

# Matemáticas Avanzadas:

## Variable Compleja, Series y Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

**H. Hernández**

*Departamento de Física, Facultad de Ciencias,  
Universidad de Los Andes, Mérida-Venezuela*

**L. A. Núñez**

*Escuela de Física, Facultad de Ciencias,  
Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga-Colombia*

8 de septiembre de 2015

# Índice general

<b>1. Variable Compleja</b>	<b>5</b>
1.1. Vectores y números complejos . . . . .	6
1.1.1. Los números complejos y su álgebra . . . . .	6
1.1.2. Vectores y el plano complejo . . . . .	7
1.1.3. Fórmulas de Euler y de Moivre . . . . .	8
1.1.4. Algunas aplicaciones inmediatas . . . . .	10
1.2. Funciones de Variable Compleja . . . . .	14
1.2.1. De la recta real al plano complejo . . . . .	14
1.2.2. Continuidad en el plano complejo . . . . .	14
1.2.3. Diferenciabilidad de funciones complejas . . . . .	14
1.2.4. Funciones Analíticas y Condiciones de Cauchy-Riemann . . . . .	15
1.2.5. Curiosidades de Cauchy-Riemann . . . . .	17
1.3. Puntos y líneas de corte, ceros de funciones complejas . . . . .	18
1.3.1. Puntos y líneas de corte . . . . .	18
1.3.2. Singularidades, polos y ceros de funciones complejas . . . . .	20
1.4. Transformaciones conformes . . . . .	24
1.4.1. Algunas consecuencias y ejemplos . . . . .	25
1.5. Integrales complejas . . . . .	27
1.5.1. Algunas propiedades . . . . .	27
1.6. Teorema Integral de Cauchy . . . . .	29
1.6.1. El teorema y las regiones . . . . .	29
1.6.2. Algunas observaciones y el Teorema de Morera . . . . .	30
1.6.3. Fórmula integral de Cauchy . . . . .	32
<b>2. Series</b>	<b>36</b>
2.1. Sucesiones y Series . . . . .	37
2.2. Introducción a las Series . . . . .	39
2.2.1. Series elementales . . . . .	41
2.3. Más sobre las series geométricas . . . . .	44
2.3.1. Derivación de series geométricas elementales . . . . .	44
2.4. El método de la diferencia . . . . .	47
2.4.1. Sumando por analogía . . . . .	48
2.5. Algebra Elemental de Series . . . . .	49

2.6. Series telescópicas . . . . .	50
2.7. Criterios de Convergencia . . . . .	52
2.7.1. Convergencia Absoluta o Condicional . . . . .	52
2.7.2. Criterio de Comparación . . . . .	53
2.7.3. Criterio de la Raíz . . . . .	53
2.7.4. Criterio de d'Alembert . . . . .	54
2.7.5. Criterio de la Integral de Maclaurin . . . . .	55
2.7.6. Series alternantes y convergencia condicional . . . . .	56
2.8. Series de funciones . . . . .	59
2.8.1. Series de Potencias . . . . .	60
2.8.2. Convergencia de una serie de potencias . . . . .	60
2.8.3. Convergencia uniforme . . . . .	61
2.8.4. Criterio Mayorante de Weierstrass . . . . .	63
2.8.5. Criterio de Abel . . . . .	64
2.9. Algebra de series de potencias . . . . .	66
2.10. Serie de Taylor . . . . .	68
2.10.1. Algunas Series de Taylor . . . . .	70
2.10.2. La expansión binomial . . . . .	70
2.10.3. Taylor en varias variables . . . . .	72
2.11. Series y Espacios de Hilbert . . . . .	73
2.11.1. Completitud de $E^\infty$ . . . . .	73
2.11.2. Conjunto completo de funciones . . . . .	75
2.12. Series de Laurent . . . . .	76
2.12.1. Series de Taylor para funciones analíticas . . . . .	76
2.12.2. Series de Laurent . . . . .	78
2.12.3. Algunos Ejemplos . . . . .	80
2.12.4. Integración por el método de los residuos . . . . .	83
2.12.5. Los residuos de Laurent . . . . .	83
2.13. Teorema del Residuo . . . . .	84
2.13.1. Integrales impropias del tipo $\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x)$ . . . . .	84
2.13.2. Evaluación de integrales, reales, impropias . . . . .	85
2.13.3. Integrales impropias del tipo $\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x)$ . . . . .	86
2.13.4. Integrales de funciones racionales de $\cos \theta$ y $\sin \theta$ . . . . .	88
2.14. Integrales de Fourier . . . . .	89
2.15. Series de Polinomios Ortogonales . . . . .	92
2.16. Polinomios de Legendre . . . . .	93
2.16.1. Generalidades de los Polinomios de Legendre . . . . .	93
2.16.2. Relación de Recurrencia . . . . .	95
2.16.3. Norma de los Polinomios de Legendre . . . . .	97
2.16.4. Función Generatriz de los Polinomios de Legendre . . . . .	98
2.16.5. Otras propiedades de los polinomios de Legendre . . . . .	100
2.16.6. Potencial Electrostático de un Dipolo Eléctrico . . . . .	101
2.16.7. Resumen de Propiedades Polinomios Legendre . . . . .	102
2.17. Polinomios de Hermite . . . . .	102
2.17.1. Generalidades de los Polinomios de Hermite . . . . .	103
2.17.2. Función Generatriz de los Polinomios de Hermite . . . . .	106
2.17.3. Relación de Recurrencia . . . . .	107
2.17.4. Ortogonalidad y Norma de los Polinomios de Hermite . . . . .	108

2.17.5. Representación Integral de los Polinomios de Hermite . . . . .	109
2.17.6. El Oscilador armónico, independiente del tiempo, en Mecánica Cuántica. . . . .	109
2.17.7. Resumen de Propiedades Polinomios Hermite . . . . .	111
2.18. Planteamiento General para Polinomios Ortogonales . . . . .	111
2.18.1. Producto interno genérico, norma y ortogonalidad . . . . .	112
2.18.2. Fórmula de Rodrigues generalizada . . . . .	112
2.18.3. Ejemplos de Polinomios Ortogonales . . . . .	113
2.18.4. Relaciones de Recurrencia . . . . .	113
2.18.5. Función generatriz generalizada . . . . .	113
2.18.6. Ecuación diferencial para los Polinomios Ortogonales . . . . .	114
2.18.7. Aplicaciones para los polinomios ortogonales . . . . .	114
2.19. Series y transformadas de Fourier . . . . .	120
2.20. Condiciones de Dirichlet . . . . .	123
2.21. Algunos ejemplos de expansiones en series de Fourier . . . . .	124
2.21.1. Ondas Cuadradas . . . . .	124
2.21.2. Variedades de dientes de sierra . . . . .	125
2.21.3. Función cuadrática . . . . .	126
2.22. Consideraciones de Simetría en series de Fourier . . . . .	127
2.22.1. Tratamiento de discontinuidades . . . . .	127
2.23. El Fenómeno de Gibbs . . . . .	127
2.23.1. Corrección al fenómeno de Gibbs: Factor $\sigma$ de Lanczos . . . . .	128
2.24. Transformadas de Fourier . . . . .	129
2.24.1. Propiedades . . . . .	130
2.24.2. Funciones pares e impares . . . . .	130
2.24.3. Bases discreta y continuas: La base de Ondas Planas . . . . .	131
2.24.4. Un par de ejemplos . . . . .	132
2.24.5. Transformadas Discretas de Fourier . . . . .	133

Capítulo **1**

Variable Compleja

## 1.1. Vectores y números complejos

Desde los cursos elementales de matemática nos hemos tropezado con las llamadas raíces imaginarias o complejas de polinomios. De este modo la solución a un polinomio cúbico

$$x^3 - 3x^2 + 4x - 12 = 0 \implies \left\{ \begin{array}{l} x = 2i \\ x = -2i \\ x = 3 \end{array} \right\} \implies (x + 2i)(x - 2i)(x - 3) = 0$$

o cuadrático

$$x^2 + 4 = 0 \implies \left\{ \begin{array}{l} x = 2i \\ x = -2i \end{array} \right\} \implies (x + 2i)(x - 2i)$$

nos lleva a definir un número  $i^2 = -1 \iff i = \sqrt{-1}$ , como se puede ver, al multiplicar el número imaginario  $i$  por cualquier número real obtendremos el número imaginario puro  $bi$ , con  $b \in \mathfrak{R}$ . La nomenclatura números imaginarios surgió de la idea de que estas cantidades no representan mediciones físicas. Esa idea ha sido abandonada pero el nombre quedó.

### 1.1.1. Los números complejos y su álgebra

Un número complejo,  $z$ , es la generalización de los números imaginarios (puros),  $ib$ . Esto es

$$z = a + ib \quad \text{con } a, b \in \mathfrak{R} \implies \left\{ \begin{array}{l} a \rightarrow \text{ parte real} \\ b \rightarrow \text{ parte imaginaria} \end{array} \right.$$

Obviamente los números reales serán  $a + i0$ , números complejos con su parte imaginaria nula. Los números imaginarios puros serán números complejos con su parte real nula, esto es  $0 + ib$ . Por ello en general diremos que

$$z = a + ib \implies a = \text{Re}(z) \quad \wedge \quad b = \text{Im}(z)$$

es decir,  $a$  corresponde a la parte real de  $z$  y  $b$  a su parte imaginaria.

Cada número complejo,  $z$ , tendrá un número complejo conjugado,  $z^*$  tal que

$$\begin{aligned} z = a + ib &\iff z^* = a - ib \\ &\Downarrow \\ (z^*)^* &= z \quad \wedge \quad z \cdot z^* = a^2 + b^2 \end{aligned}$$

claramente

$$z \cdot z^* \geq 0 \implies |z|^2 = |z^*|^2 = z \cdot z^*$$

Es importante señalar que, en general, no existe relación de orden entre los números complejos. Vale decir, que no sabremos si un número complejo es mayor que otro. No está definida esta operación.

$$z_1 \not> z_2 \quad \vee \quad z_1 \not< z_2$$

las relaciones de orden sólo se podrán establecer entre módulos de números complejos y no números complejos en general.

Rápidamente recordamos el álgebra de los números complejos:

- dos números complejos serán iguales si sus partes reales e imaginarios lo son

$$z_1 = z_2 \implies (a_1 + ib_1) = (a_2 + ib_2) \implies a_1 = a_2 \quad \wedge \quad b_1 = b_2$$

- se suman dos números complejos sumando sus partes reales y sus partes imaginarias.

$$z_3 = z_1 + z_2 \implies (a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = \underbrace{(a_1 + a_2)}_{a_3} + i \underbrace{(b_1 + b_2)}_{b_3} = a_3 + ib_3$$

claramente  $z + z^* = 2 \operatorname{Re}(z)$  también  $z - z^* = 2 \operatorname{Im}(z)$ . Igualmente es inmediato comprobar que

$$(z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^*$$

- se multiplican números complejos por escalares multiplicando el escalar por sus partes reales e imaginarias

$$z_3 = \alpha z_1 \implies \alpha (a_1 + ib_1) = (\alpha a_1) + i(\alpha b_1)$$

- se multiplican números complejos entre si, multiplicando los dos binomios y teniendo cuidado que  $i^2 = -1$ .

$$z_3 = z_1 z_2 \implies (a_1 + ib_1) \cdot (a_2 + ib_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + b_1 a_2)$$

también es inmediato comprobar que  $(z_1 z_2)^* = z_1^* z_2^*$ .

