Modelado de Objetos Autogravitantes

L. A. Núñez
Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Colombia

3 de noviembre de 2015

1. Modelando objetos autogravitantes

Consideraremos una configuración material esférica autogravitante, vale decir que la única fuerza que la cohesiona es la fuerza de gravedad y respresentan modelos (hipersimplificados) de planetas, y estrellas.

En general, un posible modelado de este tipo objetos (esféricos) es a través de dos ecuaciones diferenciales llamadas de estructura:

- una para el gradiente de presión radial
$$\frac{\mathrm{d}P(r)}{\mathrm{d}r} = \mathcal{F}(m(r), \rho(r), P(r), P_{\perp}(r), r), \tag{1}$$
donde $P(r)$ es presión radial; $P_{\perp}(r)$ representan a las presiones tangenciales; $\rho(r)$, la de densidad de masa y $m(r)$ la masa contenida en una esfera de radio r;

- otra para el gradiente de masa
$$\frac{\mathrm{d}m(r)}{\mathrm{d}r} = 4\pi r^2 \rho(r)\,; \tag{2}$$

y dos ecuaciones de estado:

$$P(r) = \mathcal{W}\left(\rho(r), P(r), \frac{\mathrm{d}P(r)}{\mathrm{d}r}, P_{\perp}(r), r\right) \quad \text{y} \quad P_{\perp}(r) = \mathcal{V}\left(\rho(r), P(r), \frac{\mathrm{d}P(r)}{\mathrm{d}r}, P_{\perp}(r), r\right) \tag{3}$$

Es decir, dos ecuaciones que relacionan las variables físicas (de estado) del sistema y describen las propiedades físicas de los fluidos[1]. De esta manera tendremos un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas.

La integración (casi siempre numérica) se realiza, considerando como condiciones iniciales los valores en el centro ($P(0) = P_{\perp}(0) = P_0$ y $\rho(0) = \rho_0$) y se integra hasta que la presión radial se anule ($P(R) = 0$). El valor del $r = R$ se considera el borde de la distribución y define su masa total ($m(R) = M$). Por lo tanto, los modelos quedan parametrizados por la presiones y densidades centrales.

Para que los modelos sean físicamente razonables se imponen condiciones adicionales como: que las presiones y densidades sean positivas para todo r dentro de la distribución, $P(r) > 0$ y $\rho(r) > 0$; sus gradientes sean negativos

$$\frac{\mathrm{d}P(r)}{\mathrm{d}r} \leqslant 0\,; \quad \frac{\mathrm{d}\rho(r)}{\mathrm{d}r} \leqslant 0\,; \quad v^2 = \frac{\mathrm{d}P(r)}{\mathrm{d}\rho} \leqslant c^2 \quad \text{y} \quad v_{\perp}^2 = \frac{\mathrm{d}P_{\perp}(r)}{\mathrm{d}\rho} \leqslant c^2 \tag{4}$$

esto quiere decir que la presiones y densidades decrecen a medida que nos acercamos a al superficie; y finalmente que las velocidades del sonido, radiales y tangenciales, sean menores que la velocidad de la luz c.

[1] https://en.wikipedia.org/wiki/Equation_of_state

Modelando objetos autogravitantes newtonianos pascalianos Para el caso newtoniando y configuraciones materiales de fluidos pascalianos (también denominados isótropos y son aquellos en los cuales las presiones en todas direcciones son iguales). Tendremos que las ecuaciones diferenciales son:

$$\frac{\mathrm{d}P(r)}{\mathrm{d}r} = -\frac{Gm(r)\rho(r)}{r^2} \qquad \text{y} \qquad \frac{\mathrm{d}m(r)}{\mathrm{d}r} = 4\pi r^2\rho(r), \tag{5}$$

donde G es la constante de gravitación universal.

Modelando objetos autogravitantes newtonianos anisótropos. En fluidos newtoniados anisótropos -para configuraciones materiales esféricas- las presiones radiales y tangenciales difieren. Las ecuaciones diferenciales que describen el equilibrio hidrostático son

$$\frac{\mathrm{d}P(r)}{\mathrm{d}r} = -\frac{Gm(r)\rho(r)}{r^2} + 2\frac{P_\perp(r) - P(r)}{r} \qquad \text{y} \qquad \frac{\mathrm{d}m(r)}{\mathrm{d}r} = 4\pi r^2\rho(r), \tag{6}$$

