$  tendremos

$$\tilde{a}_1 + 4\tilde{a}_2 x + \sum_{n=3}^{\infty} [n^2\tilde{a}_n + \tilde{a}_{n-2}] x^{n-1} = -2J_0'(x) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{2^{2n-1}} \frac{(-1)^{n+1}}{(n!)^2} x^{2n-1}$$

Ahora multiplicando la expresión por  $x$  y separando las sumatorias en sus términos pares e impares, tendremos

$$\begin{aligned} \tilde{a}_1 x + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ (2n+1)^2 \tilde{a}_{2n+1} + \tilde{a}_{2n-1} \right] x^{2n+1} &= 0 \\ \sum_{n=2}^{\infty} \left[ (2n)^2 \tilde{a}_{2n} + \tilde{a}_{2n-2} \right] x^{2n} + 4\tilde{a}_2 x^2 &= x^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n}{2^{2n} (n!)^2} x^{2n} \end{aligned}$$

Por lo cual  $\tilde{a}_1 = \tilde{a}_3 = \tilde{a}_5 = \dots = 0$  mientras que

$$4\tilde{a}_2 = 1; \quad (2n)^2 \tilde{a}_{2n} + \tilde{a}_{2n-2} = (-1)^{n+1} \frac{2n}{2^{2n} (n!)^2} \quad n > 1$$

De esta forma los coeficientes quedan como:

$$\begin{aligned} \tilde{a}_2 &= \frac{1}{2^2} \\ \tilde{a}_4 &= -\frac{1}{2^2 \cdot 4^2} \left( 1 + \frac{1}{2} \right) = -\frac{1}{2^4 \cdot (2!)^2} \left( 1 + \frac{1}{2} \right) \\ &\vdots \\ \tilde{a}_{2n} &= \frac{(-1)^{n+1}}{2^{2n} (n!)^2} \left\{ 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{k} \right\} \end{aligned}$$

La expresión para la solución general de la ecuación de Bessel para  $k = 0$  será

$$K_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n!)^2} \left\{ 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{k} \right\} \left( \frac{x}{2} \right)^{2n} + J_0(x) \ln x$$

En Física, es costumbre expresar esta solución de una forma equivalente pero ligeramente diferente:

$$Y_0(x) = -\frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left\{ 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{k} \right\} \left( \frac{x}{2} \right)^{2n} + \frac{2}{\pi} J_0(x) \left[ \ln \frac{x}{2} + \gamma \right]$$

donde, una vez más,  $\gamma = 0,577215664901 \dots$  es la constante de Euler-Mascheroni.

**Caso 3:**  $r_1 - r_2 = \text{entero} \Rightarrow k = \text{entero}$ .

La solución general será de la forma

$$K_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{a}_n x^{k+n} + C J_n(x) \ln x$$

Procediendo de forma equivalente a la situación anterior tenemos que la solución general podrá expresarse (luego de una laboriosa faena) como

$$\begin{aligned} K_k(x) &= -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{k-1} \frac{(k-n-1)!}{n!} \left( \frac{x}{2} \right)^{2n-k} - \frac{H_k}{2k!} \left( \frac{x}{2} \right)^k - \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n [H_n + H_{n+k}]}{n! (k+n)!} \left( \frac{x}{2} \right)^{2n+k} + J_k(x) \ln x \end{aligned}$$

Y finalmente la *Función de Bessel de orden  $k$  de segunda especie* o *Función de Neumann*

$$Y_k(x) = -\frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{k-1} \frac{(k-n-1)!}{(n!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n-k} - \frac{H_k}{\pi k!} \left(\frac{x}{2}\right)^k - \\ - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n [H_n + H_{n+k}]}{n!(k+n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+k} + \frac{2}{\pi} J_k(x) \left[ \ln \frac{x}{2} + \gamma \right]$$

En ambos casos

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

Más aún

$$Y_k(x) = \frac{2}{\pi} J_k(x) \ln \frac{x}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{k-1} \frac{(k-n-1)!}{(n!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n-k} \\ - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(k+n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+k} [\psi(n+1) + \psi(n+k+1)]$$

donde  $\psi(n) = \frac{\Gamma'(n)}{\Gamma(n)}$  es la función Digamma con

$$\psi(n+1) = -\gamma + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \\ \psi(1) = -\gamma$$

También es costumbre definir la función de Bessel de segunda especie en terminos de las de primera especie

$$N_k(x) = Y_k(x) = \frac{J_k(x) \cos k\pi - J_{-k}(x)}{\operatorname{sen} k\pi}$$

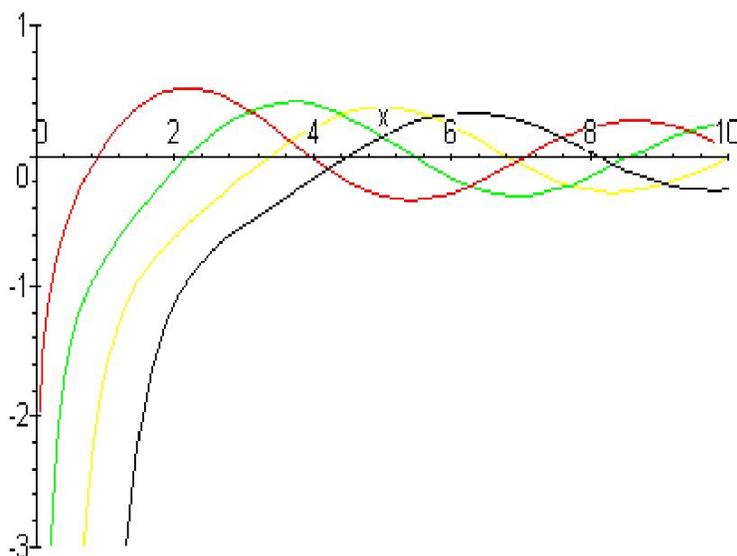
Nótese que para  $k = m$  entero, aparentemente no esta definida. Pero, aplicando la regla de L'Hospital

$$N_m(x) = \frac{\frac{d}{dk} [J_k(x) \cos k\pi - J_{-k}(x)]}{\frac{d}{dk} [\operatorname{sen} k\pi]} \Bigg|_{k=m} \\ = \frac{-\pi J_n(x) \operatorname{sen} n\pi + \left\{ \cos n\pi \frac{d}{dk} J_k(x) - \frac{d}{dk} J_{-k}(x) \right\}}{\pi \cos n\pi} \Bigg|_{k=m} \\ = \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{d}{dk} J_k(x) - (-1)^n \frac{d}{dk} J_{-k}(x) \right\}_{k=m}$$

De este modo, la soluciones generales para la ecuación de Bessel, se expresan según el caso en

$$Z_k(x) = C_1 J_k(x) + C_2 J_{-k}(x); \quad k \neq \text{entero} \\ \tilde{Z}_k(x) = C_1 J_k(x) + C_2 Y_k(x); \quad k = 0 \quad \vee \quad \text{entero}$$

Las funciones  $Z_k(x)$  y  $\tilde{Z}_k(x)$  se denominan *Funciones Cilíndricas de orden  $k$*

Figura 48: Funciones de Bessel de orden  $k$  de segunda especie o Funciones de Neumann

$\nu$	$r_{J0\nu}$	$r_{J1\nu}$	$r_{J3\nu}$	$r_{Y0\nu}$	$r_{Y1\nu}$	$r_{Y2\nu}$
1	2.404825558	3.831705970	5.135622302	0.8935769663	2.197141326	3.384241767
2	5.520078110	7.015586670	8.417244140	3.957678419	5.429681041	6.793807513
3	8.653727913	10.17346814	11.61984117	7.086051060	8.596005868	10.02347798
4	11.79153444	13.32369194	14.79595178	10.22234504	11.74915483	13.20998671
5	14.93091771	16.47063005	17.95981949	13.36109747	14.89744213	16.37896656
6	18.07106397	19.61585851	21.11699705	16.50092244	18.04340228	19.53903999
7	21.21163663	22.76008438	24.27011231	19.64130970	21.18806893	22.69395594
8	24.35247153	25.90367209	27.42057355	22.78202805	24.33194257	25.84561372
9	27.49347913	29.04682854	30.56920450	25.92295765	27.47529498	28.99508040
10	30.63460647	32.18967991	33.71651951	29.06403025	30.61828649	32.14300226

Cuadro 1: Los ceros de las funciones de Bessel  $J_n(x)$  y de la función de Neumann  $Y_n(x)$ .

### 0.19.1. Otras Formas de la Ecuación de Bessel

Haciendo los cambios de variables correspondientes llegamos a

$$u''(x) + \frac{1-2\alpha}{x}u'(x) + \left[ (\beta\nu x^{\nu-1})^2 + \frac{\alpha^2 - k^2\nu^2}{x^2} \right] u(x) = 0$$

donde

$$u(x) = x^\alpha Z_k(\beta x^\nu)$$

o también

$$u''(x) + \alpha x^\nu u(x) = 0$$

con

$$u(x) = \sqrt{x} Z_{\frac{\nu+1}{2}} \left( \frac{2\sqrt{\alpha}}{\nu+2} x^{1+\frac{\nu}{2}} \right)$$

### 0.19.2. Relaciones de Recurrencia:

Las funciones de Bessel tienen las siguientes relaciones de recurrencia

$$\begin{aligned} xJ_{k+1}(x) - 2kJ_k(x) + xJ_{k-1}(x) &= 0 \\ J_{k+1}(x) + 2J'_k(x) - J_{k-1}(x) &= 0 \end{aligned}$$

Para demostrar estas relaciones partimos por demostrar la siguiente identidad

$$\begin{aligned} [x^k J_k(x)]' &= x^k J_{k-1}(x) \\ [x^{-k} J_k(x)]' &= -x^{-k} J_{k+1}(x) \end{aligned}$$

De la expresión para  $J_k(x)$  se obtiene

$$\begin{aligned} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+2k} \right]' &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2(n+k) x^{2n+2k-1}}{2^{2n+k}\Gamma(n+1)\Gamma(n+k+1)} \\ &= x^k \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+(k-1)}}{2^{2n+(k-1)}\Gamma(n+1)\Gamma(n+k)} \\ &= x^k J_{k-1}(x) \end{aligned}$$

Unos cambios apropiados nos llevan a demostrar las segunda de las relaciones y al desarrollar las derivadas

$$\begin{aligned} [x^k J_k(x)]' &= kx^{k-1}J_k(x) + x^k J'_k(x) = x^k J_{k-1}(x) \\ [x^{-k} J_k(x)]' &= -kx^{-k-1}J_k(x) + x^{-k} J'_k(x) = -x^{-k} J_{k+1}(x) \end{aligned}$$

Por lo cual

$$\begin{aligned} kJ_k(x) + xJ'_k(x) &= xJ_{k-1}(x) \\ -kJ_k(x) + xJ'_k(x) &= -xJ_{k+1}(x) \end{aligned}$$

Al sumar y restar miembro a miembro obtenemos las relaciones de recurrencia. Es obvia la importancia que adquieren  $J_1(x)$  y  $J_0(x)$  para generar el resto de las funciones de Bessel.