- se dividen números complejos siguiendo la estrategia de racionalización de fracciones irracionales. Esto es

$$z_3 = \frac{z_1}{z_2} \implies \frac{(a_1 + ib_1)}{(a_2 + ib_2)} = \frac{(a_1 + ib_1)(a_2 - ib_2)}{(a_2 + ib_2)(a_2 - ib_2)} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{(a_2^2 + b_2^2)} + i \frac{b_1 a_2 - a_1 b_2}{(a_2^2 + b_2^2)}$$

es claro que el divisor será cualquier número complejo excepto el cero complejo,  $0 + i0$ .

### 1.1.2. Vectores y el plano complejo

Mirando con cuidado el álgebra de números complejos nos damos cuenta que un número complejo puede ser representado por una *dupla* de números complejos es decir,

$$z = (a + ib) \iff z = (a, b)$$

las propiedades entre números complejos de igualdad, suma y multiplicación por un escalar arriba expuestas se cumplen de forma inmediata con esta nueva representación. Hay que definir las operaciones de multiplicación y división entre números complejos de forma que

$$(a_1, b_1)(a_2, b_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + b_1 a_2) \quad \wedge \quad \frac{(a_1, b_1)}{(a_2, b_2)} = \left( \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{(a_2^2 + b_2^2)}, \frac{b_1 a_2 - a_1 b_2}{(a_2^2 + b_2^2)} \right)$$

Esta asociación de un número complejo con una pareja de números inmediatamente nos lleva a imaginar un punto en un plano (complejo) en el cual la primera componente (horizontal) representa la parte real y la segunda componente (vertical) representa la parte imaginaria. De esta forma asociamos a un número complejo un vector que une a ese punto  $(a, b)$  con el origen del plano complejo. Esta representación de números complejos como vectores en el plano (complejo), se conoce con el nombre de Diagrama de Argand<sup>1</sup> a pesar que no fue Jean Argand, sino Caspar Wessel<sup>2</sup> el primero en proponerlo. Por cierto esta interpretación

<sup>1</sup>En honor a Jean Robert Argand, (Ginebra, Suiza, 18 Julio 1768; Paris, Francia 13 agosto 1822) Contador pero matemático aficionado. Propuso esta interpretación de números complejos como vectores en un plano complejo en un libro autoeditado con sus reflexiones que se perdió y fue rescatado 7 años después, fecha a partir de la cual Argand comenzó a publicar en Matemáticas.

<sup>2</sup>Caspar Wessel (Vestby, Noruega 8 junio 1745; 25 marzo 1818, Copenhagen, Dinamarca) Matemático noruego que se dedicó principalmente al levantamiento topográfico de Noruega. Su trabajo sobre la interpretación de números complejos permaneció desconocido por casi 100 años.

fue tres veces redescubierta primero por Caspar Wessel en 1799, luego por Jean Argand en 1806 y finalmente por Gauss<sup>3</sup> en 1831.

De esta manera como un recordatorio al plano real tenemos

$$z = x + iy \iff z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) \quad \text{con} \quad \begin{cases} r = \sqrt{zz^*} = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tan(\theta) = \frac{y}{x} \quad \text{donde} \quad -\pi \leq \theta \leq \pi \end{cases}$$

A la cantidad

$$\arg z \equiv \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

se le denomina el *argumento* de  $z$ . Se puede ver que no es más que el ángulo polar del número complejo en el diagrama de Argand.

La interpretación vectorial de números complejos permite que la suma de números complejos sea representada por la “regla del paralelogramo”. Mientras que los productos escalar y vectorial nos llevan a

$$z_1 \cdot z_2 = \operatorname{Re}(z_1 z_2^*) = \operatorname{Re}(z_1^* z_2) \quad \wedge \quad z_1 \times z_2 = \operatorname{Im}(z_1^* z_2) = -\operatorname{Im}(z_1 z_2^*)$$

Con esta interpretación tendremos

$$\begin{aligned} x = \operatorname{Re}(z) &\iff \text{componente real del vector } z \text{ o parte real de } z \\ y = \operatorname{Im}(z) &\iff \text{componente imaginaria del vector } z \text{ o parte real de } z \\ r = \sqrt{zz^*} = |z| &\iff \text{módulo, magnitud o valor absoluto de } z \\ \arg z = \theta &\iff \text{ángulo polar o de fase del número complejo } z \end{aligned}$$

### 1.1.3. Fórmulas de Euler y de Moivre

Nos hemos tropezado con la expansión en Taylor<sup>4</sup>, esta serie permite expresar cualquier función infinitamente diferenciable alrededor de un punto  $x_0$  como una serie infinita de potencias del argumento de la función. Esto es

$$f(x) = f(x_0) + \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_0} (x - x_0) + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \right|_{x=x_0} (x - x_0)^2 + \frac{1}{3!} \left. \frac{d^3 f(x)}{dx^3} \right|_{x=x_0} (x - x_0)^3 + \dots$$

$$f(x) = C_n (x - x_0)^n \quad \text{con} \quad C_n = \left. \frac{1}{n!} \frac{d^n f(x)}{dx^n} \right|_{x=x_0} \quad \text{donde } n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

<sup>3</sup> Johann Carl Friedrich Gauss (30 abril 1777, Brunswick, Alemania; 23 febrero 1855, Göttingen, Alemania). Uno de los matemáticos más geniales y precoces de la Historia. Desde los 7 años comenzó a mostrar sus condiciones de genialidad. Sus contribuciones en Astronomía y Matemáticas son múltiples y diversas.

<sup>4</sup> Brook Taylor (18 agosto 1685, Edmonton, Inglaterra; 29 diciembre 1731, Londres, Inglaterra) Físico y Matemático Inglés contemporáneo de Newton y Leibniz y con ellos participó profundamente en el desarrollo del cálculo diferencial e integral. Además de sus aportes al magnetismo, capilaridad y termometría. Desarrolló el área de diferencias finitas que hasta hoy utilizamos para cálculos en computación. Inventó la integración por partes y descubrió la serie que lleva su nombre.

con lo cual si consideramos  $x_0 = 0$ , entonces, por ejemplo:

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{120}x^5 + \frac{1}{720}x^6 + \frac{1}{5040}x^7 + \dots$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^6 + \dots$$

$$\operatorname{sen}(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{5040}x^7 + \dots$$

Ahora bien, es fácil convencerse que

$$e^{i\theta} = 1 + i\theta - \frac{1}{2}\theta^2 + \left(-\frac{1}{6}i\right)\theta^3 + \frac{1}{24}\theta^4 + \frac{1}{120}i\theta^5 - \frac{1}{720}\theta^6 + \left(-\frac{1}{5040}i\right)\theta^7 + \dots$$

puede reorganizarse como

$$e^{i\theta} = \underbrace{\left(1 - \frac{1}{2}\theta^2 + \frac{1}{24}\theta^4 - \frac{1}{720}\theta^6 + \dots\right)}_{\cos(\theta)} + i \underbrace{\left(\theta - \frac{1}{6}\theta^3 + \frac{1}{120}\theta^5 - \frac{1}{5040}\theta^7 + \dots\right)}_{\operatorname{sen}(\theta)}$$

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\operatorname{sen}(\theta)$$

esta relación se conoce como la relación de Euler <sup>5</sup>. Con lo cual ahora tenemos tres formas de representar un número complejo

$$z = x + iy \iff z = r(\cos(\theta) + i\operatorname{sen}(\theta)) \iff z = re^{i\theta}$$

La expresión  $z = x + iy$  se conoce como forma cartesiana de representación de un número complejo, la forma  $z = r(\cos \theta + i\operatorname{sen}(\theta))$  será la forma trigonométrica y la expresión  $z = e^{i\theta}$  será la forma de Euler. Es importante notar una sutileza implícita en esta notación. La forma cartesiana representa unívocamente a un número complejo, mientras que la forma polar (y la de Euler), es ambigua

$$z = r(\cos(\theta) + i\operatorname{sen}(\theta)) = r(\cos(\theta + 2n\pi) + i\operatorname{sen}(\theta + 2n\pi)), \quad (1.1)$$

es decir, existen varios valores del argumento que definen el mismo número complejo. Esto se considerará más adelante cuando tratemos las funciones de número complejo.

Las suma de números complejos es más fácilmente planteable en su forma cartesiana. Mientras las multiplicación y división serán directas en la forma de Euler

$$\left. \begin{array}{l} z_1 = r_1 e^{i\theta_1} \\ z_2 = r_2 e^{i\theta_2} \end{array} \right\} \implies z_1 z_2 = r_1 e^{i\theta_1} r_2 e^{i\theta_2} = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)} = r_1 r_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2))$$

Más aún, si

$$z = x + iy \implies e^z = e^{(x+iy)} = e^x e^{iy} = e^x (\cos(y) + i\operatorname{sen}(y))$$

<sup>5</sup>Leonhard Euler (15 abril 1707, Basilea, Suiza; 18 septiembre 1783, San Petersburgo, Rusia). Uno de los matemáticos más prolíficos de todos los tiempos. Desarrolló inmensamente campos como la geometría analítica y trigonometría, siendo el primero que consideró el coseno y el seno como funciones. Hizo aportes significativos en el desarrollo del cálculo diferencial e integral así como también, astronomía, elasticidad y mecánica de medios continuos.

y a partir de la relación o fórmula de Euler se puede demostrar la fórmula de De Moivre <sup>6</sup>

$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta} \Leftrightarrow (\cos(\theta) + i\operatorname{sen}(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\operatorname{sen}(n\theta) \quad \text{con } n \text{ entero.}$$

### 1.1.4. Algunas aplicaciones inmediatas

Presentaremos algunas aplicaciones inmediatas la fórmula de de Moivre en diferentes ámbitos.

#### Identidades trigonométricas

La primera de las aplicaciones de la fórmula de Moivre es para construir identidades trigonométricas en las cuales se expresa el coseno, o el seno, de factores de un ángulo. Veamos las siguientes (nada triviales) identidades trigonométricas

$$\cos(3\theta) = 4\cos^3(\theta) - 3\cos(\theta) \quad \text{o} \quad \operatorname{sen}(3\theta) = 3\operatorname{sen}(\theta) - 4\operatorname{sen}^3(\theta),$$

para demostrar estas (y otras) identidades utilizamos la fórmula de Moivre, es decir

$$\begin{aligned} \cos(3\theta) + i\operatorname{sen}(3\theta) &= (\cos(\theta) + i\operatorname{sen}(\theta))^3 \\ &= \cos^3(\theta) - 3\cos(\theta)\operatorname{sen}^2(\theta) + i(3\cos^2(\theta)\operatorname{sen}(\theta) - \operatorname{sen}^3(\theta)), \end{aligned}$$

igualando ahora parte real e imaginaria tendremos

$$\begin{aligned} \cos(3\theta) &= \cos^3(\theta) - 3\cos(\theta)\operatorname{sen}^2(\theta) \\ &= \cos^3(\theta) - 3\cos(\theta)(1 - \cos^2(\theta)) = 4\cos^3(\theta) - 3\cos(\theta) \\ \operatorname{sen}(3\theta) &= 3\cos^2(\theta)\operatorname{sen}(\theta) - \operatorname{sen}^3(\theta) \\ &= 3(1 - \operatorname{sen}^2(\theta))\operatorname{sen}(\theta) - \operatorname{sen}^3(\theta) = 3\operatorname{sen}(\theta) - 4\operatorname{sen}^3(\theta). \end{aligned}$$

El método puede extenderse a expresiones de senos y cosenos de  $n\theta$ .