Modelando objetos autogravitantes relativistas isótropos. Si la gravedad es muy intensa las configuraciones materiales de fluidos deben ser descritas por la Teoría de Relatividad General. Las ecuaciones diferenciales que gobiernan el equilibrio hidrostático en Relatividad General son:

$$\frac{\mathrm{d}P(r)}{\mathrm{d}r} = -\frac{Gm(r)\rho(r)}{r^2}\left(1 + \frac{P(r)}{\rho(r)c^2}\right)\left(1 + \frac{4\pi r^3 P(r)}{m(r)c^2}\right)\left(1 - 2\frac{Gm(r)}{rc^2}\right)^{-1} \qquad \text{y} \qquad \frac{\mathrm{d}m(r)}{\mathrm{d}r} = 4\pi r^2\rho(r), \tag{7}$$

Modelando objetos autogravitantes relativistas anisótropos. Finalmente, para el caso de fluidos relativistas, anisótropos, las ecuaciones diferenciales para el equilibrio hidróstático serán:

$$\frac{\mathrm{d}P(r)}{\mathrm{d}r} = -\frac{Gm(r)\rho(r)}{r^2}\left(1 + \frac{P(r)}{\rho(r)c^2}\right)\left(1 + \frac{4\pi r^3 P(r)}{m(r)c^2}\right)\left(1 - 2\frac{Gm(r)}{rc^2}\right)^{-1} + 2\frac{P_\perp(r) - P(r)}{r} \tag{8}$$

y

$$\frac{\mathrm{d}m(r)}{\mathrm{d}r} = 4\pi r^2\rho(r), \tag{9}$$

2. Pregunta de investigación

La intención es entender, o al menos intuir, **el efecto que induce la anisotropía en la estabilidad de los modelos estelares, tanto newtonianos como relativistas** Para responder esa pregunta se propone construir modelos (newtonianos y relativistas), verificar su estabilidad y comparar uno y otro caso.

Entonces se debe integrar el sistema 1, 2 y 3 (para el caso newtoniano y relativista) para un conjunto de condiciones iniciales, (ρ_0 y P_0) y en base a los resultados realizar un análisis gráfico.

Se pide construir dos gráficos

- para un determinado perfil de densidad realizar una gráfica ρ_0 vs M -para los casos newtonianos y relativista, isótropos y anisótropos[2]. Cuando $\mathrm{d}m(r)/\mathrm{d}\rho > 0$ estaremos frente a configuraciones estables, para ese perfil de densidad etiquetadas con el binomio (ρ_0, M). Se consideran estables porque se satisfacen las condiciones de las ecuaciones 4.
- una gráfica R vs M que nos indicará cuál es la relación M/R para cada uno de esos modelos estables (o inestables) y concluir algo sobre el efecto de la anisotropía en sus valores máximos para M y M/R.

La idea es integrar 1 y 2 con 3, identificando para cuales valores de r se anula la presión radial y, a partir de allí identificar el valor de la masa total M, y con ello determinar los valores de M, R para cada ρ_0 y P_0.

[2]Típicamente como http://inspirehep.net/record/1376925/files/fig6.png

3. Estrategias de Modelado

Para resolver el sistema 1, 2 y 3 supondremos un sistema particular de unidades en el cual $G = c = 1$, esto simplifica las cuenta. Se proponen entonces algunas estrategias para modelar sistemas autogravitantes newtonianos y relativistas (isótropos y anisótropos) la cuales enumeramos a continuación:

3.1. Presiones barótropas polítropas

La primera estrategia de modelado es suponer que las ecuaciones de estado para las presiones radiales y tangenciales, 3, se expresan mediante sendas ecuaciones de estado polítropas. La descripción de fluidos polítropos en los casos newtonianos y relativistas es usual en el modelado astrofísico[3]. En este caso particular utilizaremos dos ecuaciones de estado una para describir cada presión:

$$P(r) = K_1 \rho^{\gamma_1} \qquad \text{y} \qquad P_\perp(r) = K_2 \rho^{\gamma_2} + \left(K_1 \rho_0^{\gamma_1} - K_2 \rho_0^{\gamma_2}\right) \, . \tag{10}$$

De esta manera, junto con las ecuaciones 1 y 2, podremos integrar el sistema de ecuaciones diferenciales.

Definiendo dos parámetros $\mathcal{K} = K_1/K_2$ y $\Gamma = \gamma_1/\gamma_2$

1. Grafique ρ_0 vs M, para los casos newtoniado y relativista. Concluya cuál es el efecto que induce la anisotropía en la estabilidad de los modelos y como depende de variaciones de $\mathcal{K}$ y Γ
2. Grafique M vs R, y determine las relaciones masa-radio para los modelos estables e inestables.