### 0.19.3. Funciones de Bessel y Funciones Elementales

Las funciones de Bessel de orden semientero,  $k = \frac{1}{2}$  se expresa como

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{x}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+\frac{3}{2})} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$$

pero como

$$\Gamma\left(n + \frac{3}{2}\right) = \left\{ \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdots \frac{2n+1}{2} \right\} = \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1)}{2^n}$$

se encuentra que

$$\begin{aligned} J_{1/2}(x) &= \sqrt{\frac{x}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n! \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1)} x^{2n} \\ &= \frac{x}{\sqrt{2x}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} \left\{ 1 - \frac{x^2}{2 \cdot 3} + \frac{x^4}{2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 5} - \frac{x^6}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} + \cdots \right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2x}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} \left\{ 1 - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \right\} = \frac{1}{\sqrt{2x}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} \operatorname{sen} x \end{aligned}$$

Finalmente, y otra vez invocando a las propiedades de la función Gamma:  $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \operatorname{sen} x$$

Equivalentemente se puede demostrar que

$$J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x$$

y ahora utilizando las relaciones de recurrencia tendremos que

$$\begin{aligned} J_{3/2}(x) &= -J_{-1/2}(x) + \frac{1}{x} J_{1/2}(x) \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[ \frac{\operatorname{sen} x}{x} - \cos x \right] \end{aligned}$$

Así mismo

$$\begin{aligned} J_{5/2}(x) &= -J_{1/2}(x) + \frac{3}{x} J_{3/2}(x) \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[ \frac{3 \operatorname{sen} x}{x^2} - \frac{3 \cos x}{x} - \operatorname{sen} x \right] \end{aligned}$$

En general

$$\begin{aligned} J_{n+\frac{1}{2}}(x) &= (-1)^n \sqrt{\frac{2}{\pi}} x^{n+\frac{1}{2}} \frac{d^n}{(xdx)^n} \left( \frac{\operatorname{sen} x}{x} \right) \quad n = 1, 2, 3, \dots \\ J_{n+\frac{1}{2}}(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} x^{n+\frac{1}{2}} \frac{d^n}{(xdx)^n} \left( \frac{\cos x}{x} \right) \quad n = -1, -2, -3, \dots \end{aligned}$$

Las funciones de Bessel de orden semientero son las únicas funciones de Bessel que pueden ser expresadas en términos de funciones elementales.

**0.19.4. Reflexión:**

Las funciones de Bessel cumplen con

$$J_{-m}(x) = (-1)^m J_m(x)$$

Para el caso  $k = m$  entero positivo la Función de Bessel de primera especie toma la forma de

$$J_m(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! (n+m)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+m}$$

Si  $k = -m$  es un entero negativo los primeros  $m$  términos de la serie anterior se anulan ya que  $\Gamma(n) \rightarrow \infty$  para  $n = -1, -2, -3, \dots$  y la serie se arma como

$$J_{-m}(x) = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! (n-m)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+m} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^{l+m}}{(l+m)! l!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2l+m}$$

$$J_{-m}(x) = (-1)^m J_m(x)$$

**0.19.5. Función Generatriz**

La función generatriz para las Funciones de Bessel es

$$\mathcal{B}(x, t) = e^{\frac{x}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)}$$

desarrollando las dos series para las exponenciales

$$e^{\frac{xt}{2}} = 1 + \frac{x}{2}t + \frac{x^2}{2^2 2!}t^2 + \dots + \frac{x^n}{2^n n!}t^n + \dots$$

$$e^{\frac{x}{2t}} = 1 - \frac{x}{2}t^{-1} + \frac{x^2}{2^2 2!}t^{-2} + \dots + \frac{(-1)^n x^n}{2^n n!}t^{-n} + \dots$$

Por lo tanto multiplicando ambas series

$$\mathcal{B}(x, t) = e^{\frac{x}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)} = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n n!} t^n \right\} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{2^n n!} t^{-n} \right\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) t^n$$

**0.19.6. Representación Integral para las Funciones de Bessel**

En la expresión anterior para la función generatriz se realiza el siguiente cambio de variable  $t = e^{i\theta}$  de este modo

$$e^{\frac{x}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)} = e^{ix \operatorname{sen} \theta} = \cos(x \operatorname{sen} \theta) + i \operatorname{sen}(x \operatorname{sen} \theta)$$

y por lo tanto

$$\cos(x \operatorname{sen} \theta) + i \operatorname{sen}(x \operatorname{sen} \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) [\cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta)]$$

igualando partes reales e imaginarias y recordando que  $J_{-m}(x) = (-1)^m J_m(x)$ , para anular los términos impares en la serie de la parte real y los pares en la de la parte imaginaria, podemos escribir

$$\begin{aligned}\cos(x \operatorname{sen} \theta) &= J_0(x) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(x) \cos(2n\theta) \\ \operatorname{sen}(x \operatorname{sen} \theta) &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} J_{2n+1}(x) \operatorname{sen}([2n+1]\theta)\end{aligned}$$

Multiplicando miembro a miembro en la primera de ellas por  $\cos(2k\theta)$  (y por  $\cos([2k+1]\theta)$ ) y la segunda por  $\operatorname{sen}([2k+1]\theta)$  (y por  $\operatorname{sen}(2k\theta)$ ). Integrando (en  $0 \leq \theta \leq \pi$ ), también miembro a miembro y término por término en las series, se obtienen

$$\begin{aligned}J_{2n}(x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(x \operatorname{sen} \theta) \cos(2n\theta) \, d\theta \\ 0 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(x \operatorname{sen} \theta) \cos([2n+1]\theta) \, d\theta \\ J_{2n+1}(x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{sen}(x \operatorname{sen} \theta) \operatorname{sen}([2n+1]\theta) \, d\theta \\ 0 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{sen}(x \operatorname{sen} \theta) \operatorname{sen}(2n\theta) \, d\theta\end{aligned}$$

Sumando miembro a miembro primera con cuarta y segunda con tercera tendremos la expresión integral para las funciones de Bessel

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(\cos(n\theta) - x \operatorname{sen} \theta) \, d\theta$$

ya que todos sabemos que

$$\cos(n\theta - x \operatorname{sen} \theta) = \cos(2n\theta) \cos(x \operatorname{sen} \theta) + \operatorname{sen}(2n\theta) \operatorname{sen}(x \operatorname{sen} \theta)$$

### 0.19.7. Ortogonalidad de las Funciones de Bessel

#### Ortogonalidad:

Haciendo el caso particular de  $\alpha = 0$  y  $\nu = 1$  en la primera de las expresiones equivalentes para la ecuación de Bessel, tendremos

$$u''(x) + \frac{1}{x} u'(x) + \left[ \beta^2 - \frac{k^2}{x^2} \right] u(x) = 0$$

donde

$$u(x) = J_k(\beta x)$$

multiplicando por  $x$  la ecuación diferencial puede ser reescrita como

$$[x J'_k(\beta x)]' + \left[ \beta^2 x - \frac{k^2}{x} \right] J_k(\beta x) = 0$$

suponiendo  $k$  real y positivo, planteamos la ecuación para dos índices diferentes  $\beta_1$  y  $\beta_2$  por lo tanto quedan como

$$\begin{aligned} [xJ'_k(\beta_1x)]' + \left[ \beta_1^2x - \frac{k^2}{x} \right] J_k(\beta_1x) &= 0 \\ [xJ'_k(\beta_2x)]' + \left[ \beta_2^2x - \frac{k^2}{x} \right] J_k(\beta_2x) &= 0 \end{aligned}$$

Multiplicando apropiadamente por  $J_k(\beta_1x)$  y  $J_k(\beta_2x)$ , Integrando y restando miembro a miembro tendremos que

$$\begin{aligned} (\beta_2^2 - \beta_1^2) \int_0^1 x J_k(\beta_1x) J_k(\beta_2x) dx &= \int_0^1 \left\{ J_k(\beta_2x) [xJ'_k(\beta_1x)]' - J_k(\beta_1x) [xJ'_k(\beta_2x)]' \right\} dx \\ &= \int_0^1 [J_k(\beta_2x)xJ'_k(\beta_1x) - J_k(\beta_1x)xJ'_k(\beta_2x)]' dx \\ &= J_k(\beta_2x)xJ'_k(\beta_1x) - J_k(\beta_1x)xJ'_k(\beta_2x) \Big|_{x=0}^{x=1} \end{aligned}$$

para  $\beta_i$  las raíces de los polinomios de Bessel, i.e.  $J_k(\beta_i) = 0$  podemos deducir que las funciones de Bessel son ortogonales

$$(\beta_i^2 - \beta_j^2) \int_0^1 x J_k(\beta_i x) J_k(\beta_j x) dx \propto \delta_{ij}$$

Más aún partiendo de la ecuación de Bessel original se puede llegar a

$$\|J_k(\beta x)\|^2 = \frac{1}{2} [J'_k(\beta)]^2 + \frac{\beta^2 - k^2}{2\beta^2} [J_k(\beta)]^2$$

## 0.20. Algunas funciones Especiales

### 0.20.1. Función Gamma e Integrales de Probabilidad

Es la generalización del factorial  $n!$  el cual sólo está definido para enteros, mientras que  $\Gamma(z)$  está definida para toda variable compleja  $z$  con parte real positiva.