Igualmente podemos desarrollar un método para encontrar expresiones de potencias de funciones trigonométricas en término de funciones de factores de ángulo del tipo  $(\cos(\theta))^n = F(\cos(n\theta), \operatorname{sen}(n\theta))$ . Para empezar, supongamos que tenemos un número complejo de módulo 1, de tal forma que

$$z = e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\operatorname{sen}(\theta) \Rightarrow \begin{cases} z^n + \frac{1}{z^n} = 2\cos(n\theta) \\ z^n - \frac{1}{z^n} = 2i\operatorname{sen}(n\theta) \end{cases}$$

Estas identidades surgen de manera inmediata de

$$\begin{aligned} z^n + \frac{1}{z^n} &= (\cos(\theta) + i\operatorname{sen}(\theta))^n + (\cos(\theta) + i\operatorname{sen}(\theta))^{-n} = (\cos(n\theta) + i\operatorname{sen}(n\theta)) + (\cos(-n\theta) + i\operatorname{sen}(-n\theta)) \\ &= \cos(n\theta) + i\operatorname{sen}(n\theta) + \cos(n\theta) - i\operatorname{sen}(n\theta) = 2\cos(n\theta), \end{aligned}$$

igualmente puede demostrarse la segunda de las afirmaciones anteriores.

<sup>6</sup>Abraham de Moivre (26 mayo 1667 in Vitry-le-François, Francia; 27 noviembre 1754, Londres Inglaterra) Matemático francés que tuvo que emigrar a Inglaterra por razones religiosas. Contemporáneo de Newton, Leibniz, Halley, fue pionero con sus contribuciones en Geometría Analítica y Teoría de Probabilidades.

Ahora bien, supongamos además que  $n = 1$ , con lo cual se cumple que

$$z + \frac{1}{z} = e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2 \cos(\theta) \quad \text{y} \quad z - \frac{1}{z} = e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i \operatorname{sen}(\theta),$$

que también lo sabíamos desde la más temprana edad de nuestros cursos de bachillerato. Ahora bien, lo que quizá no sabíamos en ese entonces (y quizá ahora tampoco) es que a partir de aquí podemos construir, por ejemplo:

$$\cos^5(\theta) = \frac{1}{2^5} \left( z + \frac{1}{z} \right)^5 = \frac{1}{2^5} \left[ \left( z^5 + \frac{1}{z^5} \right) + \left( 5z^3 + \frac{5}{z^3} \right) + \left( 10z + \frac{10}{z} \right) \right],$$

es decir

$$\cos^5(\theta) = \frac{1}{2^5} [2 \cos(5\theta) + 10 \cos(3\theta) + 20 \cos(\theta)],$$

de la misma manera se puede proceder con otras potencias y con potencias de la función seno.

### Raíces de polinomios

La fórmula de De Moivre nos puede ayudar para encontrar raíces de polinomios. Supongamos, para empezar, que queremos encontrar las  $n$  raíces de la ecuación  $z^n = 1$ . Para ello procedemos con el siguiente artificio

$$z^n = 1 = \cos(2\pi k) + i \operatorname{sen}(2\pi k) = e^{i(2\pi k)}, \quad \text{donde } k = 0, 1, 2, \dots$$

con lo cual las  $n$  raíces de la ecuación  $z^n = 1$  serán

$$\begin{aligned} z^n = 1 &\Rightarrow z = e^{i\left(\frac{2\pi k}{n}\right)} \\ &\Downarrow \\ \overbrace{z_0 = 1; \quad z_1 = e^{2\pi i\left(\frac{1}{n}\right)}; \quad z_2 = e^{2\pi i\left(\frac{2}{n}\right)}; \quad z_3 = e^{2\pi i\left(\frac{3}{n}\right)}; \dots \quad z_{n-2} = e^{2\pi i\left(\frac{n-2}{n}\right)}; \quad z_{n-1} = e^{2\pi i\left(\frac{n-1}{n}\right)}} \end{aligned}$$

es decir,  $n$  raíces corresponderán a los  $n$  valores de  $k = 0, 1, 2, \dots, n-2, n-1$ . Mayores valores de  $k$  no proveen nuevas raíces.

Estas propiedades pueden extenderse a raíces de polinomios. Supongamos la siguiente ecuación polinómica con sus raíces:

$$z^5 - z^4 + 2z - 2 = 0 \Rightarrow (z^4 + 2)(z - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} z^4 + 2 = 0 \Rightarrow z^4 = -2 \\ z - 1 = 0 \Rightarrow z = 1 \end{cases}$$

una vez más

$$z^4 = -2(1) = -2 \left( e^{i(2\pi k)} \right) \Rightarrow z = \left[ -2 \left( e^{i(2\pi k)} \right) \right]^{1/4} = (-2)^{1/4} e^{i\left(\frac{2\pi k}{4}\right)} = \frac{1}{2} (1+i) 2^{3/4} e^{i\left(\frac{2\pi k}{4}\right)}$$

donde hemos utilizado el hecho de que:  $(-1)^{1/4} = i^{1/2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$ . Por lo tanto:

$$\begin{aligned} z_0 &= \frac{1}{2} (1+i) 2^{3/4}, \quad z_1 = \frac{1}{2} (1+i) 2^{3/4} e^{i\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{i}{2} (1+i) 2^{3/4}, \\ z_2 &= \frac{1}{2} (1+i) 2^{3/4} e^{i(\pi)} = -\frac{1}{2} (1+i) 2^{3/4}, \quad z_3 = \frac{1}{2} (1+i) 2^{3/4} e^{i\left(\frac{3\pi}{2}\right)} = -\frac{i}{2} (1+i) 2^{3/4}, \end{aligned}$$

por lo tanto, la ecuación  $z^5 - z^4 + 2z - 2 = 0$ , tendrá las siguientes cinco raíces:

$$z_0 = \frac{1}{2}(1+i)2^{3/4}, \quad z_1 = -\frac{1}{2}(1-i)2^{3/4}, \quad z_2 = -\frac{1}{2}(1+i)2^{3/4}, \quad z_3 = \frac{1}{2}(1-i)2^{3/4}, \quad z_4 = 1.$$

Una afirmación que nos han dicho, y que quizá no sepamos de dónde viene, es que *si un polinomio con coeficientes reales tiene raíces complejas, ellas serán complejas conjugadas unas de otras*. Vale decir, si  $z^5 - z^4 + 2z - 2 = 0$  tiene como raíz  $z_0 = \frac{1}{2}(1+i)2^{3/4}$ , también tendrá como raíz  $z_3 = \frac{1}{2}(1-i)2^{3/4}$  y  $z_0 = z_3^*$ .

Esta afirmación se prueba de forma general si suponemos que tenemos la siguiente ecuación

$$a_i z^i = 0, \quad \text{con } i = 0, 1, 2, \dots, n-1, n \Rightarrow a_0 + a_1 z + a_2 z^2 \dots + a_{n-1} z^{n-1} + a_n z^n = 0,$$

donde los coeficientes  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$  los suponemos reales, esto es:  $a_i = a_i^*$  para todos los valores del índice  $i$ .

Al tomar el complejo conjugado nos queda:

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 \dots + a_{n-1} z^{n-1} + a_n z^n = 0 \iff a_0^* + a_1^* z^* + a_2^* (z^*)^2 \dots + a_{n-1}^* (z^*)^{n-1} + a_n^* (z^*)^n = 0,$$

como los coeficientes son reales tenemos que

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 \dots + a_{n-1} z^{n-1} + a_n z^n = 0 \iff a_0 + a_1 z^* + a_2 (z^*)^2 \dots + a_{n-1} (z^*)^{n-1} + a_n (z^*)^n = 0,$$

esto nos dice que si  $z$  es solución también lo será  $z^*$  ya que la ecuación es la misma por tener los mismos coeficientes (reales).

Ahora consideremos el siguiente polinomio complejo

$$P(z) = z^6 - z^5 + 4z^4 - 6z^3 + 2z^2 - 8z + 8 = 0.$$

Si por algún método comprobamos que  $(z^3 - 2)$  es uno de sus factores, entonces podremos encontrar las raíces del polinomio  $P(z)$ . Veamos, claramente si  $(z^3 - 2)$  es un factor podemos expresar

$$P(z) = z^6 - z^5 + 4z^4 - 6z^3 + 2z^2 - 8z + 8 = (z^3 - 2)(z^3 - z^2 + 4z - 4) = (z^3 - 2)(z - 1)(z^2 + 4),$$

con lo cual, como  $z$  es complejo, hay que tener cuidado con las raíces encubiertas

$$z^6 - z^5 + 4z^4 - 6z^3 + 2z^2 - 8z + 8 = 0 \Rightarrow (z^3 - 2)(z - 1)(z^2 + 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} z^3 = 2 \\ z = 1 \\ z^2 = -4 \end{cases}$$

Por un lado:  $z^2 = -4 \Rightarrow z = \pm 2i$ .

Y por el otro:

$$z^3 = 2 = 2 \left( e^{i(2\pi k)} \right) \Rightarrow z = \left[ 2 \left( e^{i(2\pi k)} \right) \right]^{1/3} = 2^{1/3} e^{i(\frac{2\pi k}{3})}.$$

Por lo tanto:

$$z_0 = 2^{1/3}, \quad z_1 = 2^{1/3} e^{i(\frac{2\pi}{3})} = -\frac{2^{1/3}}{2} [1 - \sqrt{3}i], \quad z_2 = 2^{1/3} e^{i(\frac{4\pi}{3})} = -\frac{2^{1/3}}{2} [1 + \sqrt{3}i].$$

La ecuación  $z^6 - z^5 + 4z^4 - 6z^3 + 2z^2 - 8z + 8 = 0$ , tendrá las siguientes seis raíces:

$$z = \sqrt[3]{2}, \quad z = -\frac{1}{\sqrt[3]{4}} [1 \pm \sqrt{3}i], \quad z = 1, \quad z = \pm 2i.$$

### Logaritmos y potencias de números complejos

Definamos la siguiente función

$$z = e^{i\theta} \iff \text{Ln}(z) = i\theta,$$

donde Ln representa el logaritmo natural del número complejo  $z$ . Nótese que hemos utilizado Ln en lugar de tradicional ln y la razón es la ambigüedad implícita en la notación de Euler, vale decir

$$z = re^{i\theta} \iff \text{Ln}(z) = \ln(r) + i(\theta + 2n\pi) = \ln(r) + i\theta,$$

en otras palabras,  $\text{Ln}(z)$  no es función por el hecho de ser multivaluada. Se supera esta dificultad cuando se restringe el argumento  $-\pi < \theta \leq \pi$  y esta se conoce como *el valor principal de la función*

### Ejemplos

1. Al evaluar

$$\text{Ln}(-3i) = \text{Ln}\left[3e^{i(-\frac{\pi}{2}+2n\pi)}\right] = \ln(3) + i\left(-\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) \quad \text{con } n = 0, 1, 2, \dots$$

decimos que el valor principal del  $\text{Ln}(-3i)$  será  $\ln(3) - i\frac{\pi}{2}$ .

2. Con la misma intuición se procede con las potencias de números complejos. Si queremos evaluar  $z = i^{-5i}$  tendremos que proceder como sigue

$$z = i^{-5i} \Rightarrow \text{Ln}(z) = \text{Ln}(i^{-5i}) = -5i \text{Ln}(i) = -5i \text{Ln}\left[e^{i(\frac{\pi}{2}+2n\pi)}\right] = 5\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right),$$

con lo cual  $z = i^{-5i}$  ¡es un número real!