3.2. Presiones no locales

Igual que en el caso anterior se proponen dos ecuaciones de estado, en este caso propondremos dos ecuaciones de estado no locales:

$$P(r) = \rho(r) - \frac{2\mathcal{C}_1}{r^3} \int_0^r \mathrm{d}\bar{r}\, \bar{r}^2 \rho(\bar{r}) \qquad \text{y} \qquad P_\perp(r) = \rho(r) - \frac{2\mathcal{C}_2}{r^3} \int_0^r \mathrm{d}\bar{r}\, \bar{r}^2 \rho(\bar{r}) \, , \tag{11}$$

con $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ son constantes y $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1/\mathcal{C}_2$ claramente mide el efecto de la anisotropía. Las ecuaciones de estado barótropas no locales representan fenómenos colectivos en los cuales las propiedades mecánicas de un material en un punto dependen también del entorno que lo rodea. Han sido utilizadas para modelar daños en materiales[4] y en Relatividad General[5]

3.3. Densidad conocida

Utilizaremos dos perfiles densidad conocidos

1. El primer perfil que utilizaremos ser uno tipo Tolman IV[6]

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{3A^6 + 7\tilde{r}^2 A^4 + 3A^4 + 6\tilde{r}^4 A^2 + 2A^2 \tilde{r}^2}{\left(3A^2 + 3\right)\left(A^2 + 2\,\tilde{r}^2\right)^2} \right) \qquad \text{con } \tilde{r} = \frac{r}{R}, \tag{12}$$

donde A es una constante adimensional a ser determinada de la condición de frontera $P(R) = 0$

[3] https://en.wikipedia.org/wiki/Polytrope

[4] Pijaudier-Cabot, Gilles, y Zdenek P. Bazant. "Nonlocal damage theory." Journal of engineering mechanics 113, no. 10 (1987): 1512-1533.

[5] Hernández, Hector, y Luis A. Núñez. "Nonlocal equation of state in anisotropic static fluid spheres in general relativity." Canadian journal of physics 82, no. 1 (2004): 29-51.

[6] Tolman, Richard C. "Static solutions of Einstein's field equations for spheres of fluid."Physical Review 55, no. 4 (1939): 364.

2. El segundo perfil será tipo Gokhroo-Mehra[7]

$$\rho = \rho_0 \left(1 - B\tilde{r}^2\right) \tag{13}$$

en este caso, B es otra constante adimensional a ser determinada de la condición de frontera $P(R) = 0$

3.3.1. Densidad conocida y presión tangencial barótropas polítropa

Otra estrategia es utilizar un perfil de densidad conocida y explorar las consecuencias en la estabilidad que induce la anisotropía de las presiones. Claramente,

$$\rho(r) \to m(r) = 4\pi \int_0^r \mathrm{d}r\, \rho(r) r^2 \tag{14}$$

es decir, dado un perfil de densidad se obtiene la masa y, entonces:

- para el **caso isótropo newtoniano**

$$\left.\begin{array}{r} \rho(r) \to \\ \\ m(r) \to \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}P(r)}{\mathrm{d}r} = -\frac{m(r)\rho(r)}{r^2} \to P(r) \tag{15}$$

  obtendremos el perfil de presión mediante la ecuación 5;

- para el **caso anisótropo newtoniano**

$$\left.\begin{array}{r} \rho(r) \to \\ \\ m(r) \to \\ \\ P_\perp(r) = K_2\rho^{\gamma_2}(r) \to \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}P(r)}{\mathrm{d}r} = -\frac{m(r)\rho(r)}{r^2} + 2\frac{K_2\rho^{\gamma_2}(r) - P(r)}{r} \to P(r) \tag{16}$$

  obtendremos el perfil de presión mediante la ecuación 6;

- para el **caso isótropo relativista**

$$\left.\begin{array}{r} \rho(r) \to \\ \\ m(r) \to \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}P(r)}{\mathrm{d}r} = -\frac{m(r)\rho(r)}{r^2}\left(1 + \frac{P(r)}{\rho(r)}\right)\left(1 + \frac{4\pi r^3 P(r)}{m(r)}\right)\left(1 - 2\frac{m(r)}{r}\right)^{-1} \tag{17}$$

  integrando esta ecuación obtendremos el perfil de presiones;

- para el **caso anisótropo relativista**

$$\left.\begin{array}{r} \rho(r) \to \\ \\ m(r) \to \\ \\ P_\perp(r) = K_2\rho^{\gamma_2}(r) \to \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{rl} \frac{\mathrm{d}P(r)}{\mathrm{d}r} = & -\frac{m(r)\rho(r)}{r^2}\left(1 + \frac{P(r)}{\rho(r)}\right)\left(1 + \frac{4\pi r^3 P(r)}{m(r)}\right)\left(1 - 2\frac{m(r)}{r}\right)^{-1} \\ & +2\frac{K_2\rho^{\gamma_2}(r) - P(r)}{r} \end{array} \tag{18}$$

  integrando esta ecuación obtendremos el perfil de presiones.