$\Gamma(z)$  se define indistintamente como:

$$\begin{aligned} \Gamma(z) &= \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt \equiv (z-1)! \equiv \prod (z-1) \quad \text{Re } z > 0 \\ \Gamma(z) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}{z(z+1)(z+2)\cdots(z+n)} n^z \\ \frac{1}{\Gamma(z)} &= z e^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}} \end{aligned}$$

donde  $n$  es un entero positivo y

$$\gamma = 0,577215664901 \dots$$

se conoce como la constante de Euler-Mascheroni:

También es frecuente encontrar  $\Gamma(z)$  con algunas variantes cosimétricas:

$$\Gamma(z) = 2 \int_0^\infty e^{-t^2} t^{2z-1} dt = \int_0^1 \left[ \ln \left( \frac{1}{t} \right) \right]^{z-1} dt = k^z \int_0^\infty e^{-kt} t^{z-1} dt$$

Para probar la equivalencia de las dos primeras definiciones inventamos la siguiente función de dos variables

$$F(z, n) = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1} dt \quad \operatorname{Re} z > 0$$

y como es conocido que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \equiv e^{-t}$$

Entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(z, n) = F(z, \infty) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt \equiv \Gamma(z)$$

Con lo cual queda demostrada la primera de propuestas de Euler.

Para construir la segunda partimos de la misma función  $F(z, n)$  y un cambio estratégico de variable  $u = \frac{t}{n}$ .

$$F(z, n) = n^z \int_0^n (1-u)^n u^{z-1} du \quad \operatorname{Re} z > 0$$

Un par de integraciones por partes nos llevan a comprobar

$$\begin{aligned} F(z, n) &= n^z \left\{ (1-u)^n \frac{u^z}{z} \Big|_0^1 + \frac{n}{z} \int_0^1 (1-u)^{n-1} u^z du \right\} \\ &= n^z \left\{ (1-u)^{n-2} u^{z+1} \frac{n(n-1)}{z(z+1)} \Big|_0^1 + \frac{n(n-1)}{z(z+1)} \int_0^1 (1-u)^{n-2} u^{z+1} du \right\} \end{aligned}$$

que el primer término se anula siempre. Repitiendo el proceso  $n$  veces

$$\begin{aligned} F(z, n) &= n^z \left\{ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1}{z(z+1)(z+2)(z+3) \cdots (z+n-1)} \right\} \int_0^1 u^{z+n-1} du \\ &= n^z \left\{ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1}{z(z+1)(z+2)(z+3) \cdots (z+n)} \right\} \end{aligned}$$

Una vez más, haciendo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(z, n) = F(z, \infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^z \left\{ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1}{z(z+1)(z+2)(z+3) \cdots (z+n)} \right\} \equiv \Gamma(z)$$

Se completa la equivalencia para la primera y segunda definiciones de Euler.

En particular, de la primera de las definiciones se tiene por integración directa

$$\begin{aligned} \Gamma(1) &= \int_0^\infty e^{-t} dt = 1 \\ \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \int_0^\infty e^{-t} t^{-1/2} dt = \int_0^\infty e^{-u^2} du = \sqrt{\pi} \end{aligned}$$

mientras que de la segunda, si  $z = n = 1, 2, 3, \dots$ , se obtiene

$$\begin{aligned} \Gamma(n+1) &= n! \\ \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) &= \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2^n} \sqrt{\pi} \end{aligned}$$

Finalmente la tercera de las definiciones de la función  $\Gamma(z)$  viene expresada en término de un producto infinito (Weierstrass). Este puede demostrarse partiendo de la segunda definición de Euler

$$\begin{aligned}\Gamma(z) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}{z(z+1)(z+2)\cdots(z+n)} n^z \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{z} \prod_{m=1}^n \left( \frac{m}{m+z} \right) n^z = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{z} \prod_{m=1}^n \left( 1 + \frac{z}{m} \right)^{-1} n^z\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{m=1}^n \left( 1 + \frac{z}{m} \right) e^{-z \ln n}$$

Ahora bien, multiplicando y dividiendo por

$$\prod_{m=1}^n e^{z/m} = e^{z(\sum_{m=1}^n \frac{1}{m})}$$

nos queda

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} e^{z(\sum_{m=1}^n \frac{1}{m}) - \ln n} \right\} \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{m=1}^n \left( 1 + \frac{z}{m} \right) e^{-z/m} \right\}$$

Donde, la serie exponente del primero de los términos converge a un valor constante y cual ha quedado bautizado como la constante de *Euler-Mascheroni*

$$\begin{aligned}\gamma &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left( \sum_{m=1}^n \frac{1}{m} \right) - \ln n \right\} \\ \gamma &= 0,5772156649015328606065112 \dots\end{aligned}$$

Con lo cual queda demostrada la tercera de las propuestas para expresar la Función Gamma

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z e^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left( 1 + \frac{z}{n} \right) e^{-\frac{z}{n}}$$

Es fácil comprobar las siguientes propiedades

$$\begin{aligned}\Gamma(z+1) &= z \Gamma(z) \\ \Gamma(z) \Gamma(1-z) &= \int_0^{\infty} \frac{x^{z-1} dx}{(1+x)} = \frac{\pi}{\operatorname{sen} \pi z} \\ 2^{2z-1} \Gamma(z) \Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right) &= \sqrt{\pi} \Gamma(2z)\end{aligned}$$

La primera de ellas (la relación de recurrencia) es trivial y se obtiene integrando por partes la definición integral de Euler.

$$\Gamma(z+1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^z dt = z e^{-t} t^{z-1} \Big|_0^{\infty} + z \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt = z \Gamma(z)$$

El primer sumando de la integración por partes se anula siempre. Esta propiedad es válida  $\forall z$  con  $z \neq 0, -1, -2, \dots$

La segunda de las propiedades (fórmula de reflexión) se comprueba también partiendo de definición integral de Euler con el siguiente cambio de variable  $t = u^2$ .

$$\begin{aligned}\Gamma(z)\Gamma(1-z) &= 2 \int_0^\infty e^{-u^2} u^{2z-1} du \cdot 2 \int_0^\infty e^{-v^2} v^{1-2z} dv \\ &= 4 \iint_0^\infty e^{-(u^2+v^2)} \left(\frac{u}{v}\right)^{2z-1} dudv\end{aligned}$$

si ahora hacemos  $u = \rho \cos \varphi$  y  $v = \rho \sin \varphi$ , la integral anterior queda como

$$\begin{aligned}\Gamma(z)\Gamma(1-z) &= 4 \int_0^\infty \rho e^{-\rho^2} d\rho \int_0^{\pi/2} \cot^{2z-1} \varphi d\varphi \\ &= 4 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \cot^{2z-1} \varphi d\varphi\end{aligned}$$

Finalmente, si

$$\varphi = \operatorname{arccot} \sqrt{x}; \quad d\varphi = \frac{-dx}{2\sqrt{x}(1+x)}$$

nos queda

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \int_0^\infty \frac{x^{z-1} dx}{(1+x)} = \frac{\pi}{\operatorname{sen} \pi z}$$

Es inmediato volver a comprobar

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

Del mismo modo, si utilizamos además la relación de recurrencia encontramos

$$\Gamma(z)\Gamma(-z) = \frac{\pi}{-z \operatorname{sen} \pi z}$$

La *fórmula de duplicación* y puede comprobarse partiendo de la definición del límite de Euler, así

$$\frac{2^{2z-1} \Gamma(z)\Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2z)} = \sqrt{\pi}$$

Hay que hacer notar que en el numerador sustituimos directamente las expresiones para del límite de Euler y en la del denominador, adicionalmente sustituimos  $n$  por  $2n$

$$\Gamma(2z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}{2z(2z+1) \cdots (2z+n)} n^{2z} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 2n}{2z(2z+1) \cdots (2z+2n)} (2n)^{2z}$$

por lo cual se tiene la siguiente expresión dentro del argumento del límite

$$\frac{2^{2z-1} \left( \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}{z(z+1)(z+2) \cdots (z+n)} n^z \right) \left( \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}{\left(z + \frac{1}{2}\right) \left(z + \frac{3}{2}\right) \cdots \left(z + \frac{1}{2} + n\right)} n^{z+\frac{1}{2}} \right)}{\left( \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 2n}{2z(2z+1)(2z+2) \cdots (2z+2n)} (2n)^{2z} \right)}$$

la cual se reacomoda como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{2z-1} (n!)^2 2z(2z+1)(2z+2) \cdots (2z+2n)}{(2n)! z \left(z + \frac{1}{2}\right) (z+1) \left(z + \frac{3}{2}\right) (z+2) \cdots \left(z + \frac{1}{2} + n\right) (z+n)} \cdot \frac{n^{2z+\frac{1}{2}}}{(2n)^{2z}}$$

y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z(z + \frac{1}{2})(z + 1)(z + \frac{3}{2})(z + 2) \cdots (z + \frac{n}{2})(2^{n-1})}{z(z + \frac{1}{2})(z + 1)(z + \frac{3}{2})(z + 2) \cdots (z + \frac{1}{2} + n)(z + n)} \cdot \frac{2^{2z-1}(n!)^2}{(2n)!} \cdot \frac{n^{z+\frac{1}{2}}}{2^{2z}n^{2z}}$$

Entonces

$$\frac{2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma(z + \frac{1}{2})}{\Gamma(2z)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2^{n-2})(n!)^2\sqrt{n}}{(2n)!}$$

por lo cual se deduce que el valor de lado izquierdo de la ecuación es independiente del valor de  $z$  por lo tanto es el mismo valor para cualquier  $z$  y lo evaluamos para  $z = \frac{1}{2}$

$$\frac{2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma(z + \frac{1}{2})}{\Gamma(2z)} = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

con lo cual queda comprobada la fórmula de duplicación.