3. Para finalizar consideremos otro par de casos de potencias y logaritmos:

$$i^i = \left[e^{i(\frac{\pi}{2}+2n\pi)}\right]^i = e^{i^2(\frac{\pi}{2}+2n\pi)} = e^{-(\frac{\pi}{2}+2n\pi)}$$

$$\text{Ln}\left[\left\{\sqrt{3} + i\right\}^3\right] = 3 \text{Ln}\left[2e^{i(\arctan(\frac{1}{\sqrt{3}}))}\right] = 3\left[\ln(2) + i\left(\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + 2n\pi\right)\right] = \ln(8) + i\left(\frac{\pi}{2} + 6n\pi\right)$$

### Ejercicios

1. Demuestre que

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|, \quad \arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2, \quad \frac{z}{z^*} = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + i \frac{2xy}{x^2 + y^2}$$

2. Demuestre que

a)  $\cos(3\alpha) = \cos^3(\alpha) - 3\cos(\alpha)\text{sen}^2(\alpha)$

b)  $\text{sen}(3\alpha) = 3\cos^2(\alpha)\text{sen}(\alpha) - \text{sen}^3(\alpha)$

3. Encuentre las raíces de

- a)  $2i$
- b)  $1 - \sqrt{3}i$
- c)  $(-1)^{1/3}$
- d)  $8^{1/6}$
- e)  $(-8 - 8\sqrt{3}i)^{1/4}$

## 1.2. Funciones de Variable Compleja

A continuación, generalizaremos algunos conceptos de funciones de variable compleja.

### 1.2.1. De la recta real al plano complejo

La idea de función de variable (o variables) reales puede ser extendida (continuada, le dicen también) al plano complejo. La idea es la de siempre: si en una determinada región del plano complejo a un número complejo  $z$  le corresponde un número (o varios números) complejos  $w = f(z)$ , diremos que  $f(z)$  es una función de variable compleja  $z$ . Obvio que  $f(z)$  puede ser biyectiva, en cuyo caso tendremos que a  $z$  le estará asociado uno y solo un número complejo  $w = f(z)$ . Es claro también que siempre se podrá expresar

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \quad \text{con } u(x, y) \text{ la parte real y } v(x, y) \text{ la parte imaginaria} \quad (1.2)$$

Esta representación tiene una interpretación adicional. Como representamos un número complejo en el plano  $Oxy$  como  $z = x + iy$ , pero  $w = f(z)$  también podrá ser representada como un punto en el plano  $Ouv$ . Entonces, desde el punto de vista geométrico una función de variable compleja podrá ser entendida como una ley de transformación entre pares de puntos  $(x, y)$  del plano  $Oxy$  del argumento  $z$  y los puntos  $(u, v)$  del plano  $Ouv$  de valor  $w$ .

### 1.2.2. Continuidad en el plano complejo

Podemos también extender el concepto de continuidad de una función de variable real a una función de variable compleja. Esto es: diremos que una función compleja<sup>7</sup>  $w = f(z)$  será continua en  $z_0$  si para un  $\epsilon > 0$  siempre existe un  $\delta > 0$  tal que  $|z - z_0| < \delta$  tan pequeño como uno quiera y siempre puede encontrar  $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$ . La otra manera de verlo es la estándar: si existe el límite cuando  $z \rightarrow z_0$ , es decir,

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$$

En este punto se pueden resaltar que los límites (y con ello la idea de continuidad) en el plano complejo hereda las sutilezas y dificultades de los límites y continuidades de las funciones en varias variables. En segundo lugar cabe señalar que la diferencia con las funciones de variable real radica en que los  $\epsilon$  y  $\delta$  son radios de un círculo centrado en  $f(z_0)$  y  $z_0$ , respectivamente. Adicionalmente, para el caso de las funciones complejas no tiene sentido los límites por la derecha y por la izquierda que planteábamos para funciones de variable real. También es obvio que si

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \quad \text{con } u(x, y) \text{ y } v(x, y) \text{ continuas en } (x_0, y_0) \Rightarrow f(z) \text{ será continua en } z_0 = x_0 + iy_0$$

### 1.2.3. Diferenciabilidad de funciones complejas

La dificultad que subyace en esta definición es equivalente a las dificultades que enfrentamos en las definiciones de derivadas para funciones de varias variables. Diremos entonces que, una función  $f(z)$  univaluada en una región  $\mathcal{S}$  será diferenciable en esa región si la derivada

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} &= \lim_{\Delta x, \Delta y \rightarrow 0} \frac{[u(x + \Delta x, y + \Delta y) - u(x, y)] + i[v(x + \Delta x, y + \Delta y) - v(x, y)]}{\Delta x + i\Delta y} \\ &= \frac{df}{dz} = f'(z) \end{aligned}$$

<sup>7</sup>A partir de ahora y por razones de simplicidad llamaremos a  $f(z)$  *función compleja* en vez de *función de variable compleja*.

existe y es única.

Una vez más, al igual que en el caso de funciones de varias variables, el concepto de límite (y con éste el de derivada), debe existir sin importar la ruta o forma de aproximación al punto sobre el cual estamos calculando la derivada. Esto es, si  $\Delta z \rightarrow 0 \Leftrightarrow \Delta x + i\Delta y \rightarrow 0$ , entonces

$$\begin{aligned} f'(z)_{\Delta y=0} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[u(x + \Delta x, y) - u(x, y)] + i[v(x + \Delta x, y) - v(x, y)]}{\Delta x} \\ f'(z)_{\Delta x=0} &= -i \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{[u(x, y + \Delta y) - u(x, y)] + i[v(x, y + \Delta y) - v(x, y)]}{\Delta y} \end{aligned}$$

### Ejemplos

1. Sea  $f(z) = x^2 - y^2 + 2ixy$

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta x, \Delta y \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - (y + \Delta y)^2 + 2i(x + \Delta x)(y + \Delta y) - x^2 + y^2 - 2ixy}{\Delta x + i\Delta y}$$

al desarrollar pruebe que, independientemente de la ruta en el plano complejo ( $\Delta y = 0; \Delta x \rightarrow 0$  o viceversa) resulta:

$$f'(z) = \lim_{\Delta x, \Delta y \rightarrow 0} \left( 2x + i2y + \frac{(\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 + 2i\Delta x\Delta y}{\Delta x + i\Delta y} \right) = 2x + i2y$$

que es más o menos obvio si hubiéramos notado que  $f(z) = x^2 - y^2 + 2ixy = (x + iy)^2 \equiv z^2$  con lo cual

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{(z + \Delta z)^2 - z^2}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{2z\Delta z + (\Delta z)^2}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} (2z + \Delta z) = 2z$$

2. Ahora bien, las cosas no siempre son así. Si consideramos  $f(z) = 2x + iy$  es rápido comprobar que no es diferenciable en el plano complejo, ya que

$$f'(z) = \lim_{\Delta x, \Delta y \rightarrow 0} \frac{2x + 2\Delta x + i(y + \Delta y) - 2x - iy}{\Delta x + i\Delta y} = \lim_{\Delta x, \Delta y \rightarrow 0} \frac{2\Delta x + i\Delta y}{\Delta x + i\Delta y}$$

el cual, claramente no coincide si las direcciones de aproximación a  $z_0 = x_0 + iy_0$  son distintas, vale decir, por ejemplo:  $\Delta y = 0; \Delta x \rightarrow 0$  o  $\Delta x = 0; \Delta y \rightarrow 0$ .

Como heredamos todas las ideas y métodos del campo real se cumplen todas las reglas de la derivación para funciones reales. Vale decir

$$\frac{d}{dz}(f(z) + g(z)) = \frac{df(z)}{dz} + \frac{dg(z)}{dz}; \quad \frac{d}{dz}(f(z)g(z)) = \frac{df(z)}{dz}g(z) + f(z)\frac{dg(z)}{dz}; \quad \frac{d}{dz}(f(g(z))) = \frac{df(g)}{dg} \frac{dg(z)}{dz}$$

#### 1.2.4. Funciones Analíticas y Condiciones de Cauchy-Riemann

Diremos que una función es analítica (holomorfa o regular) en una región  $\mathcal{S}$ , si es univaluada y derivable en todos los puntos dentro de esa misma región  $\mathcal{S}$ . Puede darse el caso de que sea analítica en la región excepto en un número finito de puntos (donde es singular). Entonces diremos que es analítica (holomorfa o regular) en  $\mathcal{S}$ , excepto en esos puntos.

Una función se denomina una función entera si ésta es analítica en todos los puntos del plano finito, como por ejemplo, los polinomios.

A partir de dos estrategias (muy particulares) de aproximación a  $\Delta z \rightarrow 0$  tales como  $\Delta y = 0; \Delta x \rightarrow 0$  o  $\Delta x = 0; \Delta y \rightarrow 0$ , podremos encontrar un criterio para identificar dónde, una función compleja,  $f(z)$ , es analítica. Esto es

$$\begin{aligned} f'(z)_{\Delta y=0} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[u(x + \Delta x, y) - u(x, y)] + i[v(x + \Delta x, y) - v(x, y)]}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ \frac{\Delta u(x, y)}{\Delta x} + i \frac{\Delta v(x, y)}{\Delta x} \right], \\ f'(z)_{\Delta x=0} &= -i \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{[u(x, y + \Delta y) - u(x, y)] + i[v(x, y + \Delta y) - v(x, y)]}{\Delta y} \\ &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \left[ -i \frac{\Delta u(x, y)}{\Delta y} + \frac{\Delta v(x, y)}{\Delta y} \right], \end{aligned}$$

y ambas tienen que coincidir. Con lo cual

$$f'(z)_{\Delta y=0} = f'(z)_{\Delta x=0} \Leftrightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ \frac{\Delta u(x, y)}{\Delta x} + i \frac{\Delta v(x, y)}{\Delta x} \right] = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \left[ -i \frac{\Delta u(x, y)}{\Delta y} + \frac{\Delta v(x, y)}{\Delta y} \right],$$

y equivalentemente

$$f'(z)_{\Delta y=0} = f'(z)_{\Delta x=0} \Leftrightarrow \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + i \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} = -i \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial v(x, y)}{\partial y}$$

Con ello hemos encontrado las condiciones *necesarias* para que una función compleja sea analítica, vale decir: Las condiciones de Cauchy Riemann

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \quad \wedge \quad \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} = -\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \tag{1.3}$$

Ahora tendremos un criterio más expedito para determinar que la función  $f(z) = 2x + iy$  no es analítica.

$$\left. \begin{array}{l} u(x, y) = 2x \\ v(x, y) = y \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = 2 \neq 1 = \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \quad \wedge \quad \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} = 0 = 0 = -\frac{\partial u(x, y)}{\partial y}$$

Para el caso  $f(z) = x^2 - y^2 + 2ixy$  se cumplen las condiciones de Cauchy-Riemann

$$\left. \begin{array}{l} u(x, y) = x^2 - y^2 \\ v(x, y) = 2xy \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = 2x = \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \quad \wedge \quad \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} = 2y = -\frac{\partial u(x, y)}{\partial y}$$

pero como esas condiciones son *necesarias* porque para encontrarlas hemos seleccionado un par de rutas muy específicas:  $\Delta y = 0; \Delta x \rightarrow 0$  y  $\Delta x = 0; \Delta y \rightarrow 0$ , se requiere exigir algunas condiciones adicionales. Sin demostración (puede consultar para detalles y demostraciones las referencias indicadas) exigiremos como condición necesaria y suficiente para que una función sea analítica que las cuatro derivadas parciales para  $u(x, y)$  y  $v(x, y)$ , existan, sean continuas en la región  $\mathcal{S}$  y que se cumplan las condiciones de Cauchy-Riemann. El punto crucial (adicional) es que las derivadas sean continuas.