[7]Gokhroo, M. K., y A. L. Mehra. "Anisotropic spheres with variable energy density in general relativity".General relativity and gravitation 26, no. 1 (1994): 75-84.

3.3.2. Densidad y presión radial isótropas conocidas

Esta estrategia consiste en suponer que se conocen los perfiles densidad y presión para un modelo (isótropo) conocido y despejar la expresión de para la presión anisótropa que cumpla la ecuación de equilibrio hidrostático. En ambos casos utilizamos los perfiles de densidad que se ilustran en las ecuaciones 12 y 13, así una vez más tendremos:

1. **Caso isótropo newtoniano.** A partir del los perfiles 12 y 13, utilizando 14, obtenga el perfil de presión mediante 15

2. **Caso anisótropo newtoniano.** Con el perfil de densidad seleccionado y el de presión obtenido del caso isótropo, obtenga el perfil de presiones tangenciales a partir de 6.

3. **Caso isótropo relativista.** Al igual que el caso newtoniano, utilizando la expresión para la densidad, se integra el perfil de presión radial a partir de las ecuaciones 7

4. **Caso anisótropo relativista** Con el perfil de densidad seleccionado y el perfil de presión obtenido del caso anterior (isótropo), despeje el perfil de presiones tangenciales a partir de 8

3.4. Propuesta de anisotropía

Otra estrategia integrar el sistema 1, 2 y 3 es proponer una expresión para la diferencia de presiones radiales y tangenciales, $\Delta = P_{\perp}(r) - P(r)$. Por falta de información experimental uno puede tomar el camino de la simplicidad propuesto por R.L. Bowers y E.P.T. Liang [8] para el caso relativista y más recientemente por Herrera y Barreto[9], para el caso newtoniano. La idea en ambos casos es proponer una funcionalidad para Δ que permita integrar fácilmente la ecuación de equilibrio hidrostático. De esta forma, para el caso newtoniano se tiene

$$\frac{\mathrm{d}P(r)}{\mathrm{d}r} = -\frac{m(r)\rho(r)}{r^2} + 2\frac{P_{\perp}(r) - P(r)}{r} \quad \Rightarrow \Delta = \mathcal{C}\frac{m(r)\rho(r)}{r} \quad \Rightarrow \frac{\mathrm{d}P(r)}{\mathrm{d}r} = h\frac{m(r)\rho(r)}{r^2} \tag{19}$$

con $h = 2\mathcal{C} - 1$ una constante que mide la diferencia de presiones y, por consiguiente la anisotropía. Del mismo modo, para el caso relativista propondremos

$$\Delta = \frac{\mathcal{C}}{r}\left(1 + \frac{P(r)}{\rho(r)}\right)\left(1 + \frac{4\pi r^3 P(r)}{m(r)}\right)\left(1 - 2\frac{m(r)}{r}\right)^{-1} \tag{20}$$

Con lo cual, la ecuación 8 se convierte en

$$\frac{\mathrm{d}P(r)}{\mathrm{d}r} = h\frac{m(r)\rho(r)}{r^2}\left(1 + \frac{P(r)}{\rho(r)}\right)\left(1 + \frac{4\pi r^3 P(r)}{m(r)}\right)\left(1 - 2\frac{m(r)}{rc}\right)^{-1} \tag{21}$$

y otra vez $h = 2\mathcal{C} - 1$ es una constante que mide la anisotropía.

3.4.1. Presión radial barótropa polítropa

Suponga que la ecuación de estado es $P(r) = K\rho^{\gamma}(r)$ e integre el sistema 9 y 19 para el caso newtoniano y equivalentemente 9 y 21 para el caso relativista

[8] Bowers, Richard L., y E. P. T. Liang. “Anisotropic spheres in general relativity.”The Astrophysical Journal 188 (1974): 657.
[9] Herrera, L., y W. Barreto. “Newtonian polytropes for anisotropic matter: General framework and applications.” Physical Review D 87, no. 8 (2013): 087303.

3.4.2. Presión radial barótropa no local

Suponga que la ecuación de estado es $P(r) = \rho(r) - \frac{2}{r^3}\int_0^r \mathrm{d}\bar{r}\, \bar{r}^2 \rho(\bar{r})$ e integre el sistema 9 y 19 para el caso newtoniano y equivalentemente 9 y 21 para el caso relativista

3.4.3. Densidad conocida

Suponga los perfiles de densidad expuestos en la sección 3.3 e integre e integre el sistema 9 y 19 para el caso newtoniano y equivalentemente 9 y 21 para el caso relativista