Otras propiedades que van quedar como curiosidad y sin demostración son:

$$\Gamma(nz) = (2\pi)^{(1-n)/2} n^{nz - \frac{1}{2}} \prod_{k=0}^{n-1} \left(z + \frac{k}{n}\right)$$

$$\binom{z}{w} = \frac{z!}{w!(z-w)!} = \frac{\Gamma(z+1)}{\Gamma(w+1)\Gamma(z-w+1)}$$

A partir de  $\Gamma(z)$  se definen otras funciones especiales, las cuales se expresan conjuntamente con sus propiedades como

### 0.20.2. La Funciones Digamma y Poligamma

Para evitar tratar con derivadas de los factoriales es costumbre trabajar con sus derivadas logarítmicas. A partir de la segunda definición

$$\Gamma(z+1) = z! = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}{(z+1)(z+2) \cdots (z+n)} n^z$$

$$\ln(z!) = \ln\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}{(z+1)(z+2) \cdots (z+n)} n^z\right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} (\ln(n!) + z \ln n - \ln(z+1) - \ln(z+2) - \cdots - \ln(z+n))$$

ahora derivando,

$$\frac{d}{dz} \ln(z!) \equiv \mathbf{F}(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \ln n - \frac{1}{(z+1)} - \frac{1}{(z+2)} - \cdots - \frac{1}{(z+n)} \right)$$

y finalmente acomodando, para llegar a la definición más conocida

$$\mathbf{F}(z) = -\gamma - \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{(z+n)} - \frac{1}{n} \right)$$

También se le conoce como función Psi

$$\psi(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = \frac{d}{dz} \ln(\Gamma(z)) \equiv \mathbf{F}(z-1) = \frac{d}{dz} \ln((z-1)!)$$

con las siguientes propiedades

$$\begin{aligned}\psi(z+1) &= \frac{1}{z} + \psi(z) \\ \psi(z-1) - \psi(z) &= \pi \cot \pi z \\ \psi(z) + \psi\left(z + \frac{1}{2}\right) + 2 \ln 2 &= 2\psi(2z)\end{aligned}$$

De donde se pueden deducir

$$\psi(1) = \Gamma'(1) = \gamma$$

La función  $\psi(z)$  puede ser expresada en términos de integrales definidas, para ello notamos que

$$\Gamma'(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} \ln t \, dt$$

y sustituyendo la identidad de Frullani

$$\ln t = \int_0^\infty \frac{e^{-x} - e^{-xt}}{x} \, dx$$

tendremos

$$\begin{aligned}\Gamma'(z) &= \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} \int_0^\infty \frac{e^{-x} - e^{-xt}}{x} \, dx \, dt \\ &= \int_0^\infty \frac{dx}{x} \int_0^\infty (e^{-x} - e^{-xt}) e^{-t} t^{z-1} \, dt \\ &= \int_0^\infty \frac{dx}{x} e^{-x} \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} \, dt - \int_0^\infty \frac{dx}{x} \int_0^\infty e^{-t(x+1)} t^{z-1} \, dt \\ &= \Gamma(z) \int_0^\infty \frac{dx}{x} [e^{-x} - (x+1)^{-z}]\end{aligned}$$

ya que  $\Gamma(z) = k^z \int_0^\infty e^{-kt} t^{z-1} \, dt$  y por lo tanto

$$\psi(z) = \int_0^\infty \frac{dx}{x} [e^{-x} - (x+1)^{-z}]$$

También daremos (sin demostración) otras expresiones

$$\begin{aligned}\psi(z) &= \int_0^\infty \left( \frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-tz}}{1-e^{-t}} \right) dt \\ \psi(z) &= -\gamma + \int_0^1 \frac{1-x^{z-1}}{1-x} dx\end{aligned}$$

La Función Poligamma se obtiene derivando en forma repetida la Función Digamma

$$\psi^{(m)}(z+1) = \mathbf{F}^{(m)}(z) = \frac{d^m}{dz^m} \mathbf{F}(z) = (-1)^{m+1} m! \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(z+n)^{m+1}} \quad m = 1, 2, 3 \dots$$

y cuya serie puede ser expresada en términos de la función Zeta de Riemman

$$\zeta(m) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^m}$$

como

$$\mathbf{F}^{(m)}(0) = (-1)^{m+1} m! \zeta(m+1)$$

de esta forma es posible desarrollar en serie de Maclaurin

$$\ln(n!) = -\gamma + \frac{z^2}{2} \zeta(2) - \frac{z^3}{3} \zeta(3) + \dots + (-1)^n \frac{z^n}{n} \zeta(n) + \dots$$

### 0.20.3. La Aproximación de Stirling

El comportamiento asintótico de las funciones especiales será tratado en una clase aparte. Pero la importancia de la Aproximación de Stirling obliga a que se trate en este punto. Supongamos que consideramos el caso  $z \equiv x \in \mathfrak{R}$ . Por lo cual estamos interesados en el caso  $x \gg 1$ . Partimos de

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x} \Gamma(x+1) = \frac{1}{x} \int_0^\infty e^{-t} t^x dt = \frac{1}{x} \int_0^\infty e^{-t+x \ln t} dt$$

haciendo  $t = xu$  tenemos que

$$\Gamma(x) = x^x \int_0^\infty e^{-x(u-\ln u)} du$$

Ahora bien, el integrando tendrá su máximo en  $u = 1$  donde la exponencial tiene su mínimo y es entorno a ese punto que desarrollará en series de Taylor

$$u - \ln u = 1 + \frac{1}{2} (u-1)^2 - \frac{1}{3} (u-1)^3 + \frac{1}{4} (u-1)^4 + \dots$$

por lo cual

$$\Gamma(x) = x^x \int_0^\infty e^{-x(u-\ln u)} du \approx x^x \int_0^\infty du e^{-x(1+\frac{1}{2}(u-1)^2-\frac{1}{3}(u-1)^3+\dots)}$$

Otro cambio de variable  $v = \sqrt{x}(u-1)$  nos lleva

$$\Gamma(x) \approx \frac{x^x e^{-x}}{\sqrt{x}} \int_{-\sqrt{x}}^\infty dv e^{-\frac{1}{2}v^2} \exp\left(\frac{1}{3\sqrt{x}}v^3 - \frac{1}{4x}v^4 + \frac{1}{5x^{\frac{3}{2}}}v^5 - \dots\right)$$

Para valores  $x \gg 1$  se expande, en series de Taylor los exponenciales que contengan términos  $\frac{1}{\sqrt{x}}$

$$\begin{aligned} \Gamma(x) \approx & \frac{x^x e^{-x}}{\sqrt{x}} \int_{-\infty}^\infty dv e^{-\frac{1}{2}v^2} \left\{ 1 + \left( \frac{1}{3\sqrt{x}}v^3 - \frac{1}{4x}v^4 + \frac{1}{5x^{\frac{3}{2}}}v^5 - \dots \right) + \right. \\ & + \frac{1}{2!} \left( \frac{1}{3\sqrt{x}}v^3 - \frac{1}{4x}v^4 + \frac{1}{5x^{\frac{3}{2}}}v^5 - \dots \right)^2 + \\ & \left. + \frac{1}{3!} \left( \frac{1}{3\sqrt{x}}v^3 - \frac{1}{4x}v^4 + \frac{1}{5x^{\frac{3}{2}}}v^5 - \dots \right)^3 + \dots \right\} \end{aligned}$$

Finalmente, utilizando que

$$\int_{-\infty}^\infty dv e^{-\frac{1}{2}v^2} v^n = \begin{cases} \sqrt{2\pi} & n = 0 \\ \sqrt{2\pi} \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (n-1) & n = 2k \\ 0 & n = 2k-1 \end{cases}$$

e integrando término a término, tendremos que

$$\Gamma(x) \approx \sqrt{\frac{2\pi}{x}} x^x e^{-x} \left\{ 1 + \frac{1}{12x} + \frac{1}{288x^2} + \dots \right\}$$

### 0.20.4. La función Beta

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt \quad \operatorname{Re} x > 0 \wedge \operatorname{Re} y > 0$$

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x) \Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

#### La Función Integral de Probabilidad

La función Integral de Probabilidad para una variable compleja arbitraria  $z$  como

$$\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt$$

Obviamente  $\Phi(0) = 0$  y  $\Phi(\infty) = 1$ . A partir de esta función se define la **Función Error y su complemento**

$$\operatorname{erf}(z) = \int_0^z e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \Phi(z)$$

$$\operatorname{erf} c(z) = \int_z^\infty e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} [1 - \Phi(z)]$$

#### Función Gamma Incompleta $\gamma(z, \alpha)$ y Función Gamma Complementaria $\Gamma(z, \alpha)$

$$\gamma(z, \alpha) = \int_0^\alpha e^{-t} t^{z-1} dt$$

$$\Gamma(z, \alpha) = \int_\alpha^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$$

las cuales claramente cumplen con

$$\gamma(z, \alpha) + \Gamma(z, \alpha) = \Gamma(z)$$

y resumen

$$\gamma(z+1, \alpha) = z\gamma(z, \alpha) - \alpha^z e^{-\alpha}$$

$$\Gamma(z+1, \alpha) = z\Gamma(z, \alpha) + \alpha^z e^{-\alpha}$$

## 0.21. El problema de Sturm-Liouville

### 0.21.1. Cálculo Operacional

Toda ecuación diferencial puede ser descrita de la siguiente forma

$$-F(x) = f(x) \implies \mathbb{D}F(x) = f(x) \quad (93)$$

donde  $\mathbb{D}(\bullet)$  es un operador diferencial lineal, tal y como los estudiamos en su momento. De esta forma

$$\mathbb{D}(Ax^n + Bx^m) = A\mathbb{D}(x^n) + B\mathbb{D}(x^m) = nAx^{n-1} + mBx^{m-1} \quad (94)$$

y en muchos aspectos ese operador diferencial  $\mathbb{D}(\bullet)$  puede ser tratado como un número más.