### Ejercicios

Investigar los dominios del plano complejo para los cuales las funciones  $f(z) = |x| - i|y|$  y  $f(z) = |z|^2 = zz^*$  son analíticas.

### 1.2.5. Curiosidades de Cauchy-Riemann

Las funciones analíticas satisfacen algunas propiedades adicionales consecuencias de las condiciones de Cauchy-Riemann.

La primera es que dada una función compleja genérica  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ , si  $f(z)$  es analítica,  $u(x, y)$  y  $v(x, y)$  serán funciones armónicas conjugadas,  $\nabla^2 u(x, y) = \nabla^2 v(x, y) = 0$ , i.e. satisfacen la ecuación de Laplace. Si derivamos apropiadamente las ecuaciones (1.3) respecto a una y otra variable encontramos que

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \right] = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \right] = \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} \right] = -\frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \right] \Rightarrow \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = 0$$

y equivalentemente

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} \right] = -\frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \right] = -\frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \right] = -\frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \right] \Rightarrow \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial y^2} = 0,$$

es decir, hemos demostrado que las partes reales e imaginarias de una función analítica son necesariamente armónicas. La importancia de este resultado radica, en primer lugar, que no son arbitrarias las funciones  $u(x, y)$  y  $v(x, y)$  con las cuales construimos  $f(z)$ . Ambas deben satisfacer la ecuación de Laplace. En segundo lugar que ambas están ligadas por las condiciones de Cauchy-Riemann, y esto implica que al conocer una de las funciones armónicas conjugadas, siempre es posible encontrar (salvo una constante de integración) la otra.

#### Ejemplo

Para ilustrar lo anterior, supongamos la siguiente función armónica conjugada  $u(x, y) = 2x - x^3 + 3xy^2$  correspondiente a la parte real de  $f(z)$ . Es fácil comprobar que es una función armónica, ahora construyamos la parte imaginaria  $v(x, y)$ . Esto es

$$u(x, y) = 2x - x^3 + 3xy^2 \Rightarrow \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} = 2 - 3x^2 + 3y^2 \Rightarrow v(x, y) = 2y - 3x^2y + y^3 + \phi(x)$$

entonces

$$\frac{\partial v(x, y)}{\partial x} = -6xy + \frac{\partial \phi(x)}{\partial x} = -6xy = -\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial \phi(x)}{\partial x} = 0 \Rightarrow \phi(x) = C \Rightarrow v(x, y) = 2y - 3x^2y + y^3 + C.$$

La segunda curiosidad, consecuencia de las ecuaciones (1.3), es que para una función compleja genérica  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ , en la cual además se cumple que  $u(x, y) = \text{const}$  y  $v(x, y) = \text{const}$ , entonces se cumplirá que:  $\nabla u(x, y) \cdot \nabla v(x, y) = 0$ .

$$\nabla u(x, y) \cdot \nabla v(x, y) = \left[ \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \mathbf{j} \right] \cdot \left[ \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \mathbf{j} \right] = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \frac{\partial v(x, y)}{\partial y}$$

y por obra de las condiciones de Cauchy-Riemann es inmediato comprobar que se anulan

$$\nabla u(x, y) \cdot \nabla v(x, y) = -\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = 0$$

Es decir,  $u(x, y) = \text{const}$  y  $v(x, y) = \text{const}$ , corresponden a *trayectorias mutuamente ortogonales*. Esta “curiosidad” nos permite construir sistemas de coordenadas alternativos en el plano complejo y, sobre todo

saber como establecer su transformación a otros planos complejos. Esto se representa en la Figura 1.2 y será considerado en la sección 1.4 de la página 24.

La tercera curiosidad es un resultado el cual, siendo una formalidad, nos indica que las funciones analíticas  $f(z)$  dependen de  $z$  y no de su conjugado  $z^*$ . O dicho de otra manera:  $z$  y  $z^*$  son variables independientes. Para demostrar esto procedemos primero a convencernos que si  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  y  $f(z)$  analítica, entonces  $\frac{\partial f(z)}{\partial z^*} = 0$ . Sin detenernos a pensar en el significado de la derivada respecto a la variable conjugada, recordamos que operacionalmente

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{z + z^*}{2} \\ y &= \frac{z - z^*}{2i} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\partial f(z)}{\partial z^*} = \frac{\partial f(z)}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial z^*} + \frac{\partial f(z)}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial z^*} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + i \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} \right] - \frac{1}{2i} \left[ \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} + i \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \right]$$

arreglando tendremos que es inmediato comprobar que se anula si se cumplen las condiciones (1.3)

$$\frac{\partial f(z)}{\partial z^*} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \right] + \frac{i}{2} \left[ \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} \right] = 0 \Rightarrow f(z) \not\equiv f(x, y) = f\left(\frac{z + z^*}{2}, \frac{z - z^*}{2i}\right)$$

en otras palabras, la funciones analíticas son verdaderas funciones de variable complejas y no, como pudiera parecer, de dos variables reales interpuestas.

### Ejercicios

1. Determine la función  $f(z)$  analítica cuya parte imaginaria es  $[y \cos(y) + x \operatorname{sen}(z)]e^x$
2. Muestre que si  $f(z)$  es analítica entonces  $f^*(z^*)$  también lo es.

## 1.3. Puntos y líneas de corte, ceros de funciones complejas

Hemos mencionamos anteriormente, que los números complejos se representan por su forma polar en dos ejes coordenados. Ese diagrama bidimensional lo llamamos Diagrama de Argand. Como en el caso del Análisis de Funciones Reales, existen funciones *multivaluadas*, a las cuales les debemos imponer ciertas condiciones para convertirlas en *univaluadas*, si una función es multivaluada, automáticamente deja de ser analítica. El objetivo de esta sección es identificar ese conjunto de condiciones para detectar en cual región del plano complejo una determinada función es univaluada.

### 1.3.1. Puntos y líneas de corte

Consideremos entonces la función  $f(z) = z^{1/2}$  y hagamos distintos circuitos cerrados  $0 \leq \theta < 2\pi$  con el “vector”  $z$ .

$$f(z) = z^{1/2} \equiv r^{1/2} e^{i\theta/2} \rightarrow f(z) = r^{1/2} e^{i\theta/2} \rightarrow r^{1/2} e^{i(\theta+2\pi)/2} = -r^{1/2} e^{i\theta/2}$$

Visto así nos tendremos que preguntar ahora cual fue el circuito que recorrimos con  $z$ , y dependiendo de ese circuito identificaremos algunos puntos con características distintas. Si el circuito cerrado descrito por  $z$  **no** contiene el punto  $z = 0$ , la función  $f(z) = z^{1/2}$  retoma su valor original (ver Figura 1.1 cuadrante superior izquierdo contorno  $\mathcal{C}_1$ ). Pero si, como se aprecia en la misma Figura 1.1, el circuito cerrado  $\mathcal{C}_2$  **si** contiene el punto  $z = 0$  entonces la función no retoma su valor original,  $f(z) \rightarrow -f(z)$ . También es claro que si el circuito cerrado lo recorremos dos veces  $\theta \rightarrow 4\pi$  entonces  $f(z) = z^{1/2}$  retoma su valor inicial.

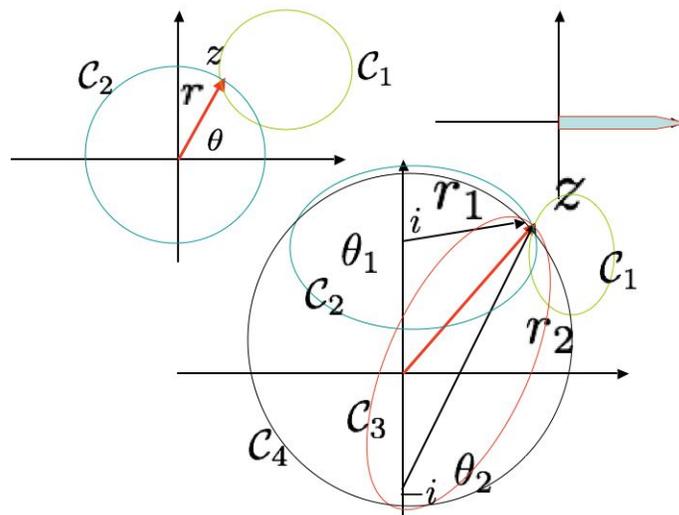


Figura 1.1: Los distintos contornos que identifican los puntos de corte

Los puntos alrededor de los cuales se construye un circuito cerrado en el diagrama de Argand y la función no retoma su valor inicial se denominan *puntos de corte* y las *líneas de corte* (o simplemente *cortes*) serán aquellas líneas que separan regiones en las cuales una determinada función es univaluada. Es claro que los puntos de corte son puntos singulares, en los cuales la función deja de ser analítica y existirán si  $\theta$  toma, valores  $0 \leq \theta \leq 2n\pi$ . Es decir, puede dar  $n$  vueltas.

En este caso, para nuestra función  $f(z) = z^{1/2}$ , la línea de corte será cualquiera que comience en  $z = 0$  y continúe para  $|z| \rightarrow \infty$ . Por simplicidad es costumbre tomar las líneas de corte a lo largo de los ejes reales o complejos. De este modo aparece ilustrado en la Figura 1.1 cuadrante superior derecho la línea de corte que sigue el eje positivo de las  $x$ .

La situación se torna más interesante cuando estas definiciones se analizan a la luz de funciones con más de un punto de corte.

Consideremos la función

$$f(z) = \sqrt{z^2 + 1} \Rightarrow f(z) = \sqrt{(z - i)(z + i)} \equiv \sqrt{(r_1 e^{i\theta_1})(r_2 e^{i\theta_2})} = \sqrt{r_1 r_2} e^{i\theta_1/2} e^{i\theta_2/2} = \sqrt{r_1 r_2} e^{i(\theta_1 + \theta_2)/2}$$

analicemos entonces, varios contornos en el plano de Argand. Otra vez la Figura 1.1 ilustra en el cuadrante inferior los distintos contornos  $C_1, C_2, C_3$  y  $C_4$ .

Tal y como se aprecia en esa figura, se dan cuatro casos:

1. Contorno  $C_1$  no incluye ningún punto de corte, entonces  $\theta_{1min} \leq \theta_1 \leq \theta_{1max}$  y  $\theta_{2min} \leq \theta_2 \leq \theta_{2max}$ , con lo cual  $f(z)$  retoma su valor inicial luego de recorrer el  $C_1$
2. Contorno  $C_2$  incluye  $z = i$  como punto de corte, entonces  $0 \leq \theta_1 \leq 2n\pi$  y  $\theta_{2min} \leq \theta_2 \leq \theta_{2max}$ , por lo cual  $f(z) \rightarrow -f(z)$
3. Contorno  $C_3$  incluye  $z = -i$  como punto de corte, entonces  $\theta_{1min} \leq \theta_1 \leq \theta_{1max}$  y  $0 \leq \theta_2 \leq 2n\pi$ , por lo cual  $f(z) \rightarrow -f(z)$
4. Contorno  $C_4$  incluye ambos como punto de corte,  $z = i$  y  $z = -i$ , entonces  $0 \leq \theta_1 \leq 2n\pi$  y  $0 \leq \theta_2 \leq 2n\pi$ , por lo cual  $f(z) \rightarrow f(z)$  retoma su valor.

