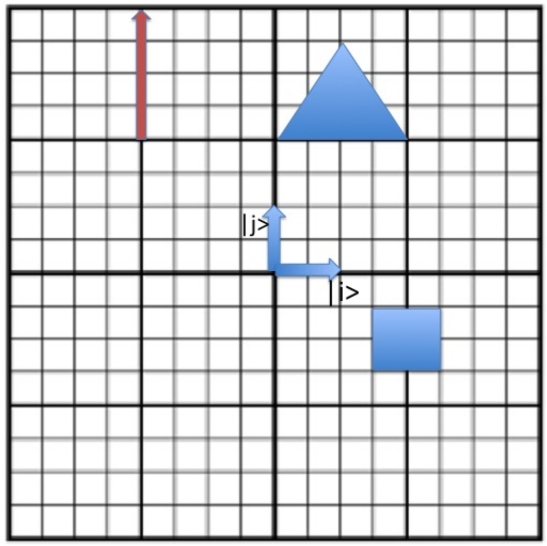

Figura 1: Se ilustran los vectores ortonormales estándares $\{\hat{\imath}, \hat{\jmath}\}$ y como siempre $\hat{k} = \hat{\imath} \times \hat{\jmath}$

Modelado y simulación
Examen 1

Considere el espacio $\mathcal{R}^3$ expadido por la base ortonormal estándar $\left\{\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}\right\}$ y suponga en este espacio el producto de dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ (o $|a\rangle$ y $|b\rangle$ en la notación de vectores abstractos de Dirac) definido a la manera del *álgebra geométrica*[1]. Esto es:

$$|a\rangle \bigodot |b\rangle \equiv \vec{a}\vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \wedge \vec{b}$$

con $\vec{a} \cdot \vec{b}$ el producto escalar estándar de $\mathcal{R}^3$, representando la parte conmutativa de $\vec{a}\vec{b}$ y $\vec{a} \wedge \vec{b}$ su parte anticonmutativa. Esta última parte se relaciona con el producto vectorial estándar de la representación de Gibbs como $\vec{a} \wedge \vec{b} = i\vec{a} \times \vec{b}$, con $i = \hat{\imath} \wedge \hat{\jmath} \wedge \hat{k}$ un pseudoescalar[2].

Este formalismo ha tenido cierto impacto en computación gráfica[3] y lo vamos a utilizar para modelar transformaciones de objetos en el espacio.

Considere el caso 2D representado en la figura 1 y en el formalismo de algebra geométrica el objeto triángulo lo asociamos con vector abstracto $|\triangle\rangle$, mientras que el objeto cuadrado lo representaremos como $|\square\rangle$, y el tercer objeto por $|\Uparrow\rangle$.

1. Exprese los vectores: $|\triangle\rangle, |\square\rangle, |\Uparrow\rangle$ en términos de la base ortonormal estándar $\left\{\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}\right\}$ y el formalismo de álgebra geométrica.

[1] Hestenes, David. Vectors, spinors, and complex numbers in classical and quantum physics. *Am. J. Phys* **3**9, no. 9 (1971): 1013-1027.

[2] Y equivalentemente, por isomorfismo $i = \sqrt{-1}$

[3] Pueden consultar Hildenbrand, D., D. Fontijne, Ch Perwass, and L. Dorst. Geometric algebra and its application to computer graphics. In Tutorial notes of the EUROGRAPHICS conference. 2004; o también Hildenbrand, Dietmar. From Grassmann?s vision to geometric algebra computing. Springer Basel, 2011

2. Exprese $|\triangle\rangle \bigodot |\Uparrow\rangle$ en término de la base geométrica. Vale decir si $|O_g\rangle$ es un objeto geométrico puede representarse en términos de una base $|\epsilon\rangle, |\vec{\sigma}\rangle, |B\rangle, |i\rangle$ donde $|\epsilon\rangle$ un escalar; $|\vec{\sigma}\rangle$ un vector; $|B\rangle$ un bivector y, finalmente $|i\rangle$ un pseudoescalar.

3. Encuentre la norma de cada uno de ellos y la distancia entre $|\triangle\rangle$ y $|\Uparrow\rangle$.

4. Considere ahora la operación $\mathbb{A}|\triangle\rangle = \left|\tilde{\triangle}\right\rangle$

   a) Si $\mathbb{A}_{|\hat{\jmath}\rangle}$ es el operador reflexión respecto $|\hat{\jmath}\rangle$, exprese en términos geométricos $\left|\tilde{\triangle}\right\rangle = \mathbb{A}_{|\hat{\jmath}\rangle}|\triangle\rangle$ y $\mathbb{A}_{|\hat{\imath}\rangle}\left(|\triangle\rangle \bigodot |\Uparrow\rangle\right)$

   b) Si $\mathbb{A}_{\theta,|B\rangle}$ es el operador de rotación alrededor de un bivector $|B\rangle$ un ángulo θ Encuentre $\mathbb{A}_{\pi/4,|B\rangle}\left(|\triangle\rangle \bigodot |\Uparrow\rangle\right)$ con $|B\rangle = |\hat{\jmath}\rangle + \left|\hat{\mathrm{k}}\right\rangle$

   c) ¿Cómo interpreta Ud la ecuación de autovalores $\mathbb{A}|\triangle\rangle = 2|\triangle\rangle$?

5. Considere el caso 3D en el cual $\left|\hat{\triangle}\right\rangle$ representa un tetraedro regular con la base representada por la figura 1 y $\left|\hat{\square}\right\rangle$, un cubo, también con su base representada en el plano de la misma figura.

   a) Exprese los vectores: $\left|\hat{\triangle}\right\rangle, \left|\hat{\square}\right\rangle$ en términos de la base ortonormal estándar $\left\{\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{\mathrm{k}}\right\}$ y el formalismo de álgebra geométrica.

   b) Exprese $\left(\left|\hat{\triangle}\right\rangle \bigodot |\Uparrow\rangle\right) \bigodot |\triangle\rangle$ en término de la base geométrica.

   c) Encuentre la norma de $\left|\hat{\triangle}\right\rangle$ y la distancia entre $\left|\hat{\triangle}\right\rangle$ y $\mathbb{A}_{\pi/2,|-\hat{j}\rangle}\left|\hat{\square}\right\rangle$.

   d) Exprese $\left[\mathbb{A}_{\pi/2,|-\hat{j}\rangle}, \mathbb{B}_{\pi/4,|\hat{i}\rangle}\right]\left|\hat{\square}\right\rangle$ con $\left[\mathbb{A}_{\pi/2,|-\hat{j}\rangle}, \mathbb{B}_{\pi/4,|\hat{i}\rangle}\right] = \mathbb{A}_{\pi/2,|-\hat{j}\rangle}\mathbb{B}_{\pi/4,|\hat{i}\rangle} - \mathbb{B}_{\pi/4,|\hat{i}\rangle}\mathbb{A}_{\pi/2,|-\hat{j}\rangle}$