De esta forma una ecuación diferencial homogénea puede ser descrita en forma de operadores cómo

$$a y'' + b y' + c y = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbb{O}|y\rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (a \mathbb{D}^2 + b \mathbb{D} + c)|y\rangle = 0 \quad (95)$$

y consecuentemente

$$(\mathbb{D} - r_1)(\mathbb{D} - r_2)|y\rangle = 0 \quad \text{con } r_1 \text{ y } r_2 \text{ raíces de } ar^2 + br + c = 0, \quad (96)$$

con soluciones, como era de esperarse de la forma

$$\begin{array}{lll} r_1 = r_2 = r & \text{reales} & \Rightarrow y(x) = (A + Bx)e^{rx} \\ r_1 \neq r_2 & \text{reales} & \Rightarrow y(x) = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x} \\ r_1 = r_2^* & \text{complejas } r_1 = \alpha + i\beta & \Rightarrow y(x) = e^{\alpha x} (A \cos(\beta x) + B \sin(\beta x)) \end{array} \quad (97)$$

Esta notación también se presta para algunas curiosidades. Para una ecuación diferencial genérica con coeficientes constantes se tiene

$$y'' - 3y' + 2y = x^2 \quad \Rightarrow \quad (\mathbb{D}^2 - 3\mathbb{D} + 2)y = x^2 \quad \Rightarrow \quad (\mathbb{D} - 1)(\mathbb{D} - 2)y = x^2 \quad (98)$$

más aún

$$y = \frac{x^2}{(\mathbb{D} - 1)(\mathbb{D} - 2)} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{x^2}{(\mathbb{D} - 2)} - \frac{x^2}{(\mathbb{D} - 1)} \quad (99)$$

por lo cual expandiendo

$$\frac{1}{\mathbb{D} - 1} = \frac{-1}{1 - \mathbb{D}} = -1 - \mathbb{D} - \mathbb{D}^2 - \mathbb{D}^3 - \mathbb{D}^4 - \dots \quad (100)$$

$$\frac{1}{\mathbb{D} - 2} = \frac{-1}{2} \frac{1}{1 - \frac{\mathbb{D}}{2}} = -\frac{1}{2} - \frac{\mathbb{D}}{4} - \frac{\mathbb{D}^2}{8} - \frac{\mathbb{D}^3}{16} - \dots \quad (101)$$

de donde

$$y = \left( -\frac{1}{2} - \frac{\mathbb{D}}{4} - \frac{\mathbb{D}^2}{8} - \frac{\mathbb{D}^3}{16} - \dots \right) x^2 - (-1 - \mathbb{D} - \mathbb{D}^2 - \mathbb{D}^3 - \mathbb{D}^4 - \dots) x^2 \quad (102)$$

por lo tanto tendremos la solución particular de la ecuación  $y'' - 3y' + 2y = x^2$

$$y = \left( -\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \right) - (-x^2 - 2x - 2) = \frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}x + \frac{7}{4} \quad (103)$$

Las operaciones que se usaron arriba están relacionadas muy estrechamente con las propiedades de la integral

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t) dt \quad (104)$$

En el mismo espíritu anterior podemos asociar una ecuación diferencial de segundo orden a un operador diferencial

$$\underbrace{\left( P(x) \frac{d^2}{dx^2} + Q(x) \frac{d}{dx} + R(x) \right)}_{\mathbb{L}} u(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad (P(x)\mathbb{D}^2 + Q(x)\mathbb{D} + R(x))|u\rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{L}|u\rangle = 0 \quad (105)$$

Donde las funciones  $P(x)$ ,  $Q(x)$  y  $R(x)$  son funciones reales, definidas en el intervalo  $[a, b]$  y que cumplen con las siguientes exigencias

- $P''(x)$ ,  $Q'(x)$  y  $R(x)$  existen y son continuas en  $[a, b]$ , y
- $P(x)$  no contiene ceros en  $(a, b)$ .

### 0.21.2. Operadores diferenciales de segundo orden

Consideremos el espacio de Hilbert de funciones continuas en  $[a, b]$ , en el cual representaremos a esas funciones como  $|u\rangle$  y los operadores lineales actúan en ese espacio de Hilbert de la forma acostumbrada  $\mathbb{L}|u\rangle = |\tilde{u}\rangle$ . Entonces, a través de la definición del producto interno podemos construir

$$\langle v | \tilde{u} \rangle = \langle \tilde{u} | v \rangle^* \Leftrightarrow \langle v | \mathbb{L} | u \rangle = \langle u | \mathbb{L}^\dagger | v \rangle^* . \quad (106)$$

Sabemos que, los operadores hermíticos (o autoadjuntos y esto es  $\mathbb{L} = \mathbb{L}^\dagger$ ) tendrá autovalores  $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n\}$  reales y los correspondientes autovectores  $\{|w_1\rangle, |w_2\rangle, |w_3\rangle, \dots, |w_n\rangle\}$  serán ortogonales,  $\langle w^i | w_j \rangle \propto \delta_j^i$ . El hecho que construyamos una ecuación de autovalores con  $\mathbb{L}$  de la forma expresada en (105) implica una ecuación de la forma

$$\mathbb{L} | v_i \rangle = \lambda_i | v_i \rangle \Leftrightarrow (P(x)\mathbb{D}^2 + Q(x)\mathbb{D} + R(x)) | v_i \rangle = \lambda_i | v_i \rangle \quad (107)$$

Con lo cual estaríamos resolviendo una familia de ecuaciones diferenciales homogéneas del tipo

$$P(x)\frac{d^2 y_i(x)}{dx^2} + Q(x)\frac{dy_i(x)}{dx} + (R(x) - \lambda_i) y_i(x) = 0 \quad (108)$$

parametrizadas por el parámetro  $\lambda_i$ . Más aún, con esta estrategia podremos integrar ecuaciones diferenciales de la forma

$$P(x)\frac{d^2 y_i(x)}{dx^2} + Q(x)\frac{dy_i(x)}{dx} + (R(x) - \lambda_i w(x)) y_i(x) = 0, \quad (109)$$

si consideramos productos internos generalizados con funciones peso  $w(x)$  de la forma

$$\langle g | f \rangle = \int_a^b dx w(x) g^*(x) f(x) \quad (110)$$

Varios son los ejemplos de esta forma general de abordar las ecuaciones diferenciales como un problema de autovalores. Entre ellos podemos mencionar:

- El oscilador armónico

$$\underbrace{\left( \frac{d^2}{dx^2} \right)}_{\mathbb{L}} y(x) = -\omega^2 y(x) \quad (111)$$

- La ecuación de Legendre

$$\underbrace{\left( (1-x^2) \frac{d^2}{dx^2} - 2x \frac{d}{dx} \right)}_{\mathbb{L}} P_n(x) = -n(n+1) P_n(x) \quad (112)$$

En general toda las familias de polinomios ortogonales,  $p_n(x)$  con producto interno definido como

$$\langle \mathbf{p}^m | \mathbf{p}_n \rangle = \int_a^b w(x) p_m(x) p_n(x) dx = h_n \delta_{m n} \text{ con } w(x) > 0 \text{ una función peso en } a \leq x \leq b$$

$$\underbrace{\left( P(x) \frac{d^2}{dx^2} + Q(x) \frac{d}{dx} \right)}_{\mathbb{L}} p_n(x) = -\alpha_n p_n(x) = 0 \quad (113)$$

Donde las expresiones para  $P(x)$ ,  $Q(x)$  y  $\alpha_n$  se encuentran especificadas en la Tabla (2)

Polinomio	$P(x)$	$Q(x)$	$\alpha_n$
$P_n$	$1 - x^2$	$-2x$	$n(n + 1)$
$T_n$	$1 - x^2$	$-x$	$n^2$
$U_n$	$1 - x^2$	$-2x$	$n(n + 1)$
$H_n$	1	$-2x$	$2n$
$L_n$	$x$	$1 - x$	$n$
$L_n^\alpha$	$x$	$1 - x + \alpha$	$n$
$P_n^{\alpha\beta}$	$1 - x^2$	$\beta - \alpha - x(2 + \alpha + \beta)$	$n(n + \alpha + \beta + 1)$

Cuadro 2: Funciones para determinar la ecuación diferencial para la cual son solución los polinomios ortogonales. Con  $P_n$  Legendre,  $T_n$  Tchebychev 1E;  $U_n$  Tchebychev 2E;  $H_n$  Hermite;  $L_n$  Laguerre;  $L_n^\alpha(x)$  Laguerre G;  $P_n^{\alpha\beta}(x)$  Jacobi

- La ecuación de Bessel

$$\underbrace{\left(x^2 \frac{d^2}{dx^2} + x \frac{d}{dx} + x^2\right)}_{\mathbb{L}} J_k(x) = k^2 J_k(x); \quad k \in \Re \quad (114)$$

### 0.21.3. Operadores diferenciales autoadjuntos

Es claro que las funciones  $P(x)$ ,  $Q(x)$  y  $R(x)$  tendrán algunas restricciones adicionales a las expresadas arriba, de tal forma que se garantice que el operador  $\mathbb{L}$  sea autoadjunto (hermítico).

Para encontrar esas restricciones a los coeficientes, partimos de la definición de producto interno en un espacio de funciones. En general, vimos que, para un espacio de funciones continuas y continuamente diferenciales en  $[a, b]$  una posible definición de producto interno es

$$\langle g | f \rangle = \int_a^b dx g^*(x) f(x) \quad \Rightarrow \quad \langle g | \mathbb{L} | f \rangle = \int_a^b dx g^*(x) \mathbb{L} f(x), \quad (115)$$

es decir

$$\langle g | \mathbb{L} | f \rangle = \int_a^b dx g^*(x) P(x) \frac{d^2 f(x)}{dx^2} + \int_a^b dx g^*(x) Q(x) \frac{df(x)}{dx} + \int_a^b dx g^*(x) R(x) f(x) \quad (116)$$

Integrando por partes la primera y segunda integral tendremos

$$\int_a^b dx g^*(x) P(x) \frac{d^2 f(x)}{dx^2} = \left( P(x) g^*(x) \frac{df(x)}{dx} - f(x) \frac{d(P(x) g^*(x))}{dx} \right) \Big|_a^b + \int_a^b dx f(x) \frac{d^2(P(x) g^*(x))}{dx^2} \quad (117)$$

y

$$\int_a^b dx g^*(x) Q(x) \frac{df(x)}{dx} = f(x) Q(x) g^*(x) \Big|_a^b - \int_a^b dx f(x) \frac{d(Q(x) g^*(x))}{dx} \quad (118)$$