De este modo para construir los cortes que impidan que nuestra función sea multivaluada podremos seleccionar:

$$z_{\text{corte}} > i \quad \text{y} \quad z_{\text{corte}} < -i, \quad \text{o} \quad -i < z_{\text{corte}} < i$$

### 1.3.2. Singularidades, polos y ceros de funciones complejas

Un punto donde la función  $f(z)$  no es analítica se denomina un punto singular. Estos puntos pueden ser:

- **Singularidades aisladas:** sí una función es analítica en todo el entorno de un punto  $z_0$ , excepto en el propio punto  $z_0$ , entonces se dice que el punto  $z_0$  es una singularidad aislada o un punto singular de la función  $f(z)$ .

Por ejemplo, para la función  $f(z) = 1/z$ , sabemos que es analítica en todo punto excepto en  $z = 0$ . La única singularidad de la función esta en el punto  $z = 0$  y este punto es entonces una singularidad aislada.

- **Singularidades no aisladas:** Si una función contiene un conjunto de singularidades aisladas en una vecindad de un punto  $z_0$ , entonces se dice que  $z_0$  es una singularidad no aislada. Es decir, una singularidad no aislada de una función es un punto límite del conjunto de sus singularidades.

#### Clasificación de las singularidades aisladas

1. Un punto singular aislado  $z_0$  de una función  $f$  se denomina removible o evitable si:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \quad \exists.$$

Observemos que:

- a) la función  $f$  puede no estar definida en  $z_0$  y por esta razón la función no es analítica en  $z_0$ .
- b) la función puede estar definida en  $z_0$  pero de valor diferente al  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ . Con lo cual la función no es continua en  $z_0$  y por lo tanto no es analítica en  $z_0$ .
- c) la función puede estar definida en  $z_0$  y su valor igual al del  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ . En este caso la función no es singular en  $z_0$ .

Por lo tanto, sí  $f$  tiene una singularidad removible en  $z_0$  entonces una de las posibilidades (a) o (b) debe ser la causa de que la función no sea analítica o regular en  $z_0$ .

Si una función  $g$  es igual a  $f$  en todos los puntos, excepto en  $z_0$ , y

$$g(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z),$$

entonces  $g$  no es singular en  $z_0$ , esto significa que la singularidad de  $f$  puede ser removida mediante la redefinición de la función  $f$  en  $z_0$ .

2. Un punto singular aislado  $z_0$  de una función  $f$  que no esta definida en  $z_0$  se llama un polo de orden  $n$  de  $f$  si:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^n f(z) = M \neq 0,$$

donde  $n$  es un número entero positivo. Un polo de orden 1 se denomina un polo simple.

3. Un punto singular aislado de una función  $f$  recibe el nombre de *singularidad esencial* de  $f$  si

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^n f(z) \quad \nexists,$$

para ningún entero positivo de  $n$ .

### Ejemplos

1. Consideremos la función

$$f(z) = \frac{3z^2 + 2z}{(z - 4)(z - i)},$$

la función es analítica en todos los puntos, excepto en  $z = 4$  y  $z = i$ . Entonces, las únicas singularidades están en los puntos  $z = 4$  y  $z = i$ , y como son un conjunto finito de singularidades cada una de estas son singularidades aisladas.

2. Sea  $f$  la función:

$$f(z) = \left( \operatorname{sen} \left[ \frac{x}{|z|^2} \right] \cosh \left[ \frac{y}{|z|^2} \right] - i \cos \left[ \frac{x}{|z|^2} \right] \operatorname{senh} \left[ \frac{y}{|z|^2} \right] \right)^{-1},$$

Si denotamos al denominador como  $g(z)$ , entonces

$$\begin{aligned} g(z) &= \operatorname{sen} \left[ \frac{x}{x^2 + y^2} \right] \cosh \left[ \frac{y}{x^2 + y^2} \right] - i \cos \left[ \frac{x}{x^2 + y^2} \right] \operatorname{senh} \left[ \frac{y}{x^2 + y^2} \right] \\ &= u(x, y) + iv(x, y) \neq 0, \end{aligned}$$

Es claro que  $z \neq 0$ . Por otra parte, de las condiciones de Cauchy-Riemann se tiene:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \cos \left[ \frac{x}{x^2 + y^2} \right] \cosh \left[ \frac{y}{x^2 + y^2} \right] - \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} \operatorname{sen} \left[ \frac{x}{x^2 + y^2} \right] \operatorname{senh} \left[ \frac{y}{x^2 + y^2} \right] = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} \cos \left[ \frac{x}{x^2 + y^2} \right] \cosh \left[ \frac{y}{x^2 + y^2} \right] + \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \operatorname{sen} \left[ \frac{x}{x^2 + y^2} \right] \operatorname{senh} \left[ \frac{y}{x^2 + y^2} \right] = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Las condiciones de Cauchy-Riemann se satisfacen en todas partes salvo en  $z = 0$ , donde ni  $g$  ni las derivadas parciales están definidas. Como las derivadas parciales son continuas, entonces  $g$  es analítica en todos los puntos excepto  $z = 0$ . Por lo tanto,  $f$  es analítica salvo en  $z = 0$ .

Por otra parte,  $g = 0$  si su parte real como su parte imaginaria son nulas, así que las singularidades de  $f$ , además de  $z = 0$ , vienen dadas por el siguiente sistema ecuaciones:

$$\operatorname{sen} \left[ \frac{x}{x^2 + y^2} \right] \cosh \left[ \frac{y}{x^2 + y^2} \right] = 0 \quad \text{y} \quad \cos \left[ \frac{x}{x^2 + y^2} \right] \operatorname{senh} \left[ \frac{y}{x^2 + y^2} \right] = 0$$

Como  $\cosh(\alpha) > 0$ , la primera ecuación se satisface si

$$\operatorname{sen} \left[ \frac{x}{x^2 + y^2} \right] = 0 \Rightarrow \frac{x}{x^2 + y^2} = \pm n\pi,$$

puesto que  $\cos(\alpha) \neq 0$  cuando  $\operatorname{senh}(\alpha) = 0$ , entonces la segunda ecuación se satisface si  $y = 0$ . Por lo tanto, el sistema se satisface simultáneamente si

$$\begin{cases} \frac{x}{x^2 + y^2} = \pm n\pi \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{x} = \pm n\pi, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Las singularidades ocurren en el eje real y en los puntos donde  $x = \pm 1/n\pi$ . El punto límite de este conjunto, cuando  $n \rightarrow \infty$ , es el punto  $z = 0$ . Por lo tanto,  $f$  tiene una singularidad no aislada en  $z = 0$  y singularidades aisladas en los puntos  $z = \pm 1/n\pi$ , con  $n = 1, 2, 3, \dots$

3. Dada la función

$$f(z) = \frac{z^2 + 16}{z - 4i}, \quad z \neq 4i,$$

esta función es el cociente de dos funciones enteras y por lo tanto es analítica, salvo donde el denominador se hace nulo, esto es en  $z = 4i$ . Por otra parte:

$$f(z) = \frac{(z + 4i)(z - 4i)}{z - 4i} = z + 4i,$$

y

$$\lim_{z \rightarrow 4i} f(z) = \lim_{z \rightarrow 4i} z + 4i = 8i.$$

la función  $f$  tiene una singularidad removible en  $z = 4i$  pues el límite existe. Podemos definir una función  $g$  igual a  $f$ , para  $z \neq 4i$

$$g(z) = \begin{cases} z + 4i & \text{si } z \neq 4i \\ 8i & \text{si } z = 4i \end{cases}$$

y queda claro que  $g$  es una función entera.

4. Para

$$f(z) = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{1+z} = \frac{2z}{(1-z)(1+z)}$$

y es inmediato darse cuenta que tendremos polos de orden 1 en  $z = 1$  y  $z = -1$

5. Para

$$f(z) = \tanh(z) = \frac{\sinh(z)}{\cosh(z)} = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}} \Rightarrow e^z = e^{i(2n+1)\pi} e^{-z} \quad \text{es un polo}$$

es decir donde  $e^z = -e^{-z}$ , con lo cual  $z_0 = (n + \frac{1}{2})i\pi$  y al utilizar la definición:

$$\lim_{z \rightarrow (n+\frac{1}{2})i\pi} \frac{[z - (n + \frac{1}{2})i\pi] \sinh(z)}{\cosh(z)} = \lim_{z \rightarrow (n+\frac{1}{2})i\pi} \frac{[z - (n + \frac{1}{2})i\pi] \cosh(z) + \sinh(z)}{\sinh(z)} = 1$$

donde hemos utilizado el Teorema de L'Hopital y consecuentemente  $z_0 = (n + \frac{1}{2})i\pi$  es un polo simple.

Existe otro tipo de singularidades conocidas como removibles. Estas singularidades se caracterizan porque el valor de  $f(z) \rightarrow 0/0$  cuando  $z \rightarrow z_0$ . El caso más emblemático es la función

$$f(z) = \frac{\text{sen}(z)}{z} \Rightarrow f(z) = \frac{1}{z} \left( z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} \dots \right) = \left( 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} \dots \right) \Rightarrow \lim_{z \rightarrow 0} f(z) = 1$$

con lo cual, luego de desarrollar por Taylor la función  $\text{sen}(z)$ , se ha removido la singularidad aparente.

El comportamiento de una función compleja en infinito (o cuando tiende a infinito), vale decir, cuando  $z \rightarrow \infty$  no está tan bien definida como en los casos de funciones de variable real. Es claro como una cantidad real, digamos  $|f(z)|$  o  $|z|$  tiende a infinito, pero  $z$  es una cantidad "bidimensional" y, en principio, existirían varias formas de tender a infinito. Para precisar el comportamiento de una función compleja de variable compleja en infinito, hacemos un cambio de variable  $z = 1/\xi$  y estudiamos  $f(1/\xi)$  con  $1/\xi \rightarrow \infty$ .

De esta manera:

1.

$$\lim_{z \rightarrow \infty} z(1 + z^2) \equiv \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{1}{\xi} + \frac{1}{\xi^3} \quad \text{con lo cual tendrá un polo de orden 3.}$$

2.

$$\lim_{z \rightarrow \infty} e^z \equiv \lim_{\xi \rightarrow 0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! \xi^n} \quad \text{y presenta una singularidad esencial para } z \rightarrow \infty.$$

Los ceros de una función compleja ( $f(z_0) = 0$ , entonces llamaremos  $z_0$  un cero de  $f(z)$ ) se clasifican al igual que los polos. Esto es

$$f(z) = (z - z_0)^n g(z) \text{ con } n \text{ entero positivo y } g(z) \neq 0 \quad \forall z.$$