Con lo cual podremos escribir

$$\begin{aligned} \langle g | \mathbb{L} | f \rangle &= \int_a^b dx f(x) \underbrace{\left( P(x) \frac{d^2}{dx^2} + \left( 2 \frac{dP(x)}{dx} - Q(x) \right) \frac{d}{dx} + \left( R(x) - \frac{dQ(x)}{dx} + \frac{d^2 P(x)}{dx^2} \right) \right)}_{\mathbb{L}^\dagger} g^*(x) \\ &+ \left( f(x) \left( Q(x) - \frac{dP(x)}{dx} \right) g^*(x) + P(x) \left( \frac{df(x)}{dx} g^*(x) - \frac{dg^*(x)}{dx} f(x) \right) \right) \Big|_a^b \end{aligned} \quad (119)$$

donde hemos identificado por  $\mathbb{L}^\dagger$  al operador adjunto de  $\mathbb{L}$ . Ahora bien, si queremos que  $\mathbb{L}$  sea autoadjunto (o hermitico)  $\mathbb{L} = \mathbb{L}^\dagger$ , entonces se debe cumplir que

$$2 \frac{dP(x)}{dx} - Q(x) = Q(x) \quad \text{y} \quad - \frac{dQ(x)}{dx} + \frac{d^2P(x)}{dx^2} = 0 \quad (120)$$

y ambas se satisfacen idénticamente si

$$Q(x) = \frac{dP(x)}{dx}. \quad (121)$$

Estas restricciones sobre  $P(x)$  y  $Q(x)$  son aparentes, porque siempre podremos construir un operador diferencial autoadjunto a partir de cualquier operador diferencial de segundo orden. En efecto, como  $P(x)$  únicamente puede tener raíces en los extremos del intervalo  $[a, b]$ , siempre podremos definir

$$h(x) = \frac{1}{P(x)} \exp \left( \int_a^b dx \frac{Q(x)}{P(x)} \right) \Rightarrow \begin{cases} \bar{P}(x) = h(x)P(x) \\ \bar{Q}(x) = h(x)Q(x) \end{cases} \quad (122)$$

con lo cual se cumple inmediatamente la condición (121), a saber

$$\frac{d\bar{P}(x)}{dx} = \frac{d}{dx} \exp \left( \int_a^b dx \frac{Q(x)}{P(x)} \right) = \frac{Q(x)}{P(x)} \exp \left( \int_a^b dx \frac{Q(x)}{P(x)} \right) = \bar{Q}(x) \quad (123)$$

y entonces  $h(x)\mathbb{L}$  siempre será auto adjunto.

Entonces, al utilizar (121) en (105) es fácil convencerse que todo operador autoadjunto puede ser escrito como

$$\mathbb{L} \leftrightarrow \frac{d}{dx} \left( P(x) \frac{d(\bullet)}{dx} \right) + R(x) \quad (124)$$

Adicionalmente, la ecuación general (119) quedaría escrita como

$$\langle g | \mathbb{L} | f \rangle = \underbrace{\int_a^b dx f(x) \mathbb{L}^\dagger g^*(x)}_{\langle f | \mathbb{L}^\dagger | g \rangle^*} + P(x) \left( \frac{df(x)}{dx} g^*(x) - \frac{dg^*(x)}{dx} f(x) \right) \Big|_a^b \quad (125)$$

Claramente, si  $\mathbb{L}$  es autoadjunto y  $f(x)$  y  $g(x)$  son soluciones de una ecuación diferencial autoadjunta, el segundo término se debe anular, y allí habrán de incidir las condiciones de borde que se impongan al problema.

#### 0.21.4. El Sistema Sturm-Liouville

Evidentemente, si consideramos que  $f(x)$  y  $g(x)$  son soluciones de una ecuación diferencial autoadjunta (que puede ser representada por un operador lineal de segundo orden autoadjunto  $\mathbb{L}$ ), entonces la ecuación de autovalores

$$\mathbb{L} |u_i\rangle = -\lambda_i |u_i\rangle \Leftrightarrow \left( \frac{d}{dx} \left( P(x) \frac{d}{dx} \right) + R(x) \right) u_i(x) = -\lambda_i w(x) u_i(x) \quad (126)$$

donde,  $\lambda_i$  son los autovalores,  $u_i(x)$  las autofunciones soluciones y  $w(x) > 0$  es la función peso descrita en (110). Claramente esta ecuación (126) debe ser complementada con las condiciones de frontera

$$P(x) u_j^*(x) \frac{du_i(x)}{dx} \Big|_a^b = 0 \quad \forall i, j \quad (127)$$

Las ecuaciones (126) y (127) constituyen Sistema Sturm-Liouville y también se le refiere como el problema de Sturm-Liouville.

Se distinguen dos posibles situaciones con las condiciones de frontera:

1. **Condiciones Regulares:** Para este caso se especifican los valores de una combinación de las funciones y las derivadas,  $\beta_1 u_i(x) + \gamma_1 \frac{du_i(x)}{dx} = C_1$  y  $\beta_2 u_i(x) + \gamma_2 \frac{du_i(x)}{dx} = C_2$  en los extremos  $x = a$  y  $x = b$ . Estos valores son finitos en todo el intervalo de validez de las funciones. Claramente de ésta pueden derivarse cuatro tipos de condiciones de frontera
  - a) **Condiciones Regulares Puras:** Para este caso se especifican los valores para la combinación lineal completa, con  $\beta_1 \neq 0$ ,  $\beta_2 \neq 0$ ,  $\gamma_1 \neq 0$  y  $\gamma_2 \neq 0$
  - b) **Condiciones de Dirichlet:** Para este caso se especifican los valores de la función  $u_i(x)$  en los extremos,  $x = a$  y  $x = b$ . Esto es para  $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$
  - c) **Condiciones de Neumann:** Para este caso se especifican los valores de las derivadas  $\frac{du_i(x)}{dx}$  en los extremos,  $x = a$  y  $x = b$ . Esto es para  $\beta_1 = \beta_2 = 0$
  - d) **Condiciones Mixtas:** Cuando se especifican los valores de un tipo de condiciones de frontera en un extremo y otro en el otro. Esto es para  $\beta_1 = \gamma_2 = 0$  o  $\gamma_1 = \beta_2 = 0$
2. **Condiciones Periódicas:** Para este caso el valor de la función y su derivada es el mismo en los extremos  $u_i(a) = u_i(b)$  y  $\frac{du_i(x)}{dx} \Big|_a = \frac{du_i(x)}{dx} \Big|_b$ . Otra vez, estos valores son finitos en todo el intervalo de validez de las funciones.
3. **Condiciones Singulares:** Para este caso encontramos valores singulares para las funciones y sus derivadas.

### 0.21.5. Algunos ejemplos ilustrativos

Vamos a analizar el caso muy simple de la ecuación diferencial tipo oscilador armónico libre. Esto es

$$\frac{d^2 y(x)}{dx^2} + \lambda y(x) = 0 \quad (128)$$

y veremos como cambia cuando se tienen en cuenta distintos tipos de condiciones de frontera.

**Condición Regular con  $y(0) = 0 \wedge \frac{dy(x)}{dx} \Big|_{x=\pi} = 0$**

Este caso corresponde una condición de frontera regular con  $\gamma_1 = \beta_2 = 0$  y, en principio, tendrá soluciones distintas para  $\lambda > 0$ ,  $\lambda = 0$ , y  $\lambda < 0$

$\lambda = 0$  Para  $\lambda = 0$  la solución será de la forma  $y(x) = C_1 x + C_2$  como  $y(0) = 0$  tendremos que  $C_2 = 0$  y como  $\frac{dy(x)}{dx} \Big|_{x=\pi} = 0$  necesariamente  $C_1 = 0$ . Con lo cual la única solución es  $y(x) = 0$  y  $\lambda$  no será un autovalor de la ecuación (128).

$\lambda < 0$  Para  $\lambda < 0$  podemos re-escribirla con  $\lambda = -\mu^2$ . Entonces la solución general para (128) tendrá la forma  $y(x) = C_1 e^{\mu x} + C_2 e^{-\mu x}$ . Las condiciones de frontera imponen

$$0 = C_1 + C_2 \quad \wedge \quad 0 = \mu (C_1 e^{\mu \pi} + -C_2 e^{-\mu \pi})$$

y otra vez, tendremos como única solución  $0 = C_1 = C_2$  y  $\lambda$  no será un autovalor de la ecuación (128).

$\lambda > 0$  Para el caso  $\lambda > 0$  usamos  $\lambda = \mu^2$  y la solución será del tipo  $y(x) = C_1 \cos(\mu x) + C_2 \sin(\mu x)$ . Las condiciones de frontera imponen:  $y(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$  y

$$\left. \frac{dy(x)}{dx} \right|_{x=\pi} = C_2 \mu \cos(\mu \pi) = 0 \Rightarrow \mu_n = \pm \frac{2n+1}{2} \Rightarrow \lambda_n = \frac{(2n+1)^2}{4} \quad \text{para } n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Es decir, tendremos infinitos auto valores asociados con infinitas autofunciones  $y_i(x) = \sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right)$  para  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ . En primer lugar, es importante señalar un que, por ser  $\mathbb{L}$  un operador hermítico sus autovalores son reales y cumplen  $\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 \dots$ , es decir son crecientes para índices crecientes de las autofunciones. En segundo lugar que las infinitas autofunciones funciones forman una base ortogonal y, por lo tanto la suma de todas esas soluciones, también será solución de (128), con las condiciones de frontera  $y(0) = 0 \wedge \left. \frac{dy(x)}{dx} \right|_{x=\pi} = 0$  y  $\lambda > 0$  puede ser escrita como

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right) \quad (129)$$

Esta hecho nos permitirá resolver el problema inhomogéneo,  $\mathbb{L}|u\rangle = |f\rangle$ , y será analizado en detalle más adelante.

**Condición Regular con**  $y(0) = 0 \wedge y(\pi) + \left. \frac{dy(x)}{dx} \right|_{x=\pi} = 0$

Para este caso tendremos una condición de frontera regular con  $\gamma_1 = 0$  y, en principio, tendrá soluciones distintas para  $\lambda > 0$ ,  $\lambda = 0$ , y  $\lambda < 0$

$\lambda = 0$  Para  $\lambda = 0$  Se cumplen las mismas situaciones que el caso anterior y se demuestra que sólo es posible la solución trivial  $y(x) = 0$

$\lambda < 0$  Para el caso  $\lambda < 0$ , una vez más hacemos  $\lambda = -\mu^2$  y la solución general tendrá la forma  $y(x) = C_1 e^{\mu x} + C_2 e^{-\mu x}$ . Las condiciones de frontera imponen

$$C_1 = -C_2 \quad \wedge \quad 0 = (C_1 e^{\mu \pi} + C_2 e^{-\mu \pi}) + \mu (C_1 e^{\mu \pi} - C_2 e^{-\mu \pi})$$

con lo cual

$$\mu = -\frac{(e^{\mu \pi} - e^{-\mu \pi})}{(e^{\mu \pi} + e^{-\mu \pi})} \equiv -\tanh(\mu \pi)$$

Esta ecuación trascendente se tiene que resolver numéricamente. Si  $\mu > 0$  no existirá solución para  $\mu = -\tanh(\mu \pi)$ . Esto se ilustra claramente en la figura 49. No hay punto de corte entre las dos funciones. Por lo tanto volvemos al caso de la solución trivial  $y(x) = 0$ . Si  $\mu < 0$  entonces, al resolver numéricamente, encontramos que  $\mu \approx -0,9962$ , con lo cual  $\lambda \approx -0,9924$  y consecuentemente  $y(x) \approx C_1 (e^{-0,9962 x} - e^{0,9962 x})$

$\lambda > 0$  Para el caso  $\lambda > 0$ , una vez más hacemos  $\lambda = \mu^2$  y la solución será del tipo  $y(x) = C_1 \cos(\mu x) + C_2 \sin(\mu x)$ . Las condiciones de frontera imponen:  $y(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$  y, para este caso

$$y(\pi) = 0 = C_2 (\sin(\mu \pi) + \mu \cos(\mu \pi)) \Rightarrow \mu = -\tan(\mu \pi)$$

Otra vez, la ecuación trascendente  $\mu = -\tan(\mu \pi)$ , se tiene que resolver numéricamente. No obstante, procedemos a analizar una posible representación gráfica que se muestra en la Figura 50. Claramente,

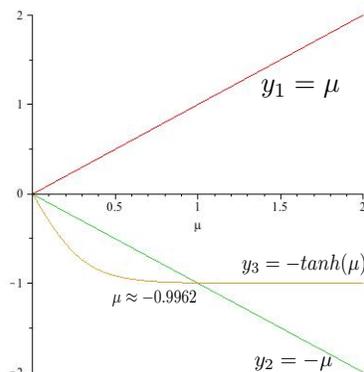


Figura 49: Las posibles soluciones  $\mu = -\tanh(\mu\pi)$ , tanto para  $\mu > 0$  como para  $\mu < 0$  para el intervalo  $[0, 2]$  se muestra claramente en la figura. Para  $\mu > 0$  no existe solución, pero para  $\mu < 0$ , se encuentra numéricamente que  $\mu \approx -0,9962$

tanto para  $\mu > 0$  como para  $\mu < 0$  existen infinitas soluciones. Si resolvemos numéricamente para el caso  $\mu > 0$  encontramos que

$$\mu_1 \approx 0,7876, \mu_2 \approx 1,6716, \mu_3 \approx 2,6162 \dots \Rightarrow \lambda_1 \approx 0,6204, \lambda_2 \approx 2,7943, \lambda_3 \approx 6,8446 \dots$$

Del mismo modo, para  $\mu < 0$  se obtiene

$$\tilde{\mu}_1 \approx -1,2901, \tilde{\mu}_2 \approx -2,3731, \tilde{\mu}_3 \approx -3,4092 \dots \Rightarrow \tilde{\lambda}_1 \approx 1,6644, \tilde{\lambda}_2 \approx 5,6314, \tilde{\lambda}_3 \approx 11,6225 \dots$$

Por lo tanto la solución, se podrá escribir,

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \text{sen}(\mu_n x) - \text{sen}(|\tilde{\mu}_n|x) \quad (130)$$

### Condiciones Periódicas

En el caso de condiciones de frontera periódicas tendremos  $y(0) = y(L)$  y  $\left. \frac{dy(x)}{dx} \right|_{x=0} = \left. \frac{dy(x)}{dx} \right|_{x=L}$ . Una vez más se distinguen tres casos.

$\lambda = 0$ . En este caso, la solución vuelve a ser  $y(x) = C_1 x + C_2$  y las condiciones de frontera imponen

$$y(0) = y(L) \Rightarrow C_2 = C_1 L + C_2 \Rightarrow C_1 = 0 \quad \left. \frac{dy(x)}{dx} \right|_{x=0} = \left. \frac{dy(x)}{dx} \right|_{x=L} \Rightarrow C_2 = C_2$$

Por lo tanto, para  $\lambda = 0$ , la solución (128) con condiciones de borde periódicas, será  $y(x) = C_2$

$\lambda < 0$ . Una vez más,  $\lambda = -\mu^2$  y la solución general tendrá la forma  $y(x) = C_1 e^{\mu x} + C_2 e^{-\mu x}$ . Las condiciones de frontera imponen

$$y(0) = y(L) \Rightarrow C_1 (1 - e^{\mu L}) = C_2 (e^{-\mu L} - 1)$$

y

$$\left. \frac{dy(x)}{dx} \right|_{x=0} = \left. \frac{dy(x)}{dx} \right|_{x=L} \Rightarrow C_1 (1 - e^{\mu L}) = -C_2 (e^{-\mu L} - 1)$$

Por lo tanto,  $C_1 = C_2 = 0$ , y obtenemos la solución trivial  $y(x) = 0$  para valores de  $\lambda < 0$ .

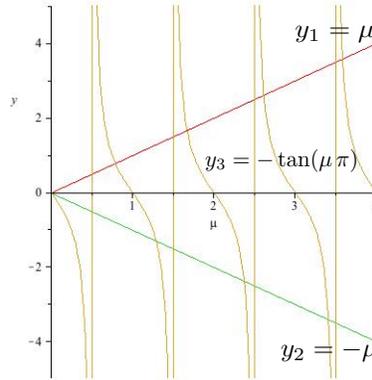


Figura 50: Las posibles soluciones de  $\mu = -\tan(\mu\pi)$ , tanto para  $\mu > 0$  como para  $\mu < 0$  para el intervalo  $[0, 4]$  se muestra claramente en la figura. Tanto para  $\mu > 0$  como para  $\mu < 0$  existen infinitas soluciones.

$\lambda > 0$ . Al igual que en los casos anteriores hacemos  $\lambda = \mu^2$  y la solución será del tipo  $y(x) = C_1 \cos(\mu x) + C_2 \sin(\mu x)$ . Las condiciones de frontera imponen:

$$y(0) = y(L) \Rightarrow C_1 (1 - \cos(\mu L)) = C_2 \sin(\mu L)$$

y

$$\left. \frac{dy(x)}{dx} \right|_{x=0} = \left. \frac{dy(x)}{dx} \right|_{x=L} \Rightarrow C_2 (1 - \cos(\mu L)) = -C_1 \sin(\mu L)$$

con lo cual, al resolver para  $C_2$  se obtiene

$$2C_1 (1 - \cos(\mu L)) = 0 \Rightarrow \cos(\mu L) = 1 \Rightarrow \mu_n = \pm \frac{2n\pi}{L} \Rightarrow \lambda_n = \left( \frac{2n\pi}{L} \right)^2 \quad \text{para } n = 0, 1, 2, 3 \dots$$

por lo cual, para cada autovalor  $\lambda_n$  tendremos asociadas dos autofunciones:  $y_1(x) = \cos\left(\frac{2n\pi}{L}x\right)$  y  $y_2(x) = \sin\left(\frac{2n\pi}{L}x\right)$

### Condiciones Singular

En este caso se presentan uno o más infinitos en el intervalo de validez  $x \in [a, b]$ . En esta sección analizaremos únicamente el caso para el cual los puntos singulares estén en los extremos  $x = a$  y  $x = b$ . En este caso, la ecuación (126), vale decir

$$\mathbb{L}|u_i\rangle = -\lambda_i w(x)|u_i\rangle \Leftrightarrow \frac{d}{dx} \left( P(x) \frac{du_i(x)}{dx} \right) + (R(x) + \lambda_i w(x)) u_i(x) = 0, \quad (131)$$

tendremos  $P(a) = 0$  o  $P(b) = 0$  o ambos. La aparición de polos en el intervalo de validez de las ecuaciones diferenciales fue el caso que motivó el uso del método de Frobenius que se discutió en la sección 0.18. Particularmente, el caso de la ecuación de Bessel (92) en la sección 0.19 representa este caso. Tal y como discutimos en esas secciones, si incluimos  $x = 0$  en el intervalo de validez de la ecuación esta presenta un polo en uno de los extremos del intervalo. Es decir, en la ecuación de Bessel escrita en forma autoadjunta

$$x^2 y'' + xy' + (k^2 x^2 - n^2) y = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dx} \left( x \frac{dy(x)}{dx} \right) + \left( k^2 x - \frac{n^2}{x} \right) y(x) = 0, \quad (132)$$

identificamos:  $P(x) = x$ ,  $R(x) = -\frac{n^2}{x}$ ,  $\lambda = k^2$  y finalmente  $w(x) = x$ . Tal y como mostramos en 0.19 la solución general de esta ecuación es

$$y(x) = C_1 J_n(kx) + C_2 Y_n(kx) \quad \text{con } y(a=0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0 \Rightarrow y(x) = C_1 J_n(kx) \quad (133)$$

La condición de borde  $y(a=0) = 0$  impone que  $C_2 = 0$  porque  $Y_n(kx \rightarrow 0) \rightarrow \infty$ .

Si adicionalmente, imponemos  $y(b) = 0$ , entonces se cumplirá que  $J_n(ka) = 0$  por lo cual  $ka = r_{J_n \nu}$ , donde  $r_{J_n \nu}$  con  $\nu = 1, 2, 3, \dots$  son las raíces de la función de Bessel  $J_n(x)$ , tal y como se expresan en la Tabla 1. Entonces, al igual que en los casos anteriores tendremos

$$k_n = \frac{r_{J_n \nu}}{a} \Rightarrow \lambda_n = \frac{r_{J_n \nu}^2}{a^2} \Rightarrow y_\nu(x) = C_1 J_n\left(\frac{r_{J_n \nu}}{a} x\right) \quad (134)$$

De esta forma se tendrán las funciones asociadas con los autovalores y los ceros de la función de Bessel reescalan el argumento de la función.