### Ejercicios

1. Determine el tipo de singularidades (en caso de poseerlas) de las siguientes funciones en:  $z = 0$  y  $z = \infty$

a)

$$f(z) = \frac{1}{z - 2}$$

b)

$$f(z) = \frac{1 + z^3}{z^2}$$

c)

$$f(z) = \sinh\left(\frac{1}{z}\right)$$

2. Identifique los ceros, polos y las singularidades esenciales de las siguientes funciones:

a)

$$f(z) = \frac{z - 2}{z^2} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{1 - z}\right)$$

b)

$$f(z) = e^{1/z}$$

c)

$$f(z) = \tan\left(\frac{1}{z}\right)$$

3. Encuentre el comportamiento en el infinito de

a)

$$f(z) = a + \frac{b}{z^2}$$

b)

$$f(z) = z(1 + z^2)$$

c)

$$f(z) = e^z$$

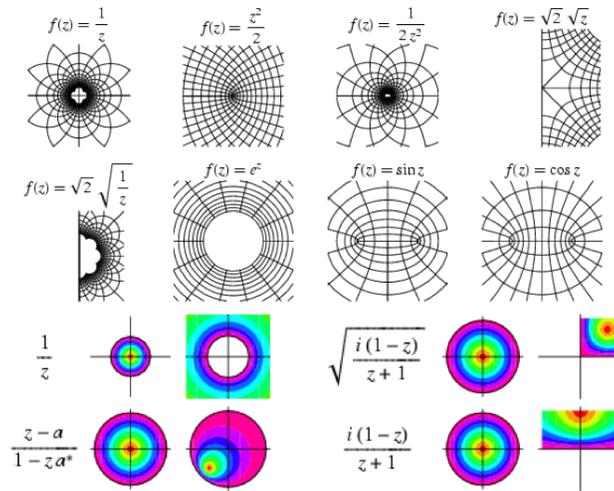


Figura 1.2: Transformaciones conformes. Tomado de Eric W. Weisstein. **Conformal Mapping**. *MathWorld—A Wolfram Web Resource*. <http://mathworld.wolfram.com/ConformalMapping.html>

## 1.4. Transformaciones conformes

Nos interesará ahora considerar transformaciones entre planos complejos, esto es:

$$z = x + iy \leftrightarrow w = r + is \Rightarrow w = g(z) = r(x, y) + is(x, y) \leftrightarrow z = h(w) = x(r, s) + iy(r, s)$$

Es decir, transformaciones entre puntos  $(x, y) \leftrightarrow (r, s)$  correspondientes a dos diagramas de Argand, de tal modo que existe la función inversa  $z = h(g(z))$  con  $w = g(z)$  y  $z = h(w)$  funciones analíticas, salvo en un número finito de polos aislados. Entonces denominaremos a este tipo de transformaciones *transformaciones conformes* si además, en todo punto  $z$  y  $w$  (excepto en aquellos en los cuales  $g'(z)$  y por lo tanto  $h'(w)$  son cero o infinita) cumple con:

- Curvas continuas en el plano  $z$  transforman en curvas continuas en el  $w$ .
- Los ángulos entre dos curvas cualesquiera que se intersecten en el plano  $z$  serán los mismos que los que formen las curvas transformadas en el plano  $w$ . Esto es, los ángulos entre las curvas serán invariantes bajo la transformación.<sup>8</sup>
- El cambio de escala en la vecindad de puntos transformados es independiente de la dirección en la cual se mida.
- Cualquier función analítica en  $z = x + iy$  transforma en otra función  $w = r + is$  también analítica.

La segunda de las afirmaciones es inmediata a partir de la primera. Es decir, si una transformación conforme de coordenadas tienen inversa y ambas son analíticas, es obvio que curvas continuas  $\mathcal{C}(z)$  serán transformadas a curvas continuas  $\tilde{\mathcal{C}}(w)$ .

<sup>8</sup>De esta propiedad es donde la transformación hereda su nombre de conforme. Son transformaciones *isogonales* es decir, que preservan los ángulos entre las curvas que se intersectan.

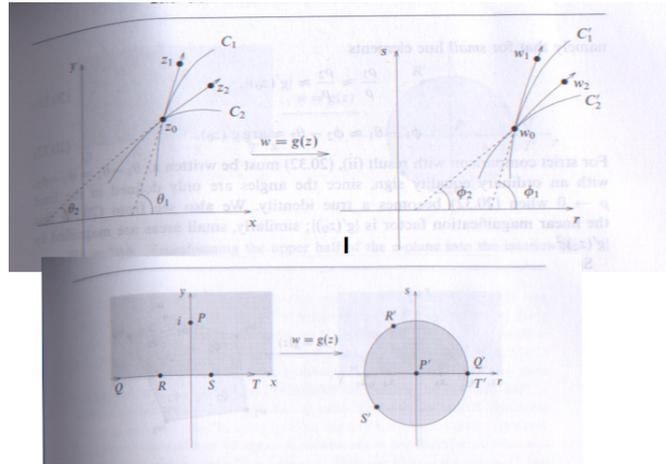


Figura 1.3: Transformaciones conformes. Cuadrante superior representa las conservación de ángulos y escala bajo transformaciones y el inferior un ejemplo de transformaciones conforme

El hecho que la transformación conforme preserva el ángulo y las escalas se muestra en la figura 1.3 y puede comprobarse de la siguiente manera. Considere dos curvas,  $C_1(z)$  y  $C_2(z)$ , en el plano complejo  $z = x + iy$ . Supongamos además que estas curvas se intersectan en un punto  $z = z_0$ . Entonces, sobre las tangentes a cada curva, en  $z_0$ , definimos otros dos puntos  $z_1$  y  $z_2$  de tal forma que

$$\left. \begin{aligned} z_1 - z_0 &= \rho e^{i\theta_1} \\ z_2 - z_0 &= \rho e^{i\theta_2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} w_1 - w_0 = \rho_1 e^{i\phi_1} \\ w_2 - w_0 = \rho_2 e^{i\phi_2} \end{cases}$$

Nótese que hemos construido los puntos  $z_1$  y  $z_2$  sobre las tangentes a  $z_0$  a la misma distancia  $\rho$  de  $z_0$  y, en principio, hemos supuesto que las distancias a los puntos transformados  $w_1$  y  $w_2$  (las cuales hemos identificado como  $\rho_1$  y  $\rho_2$ , respectivamente), no son iguales. Ahora bien, dado que  $w = g(z)$  es analítica entonces

$$\left. \frac{dg(z)}{dz} \right|_{z=z_0} = \left. \frac{dw}{dz} \right|_{z=z_0} = \lim_{z_1 \rightarrow z_0} \frac{w_1 - w_0}{z_1 - z_0} = \lim_{z_2 \rightarrow z_0} \frac{w_2 - w_0}{z_2 - z_0} \Rightarrow g'(z_0) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho_1}{\rho} e^{i(\phi_1 - \theta_1)} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho_2}{\rho} e^{i(\phi_2 - \theta_2)}$$

Es claro que al comparar las magnitudes y las fases demostramos que las transformaciones conformes preservan las distancias,  $\rho_1 = \rho_2$ , y los ángulos  $(\phi_2 - \phi_1) = (\theta_2 - \theta_1)$ . Adicionalmente, es muy fácil convencerse que si la transformación conforme conserva los ángulos entre curvas y las escalas en todas direcciones las figuras son transformadas en figuras equivalentes quizá ampliadas y rotadas, pero no deformadas.

### 1.4.1. Algunas consecuencias y ejemplos

Las consecuencias de la última afirmación reviste alguna importancia. Si  $f = f(z)$  es analítica en el plano  $(x, y)$  y la transformación  $z = h(w)$  también lo es, entonces la función  $F(w) = f(h(w))$  necesariamente es analítica en el plano  $(r, s)$ .

$$\frac{\Delta F}{\Delta w} = \frac{\Delta f}{\Delta h} \frac{\Delta h}{\Delta w} \equiv \frac{\Delta f}{\Delta z} \frac{\Delta h}{\Delta w}$$

Por hipótesis supusimos que  $f$  y  $h$  eran analíticas, por lo cual es inmediato concluir que debido a que los dos factores de la derecha son analíticos, la función  $F(w)$  también lo será.

Tal y como mostramos en la sección 1.2.5 si  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ , es analítica, entonces  $u(x, y)$  y  $v(x, y)$  serán funciones armónicas conjugadas, vale decir que satisfacen la ecuación de Laplace, con lo cual  $\nabla^2 u(x, y) = \nabla^2 v(x, y) = 0$ . Eso significa que si  $F = \Phi(w) + i\Psi(w)$ , entonces:

$$f = \phi + i\psi \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow F = \Phi + i\Psi \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0 \\ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = 0 \end{array} \right\}$$

Esto impone que si  $\Re[f(z)] = \phi$  es constante en el plano  $(x, y)$ , también lo será  $\Re[F(w)] = \Phi$  en  $(r, s)$  (¡Demuéstrelo!). Esta propiedad deriva una serie de aplicaciones en la solución de la ecuación de Laplace en dos dimensiones. Si bien es una técnica elegante y útil cuando es posible, no deja de ser limitada porque se restringe a 2D. Hoy los métodos numéricos para resolver ecuaciones diferenciales en derivadas parciales han superado con creces este tipo de técnicas.

Los ejemplos son variados.

- Las siguientes transformaciones representan:

traslaciones:  $w = z + b$ ; rotaciones de ángulo  $\theta$ :  $w = ze^{i\theta}$ ; expansiones de escala  $a$ :  $w = az$

y pueden ser combinadas como:  $w = az + b$  con  $a$  y  $b$  números complejos. Para la traslación es inmediato. Para la rotación también si recordamos que  $z = |z|e^{i\phi}$  con lo cual  $w = |z|e^{i\phi}e^{i\theta} = |z|e^{i(\phi+\theta)}$

- También la transformación de inversión  $w = 1/z$  que transforma los puntos del interior de un círculo unidad a su exterior y viceversa. Una vez más,  $w = \frac{1}{z} = \frac{1}{|z|e^{i\phi}} = \frac{1}{|z|}e^{-i\phi}$ . Entonces es claro que

$$0 \leq |z| \leq 1 \Rightarrow \infty < |w| \leq 1 \quad \wedge \quad 1 \leq |z| \leq \infty \Rightarrow 0 < |w| \leq 1$$

- Un caso más interesante lo constituye la transformación  $w = e^{i\theta} \left( \frac{z - z_0}{z - z_0^*} \right)$ , la cual transforma los puntos  $z_0$  del semiplano superior complejo  $y > 0$  al interior de un círculo unidad en el  $w$ -plano (ver figura 1.3 en la página 25). Para convencernos de ello notamos que

$$|w| = \left| e^{i\theta} \left( \frac{z - z_0}{z - z_0^*} \right) \right| = \left| \frac{z - z_0}{z - z_0^*} \right|$$

En general si  $z_0$  y  $z$  los consideramos en el semiplano complejo superior  $y \geq 0$ , entonces siempre se cumple que  $|z - z_0| \leq |z - z_0^*|$  con lo cual  $|w| \leq 1$ , y como se cumple para todo  $z$  en ese semiplano, entonces cada uno de esos puntos es transformado dentro de un círculo de radio  $|w|$ . Es inmediato convencerse que, la igualdad se cumple para puntos  $z$  sobre el eje real y que el punto  $z = z_0$  es llevado al punto  $w = 0$ . Finalmente, notamos que si conocemos como transforman dos puntos  $z_1 \rightarrow w_1$  y  $z_2 \rightarrow w_2$  entonces podremos determinar la transformación, esto es, conocer los valores de los parámetros  $z_0$  y  $\phi$ . Este caso lo podemos apreciar si consideramos un par de puntos en el semiplano complejo y conocemos como transforman, digamos  $z = i$  sobre el eje imaginario, e imponemos que sea transformado a  $w = 0$ , entonces es inmediato determinar que  $z_0 = i$ . Por otro lado, si imponemos que  $z = \infty \Rightarrow w = 1$ , entonces:  $1 = w = e^{i\theta} \Rightarrow \theta = 0$ , con lo cual  $w = \frac{z - i}{z + i}$ .