### 0.21.6. Función de Green

Consideremos ahora la solución de caso inhomogéneo

$$\mathbb{L}|y\rangle = |f\rangle \Leftrightarrow \frac{d}{dx} \left( P(x) \frac{dy(x)}{dx} \right) + R(x)y(x) = f(x). \quad (135)$$

Claramente

$$\mathbb{L}|u_i\rangle = -\lambda_i |u_i\rangle \Rightarrow |y\rangle = \sum_{i=0}^{\infty} C^i |u_i\rangle \quad (136)$$

donde  $\{|u_i\rangle\}$  son las autofunciones de  $\mathbb{L}$ . Por lo tanto podemos expresar (135) de la forma

$$|f\rangle = \mathbb{L}|y\rangle \Rightarrow |f\rangle = \mathbb{L} \left( \sum_{i=0}^{\infty} C^i |u_i\rangle \right) = \sum_{i=0}^{\infty} C^i \mathbb{L}|u_i\rangle = - \sum_{i=0}^{\infty} C^i \lambda_i |u_i\rangle \quad (137)$$

para finalmente proyectar (135) a lo largo de las mismas autofunciones  $|u_i\rangle$  y dado que las funciones  $\{|u_i\rangle\}$  son ortogonales, obtenemos los coeficientes  $C^i$

$$\langle u^j | f \rangle = - \sum_{i=0}^{\infty} C^i \lambda_i \underbrace{\langle u^j | u_i \rangle}_{\delta_{ij}} \Rightarrow C^j = \frac{1}{\lambda_j} \frac{\langle u^j | f \rangle}{\langle u^j | u_j \rangle} \Leftrightarrow C^j = \frac{\int_a^b dx u_j^*(x) w(x) f(x)}{\int_a^b dx u_j^*(x) w(x) u_j(x)} \quad (138)$$

Por lo tanto,

$$|y\rangle = \sum_{i=0}^{\infty} \left( \frac{1}{\lambda_i} \frac{\langle u^i | f \rangle}{\langle u^i | u_i \rangle} \right) |u_i\rangle \Leftrightarrow y(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i} \left( \frac{\int_a^b d\xi u_i^*(\xi) w(\xi) f(\xi)}{\int_a^b d\zeta u_i^*(\zeta) w(\zeta) u_i(\zeta)} \right) u_i(x) \quad (139)$$

Siempre se puede normalizar las autofunciones y con ello se simplifica la expresión anterior

$$\langle \hat{u}^i | \hat{u}_i \rangle = 1 \Leftrightarrow \int_a^b d\zeta \hat{u}_i^*(\zeta) w(\zeta) \hat{u}_i(\zeta) = 1 \Rightarrow y(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i} \left( \int_a^b d\xi \hat{u}_i^*(\xi) w(\xi) f(\xi) \right) \hat{u}_i(x) \quad (140)$$

donde

$$|\hat{u}_i\rangle = \frac{|u_i\rangle}{\sqrt{\langle u^i | u_i \rangle}} \Leftrightarrow \hat{u}_i(x) = \frac{u_i}{\sqrt{\int_a^b d\zeta u_i^*(\zeta) w(\zeta) u_i(\zeta)}} \quad (141)$$

De este modo, tendremos

$$y(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i} \left( \int_a^b d\xi \hat{u}_i^*(\xi) w(\xi) f(\xi) \right) \hat{u}_i(x) = \int_a^b d\xi \underbrace{\left( \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i} \hat{u}_i^*(\xi) \hat{u}_i(x) \right)}_{G(x,\xi)} w(\xi) f(\xi) \quad (142)$$

Por lo tanto, la solución al problema de Sturm-Liouville se puede expresar en términos de la función de Green como

$$y(x) = \int_a^b d\xi G(\xi, x) w(\xi) f(\xi) \quad \text{con } G(\xi, x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i} \hat{u}_i^*(\xi) \hat{u}_i(x) \quad (143)$$

Para ejemplificar esta técnica, consideremos la ecuación diferencial del oscilador armónico forzado

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = \cos(\bar{\omega} t) \quad \text{con } x(0) = x(\pi) = 0 \quad \text{donde } \ddot{x} \equiv \frac{d^2 x(t)}{dt^2} \quad (144)$$

Resolvemos primero el problema de autovalores

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = \lambda x(t) \quad \Rightarrow x(t) = A \cos(t \sqrt{\omega^2 - \lambda}) + B \text{sen}(t \sqrt{\omega^2 - \lambda}) \quad (145)$$

Las condiciones de frontera imponen

$$x(0) = 0 \Rightarrow A = 0 \quad \text{y } x(\pi) = 0 \Rightarrow \text{sen}(\pi \sqrt{\omega^2 - \lambda}) = 0 \Rightarrow \sqrt{\omega^2 - \lambda} = n \quad \text{con } n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (146)$$

Las autofunciones tendrán la forma de  $x_n(t) = A_n \text{sen}(n t)$ . Al normalizarlas tendremos  $x_n(t) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \text{sen}(n t)$ . De este modo la función de Green y la solución quedan como

$$G(\tau, t) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\text{sen}(n \tau) \text{sen}(n t)}{\omega^2 - n^2} \Rightarrow x(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi d\tau \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\text{sen}(n \tau) \text{sen}(n t)}{\omega^2 - n^2} \right) \cos(\bar{\omega} \tau) \quad (147)$$

con lo cual

$$x(t) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\text{sen}(n t)}{\omega^2 - n^2} \int_0^\pi d\tau \text{sen}(n \tau) \cos(\bar{\omega} \tau) \Rightarrow x(t) = \frac{2}{\pi} \left( \frac{\bar{\omega} (1 \pm \cos(\bar{\omega} \pi))}{\bar{\omega}^2 - \omega^2 + \lambda} \right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\text{sen}(n t)}{\omega^2 - n^2} \quad (148)$$

la cual constituye la solución más general para la ecuación del oscilador armónico forzado (144).

Inspirados en el nuestra motivación inicial, (135), podemos extenderla para considerar las siguientes ecuaciones diferenciales

$$(\mathbb{L} + \lambda) |y\rangle = |f\rangle \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dx} \left( P(x) \frac{dy(x)}{dx} \right) + (R(x) + \lambda w(x)) y(x) = f(x) \quad (149)$$

donde  $y(x)$  estará sometida a algunas de las condiciones de frontera expresadas en 0.21.4. Una vez más resolvemos el problema de autovalores para encontrar las autofunciones en las cuales expandiremos todas las funciones involucradas en el problema. Esto es, en general y siguiendo el esquema presentado en (136)

$$\mathbb{L} |\hat{u}_i\rangle = -\lambda_i |\hat{u}_i\rangle \quad \Rightarrow |f\rangle = \sum_{i=0}^{\infty} F^i |\hat{u}_i\rangle \equiv \sum_{i=0}^{\infty} \langle \hat{u}^i | f \rangle |\hat{u}_i\rangle \quad (150)$$

donde hemos supuesto que las autofunciones fueron normalizadas,  $\langle \hat{u}^j | \hat{u}_i \rangle = \delta_i^j$ . Con lo cual

$$(\mathbb{L} + \lambda) |y\rangle = |f\rangle \Rightarrow (\mathbb{L} + \lambda) \left( \sum_{i=0}^{\infty} C^i | \hat{u}_i \rangle \right) = \sum_{i=0}^{\infty} \langle \hat{u}^i | f \rangle | \hat{u}_i \rangle \Rightarrow C^i (\lambda_i + \lambda) - \langle \hat{u}^i | f \rangle = 0 \quad (151)$$

y se sigue que

$$C^i = \frac{\langle \hat{u}^i | f \rangle}{(\lambda_i + \lambda)} \Rightarrow |y\rangle = \sum_{i=0}^{\infty} \left( \frac{\langle \hat{u}^i | f \rangle}{(\lambda_i + \lambda)} \right) | \hat{u}_i \rangle \Leftrightarrow y(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \left( \frac{\int_a^b d\xi \hat{u}_i^*(\xi) w(\xi) f(\xi)}{\lambda_i + \lambda} \right) \hat{u}_i(x) \quad (152)$$

intercambiando sumatorias e integrales tendremos

$$y(x) = \int_a^b d\xi w(\xi) f(\xi) \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\hat{u}_i^*(\xi) \hat{u}_i(x)}{\lambda_i + \lambda} \Rightarrow G(\xi, x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\hat{u}_i^*(\xi) \hat{u}_i(x)}{\lambda_i + \lambda} \quad (153)$$

podemos identificar claramente la función de Green. Nótese que para el caso  $\lambda_i + \lambda = 0$ , es decir si  $\lambda$  en (149) coincide con alguno de los autovalores del operador  $\mathbb{L}$ , la función de Green se hace infinita y este esquema presenta dificultades para su aplicación.

# Bibliografía

- [Aleksandrov Kolmogorov y Lavrentiev 1999] A. D. Aleksandrov, A. N. Kolmogorov y M. A. Lavrentiev (1999) **Mathematics: Its Content, Methods and Meaning**. (*Dover Publications, New York*) Existe traducción por Editorial Alianza Universidad.
- [Arfken, Weber y Weber 2000] Arfken, G. B., Weber, H., y Weber, H.J. (2000) **Mathematical Methods for Physicists** 5ta Edición (*Academic Press, Nueva York*)
- [1] Byron, F.W. y Fuller W.F. (1970) **Mathematics of Classical and Quantum Physics** (*Dover Publications, New York*)
- [Cushing 1975] Cushing, J. (1975) **Applied Analytical Mathematics for Physical Sciences** (*John Wiley & Sons, New York*)
- [Hamming 1973] Hamming R.W. (1973) **Numerical Methods For Scientist and Engineers, 2nd ed.** (Dover, New York.)
- [Hassani 1991] Hassani, S. (1991) **Foundations of Mathematical Physics** (*Prentice Hall, International Edition, London:*)
- [Lebedev 1972] Lebedev, N.N. (1972) **Special Functions & Their Applications** (*Dover Publications, New York*)
- [math-atlas.org URL] **The Mathematical Atlas** <http://www.math-atlas.org/welcome.html>
- [Richards 2002] Richards, D. (2002) **Advanced Mathematical Methods with MAPLE** (*Cambridge University Press Cambridge*)
- [Riley Hobson y Bence 2002] Riley, K.F., Hobson, M.P. y Bence, S.J. (2002) **Mathematical Methods for Physics and Engineering** (*Cambridge University Press Cambridge*)
- [Weisstein URL] Weisstein, E. W., **MathWorld** <http://mathworld.wolfram.com/>