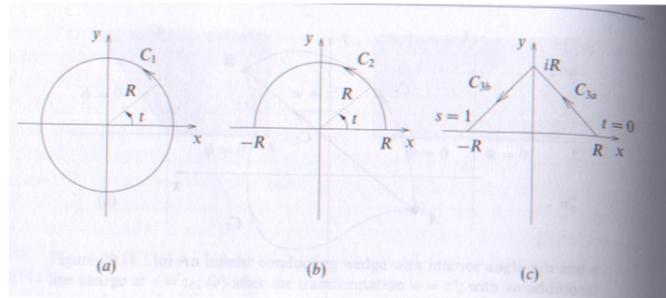


Figura 1.4: Integrales complejas y circuitos

## 1.5. Integrales complejas

Como siempre, luego de definir la derivada, construimos el concepto de integral a partir de la suma de Riemann. Esto es

$$S_n = \sum_{j=1}^n f(\zeta_j)(z_j - z_{j-1}) \quad \text{si } n \rightarrow \infty \Rightarrow |z_j - z_{j-1}| \rightarrow 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n f(\zeta_j)(z_j - z_{j-1}) = \int_{z_1}^{z_2} dz f(z)$$

Es decir, que si el  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  existe, entonces se corresponde con la definición de la integral.

### 1.5.1. Algunas propiedades

Es claro que esta integral es, necesariamente, una integral de línea, ya que  $z$  tiene “dos dimensiones”

$$\int_{z_1}^{z_2} dz f(z) = \int_{z_1}^{z_2} [dx + idy] [u(x, y) + iv(x, y)] = \int_{x_1, y_1}^{x_2, y_2} [u(x, y)dx - v(x, y)dy] + i \int_{x_1, y_1}^{x_2, y_2} [v(x, y)dx + u(x, y)dy] \quad (1.4)$$

con lo cual transformamos una integral compleja en una suma de integrales reales. Pero necesitamos definir el contorno a través del cual vamos del punto  $z_1 = x_1 + iy_1$  al punto  $z_2 = x_2 + iy_2$ .

La integración compleja tendrá las propiedades acostumbradas

- $\int_C dz (f(z) + g(z)) = \int_C dz f(z) + \int_C dz g(z)$
- $\int_C dz Kf(z) = K \int_C dz f(z)$  con  $K$  una constante real o compleja
- $\int_a^b dz f(z) = - \int_b^a dz f(z)$
- $\int_a^b dz f(z) = \int_a^m dz f(z) + \int_m^b dz f(z)$
- $\int_C dz |f(z)| \leq ML$ , donde  $M = \max |f(z)|$  y  $L$  la longitud de  $C$

Esta última propiedad es importante porque permite establecer cotas a las integrales complejas sin tener que evaluarlas. De la definición de integral es casi inmediata la demostración

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n f(\zeta_j) \Delta z_j = \int_{z_1}^{z_2} dz f(z) \Rightarrow \left| \sum_{j=1}^n f(\zeta_j) \Delta z_j \right| \leq \sum_{j=1}^n |f(\zeta_j)| |\Delta z_j| \leq M \sum_{j=1}^n |\Delta z_j| \leq ML$$

Donde hemos utilizado que  $|f(\zeta_j)| \leq M$  y que la suma de los intervalos  $\Delta z_j = z_j - z_{j-1}$  es la longitud  $L$  del recorrido  $\mathcal{C}$ . Es claro que tomando límites a ambos miembros obtendremos  $\left| \int_{\mathcal{C}} dz f(z) \right| \leq \int_{\mathcal{C}} dz |f(z)| \leq ML$ .

### Ejemplos

1. Evaluemos la integral compleja  $f(z) = z^{-1}$  a lo largo de diferentes contornos, tal y como se ilustran en la figura 1.4

a) un circuito cerrado a lo largo de una circunferencia de radio  $R$

$$\oint dz z^{-1} \equiv \oint d(Re^{i\theta}) R^{-1} e^{-i\theta} = i \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i$$

b) siguiendo una semicircunferencia desde  $(R, 0) \rightarrow (-R, 0)$ . Esto es

$$\int_{z_1=(R,0)}^{z_2=(-R,0)} dz z^{-1} = \int_{(R,0)}^{(R,\pi)} d(Re^{i\theta}) R^{-1} e^{-i\theta} = i \int_0^{\pi} d\theta = \pi i$$

c) siguiendo dos líneas rectas entre los puntos  $(R, 0) \rightarrow (0, R) \rightarrow (-R, 0)$ . En este caso, procedemos utilizando la expresión cartesiana para los números complejos. Para ello, vamos a parametrizar  $z = z(t)$  para  $(R, 0) \rightarrow (0, R)$  y  $z = z(s)$  cuando  $(0, R) \rightarrow (-R, 0)$ . Veamos

$$\int_{z_1=(R,0)}^{z_3=(-R,0)} dz z^{-1} = \int_{z_1=(R,0)}^{z_2=(0,R)} dz z^{-1} + \int_{z_2=(0,R)}^{z_3=(0,-R)} dz z^{-1}$$

para cada una de las integrales se cumple, respectivamente, que

$$z = (1-t)R + itR \quad \text{con } 0 \leq t \leq 1 \quad \wedge \quad z = -sR + i(1-s)R \quad \text{con } 0 \leq s \leq 1$$

con lo cual

$$\int_{z_1=(R,0)}^{z_2=(0,R)} \frac{dz}{z} = \int_0^1 dt \frac{-1+i}{1+t(-1+i)} + \int_0^1 ds \frac{-1-i}{i+s(-1-i)}$$

procedemos entonces con la primera de las integrales

$$\int_0^1 \frac{(-1+i)dt}{(1-t)+it} = \int_0^1 \frac{(-1+i)((1-t)-it)dt}{(1-t)^2 - t^2} = \int_0^1 \frac{(2t-1)dt}{1-2t+2t^2} + i \int_0^1 \frac{dt}{1-2t+2t^2}$$

es decir

$$\int_0^1 \frac{(-1+i)dt}{(1-t)+it} = \frac{1}{2} \ln(1-2t+2t^2) \Big|_0^1 + i \arctan \left( \frac{t-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} \right) \Big|_0^1 = 0 + \frac{i}{2} \left( \frac{\pi}{2} - \left( -\frac{\pi}{2} \right) \right) = \frac{\pi}{2}$$

y, la segunda integral también tendrá el mismo resultado, con lo cual

$$\int_{z_1=(R,0)}^{z_2=(0,R)} \frac{dz}{z} = \pi i \quad \text{¡el mismo resultado que a través del arco de circunferencia!}$$

Es interesante notar que si regresamos al punto  $(R, 0)$  a través del contorno  $(-R, 0) \rightarrow (0, -R) \rightarrow (R, 0)$  la integral cerrada se anula, no así cuando nos regresamos a través el arco complementario de circunferencia. En pocas palabras, como se esperaba, el valor de las integrales de camino, para algunas funciones, dependerán del camino seleccionado. En la próxima sección veremos a cuáles funciones corresponderá un mismo valor de la integral cerrada, independientemente del circuito que uno elija.

2. Otro ejemplo ilustrativo lo constituye

$$\oint \frac{dz}{(z - z_0)^{n+1}} \Rightarrow \int_0^{2\pi} \frac{Rie^{i\theta}d\theta}{R^{n+1}e^{i(n+1)\theta}} = \frac{i}{R^n} \int_0^{2\pi} d\theta e^{-in\theta} \Rightarrow \begin{cases} n = 0 : \int_0^{2\pi} d\theta = 2i\pi \\ n \neq 0 : \frac{i}{R^n} \int_0^{2\pi} d\theta [\cos(n\theta) - i\text{sen}(n\theta)] = 0 \end{cases}$$

donde hemos utilizado la forma polar  $z - z_0 \equiv Re^{i\theta}$  e integrado a lo largo de una circunferencia de radio  $R$  centrada en  $z = z_0$ .

### Ejercicios

Repetir los mismos pasos del primer ejemplo para el caso de

$$f(z) = (z^*)^{-1}.$$

## 1.6. Teorema Integral de Cauchy

### 1.6.1. El teorema y las regiones

El teorema integral de Cauchy es uno de los dos teoremas básicos en la teoría de funciones de variable compleja. Este teorema considera que si  $f(z)$  es analítica en una región simplemente conexa,  $\mathcal{R}$ , en su contorno  $\mathcal{C}$  y su derivada  $f'(z)$  existe y es continua en esta región<sup>9</sup>, entonces la circulación a lo largo de cualquier contorno cerrado  $\mathcal{C}$  se anula. Esto es

$$\oint_{\mathcal{C}} dz f(z) = 0$$

Antes que nada, y como parte de ese adiestramiento en lenguaje, precisaremos qué queremos decir (qué quieren decir los matemáticos) con regiones *simplemente conexas* y *múltiplemente conexas*.

Una región *simplemente conexa* es aquella que no tiene “huecos”, o dicho de una manera más precisa y elegante, en la cual una curva  $\Gamma$  puede ser reducida (encogida) a un punto sin salir de la región  $\mathcal{R}$ . En la figura 1.5 cuadrante **Ia** se muestra una región simplemente conexa y en los cuadrantes **Ib** y **Ic** regiones *múltiplemente conexas*. Estas dos últimas figuras clarifican este concepto. Es decir, una *región múltiplemente conexa* es aquella que no es *simplemente conexa* y con eso queremos decir que “tiene huecos”, o lo que es lo mismo existen curvas que no se pueden reducir a puntos en la región.

Tal y como hemos comentado la demostración rigurosa del Teorema de Cauchy está fuera de los alcances de estas notas, pero algo se puede hacer si invocamos el Teorema de Stokes (o uno de los Teoremas de Green en el plano) que vimos cuando estudiamos análisis vectorial. Con ello recordamos la ecuación (1.4), entonces

$$\int_{z_1}^{z_2} dz f(z) = \int_{x_1, y_1}^{x_2, y_2} [u(x, y)dx - v(x, y)dy] + i \int_{x_1, y_1}^{x_2, y_2} [v(x, y)dx + u(x, y)dy]$$

<sup>9</sup>Esta última condición no es necesaria, pero la demostración del teorema se torna mucho más sofisticada, y referimos al lector a los libros especializados, vale decir a las referencias [2, 3].

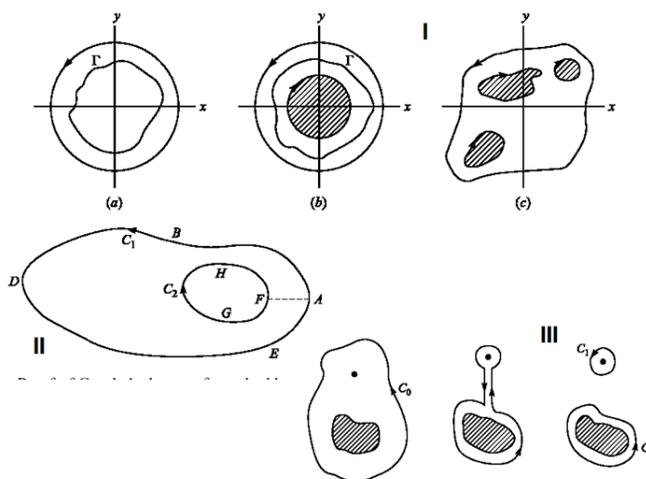


Figura 1.5: Regiones en el plano complejo

El Teorema de Stokes nos dice que

$$\int_{\mathcal{R}} dx dy \left( \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} \right) = \oint_{\mathcal{C}} (p dy - q dx)$$

con lo cual, si una vez más suponemos  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  y  $dz = dx + idy$ , entonces tendremos que

$$\oint_{\mathcal{C}} (u dx - v dy) + i \oint_{\mathcal{C}} (v dx + u dy) = \int_{\mathcal{R}} dx dy \left( \frac{\partial(-v)}{\partial x} + \frac{\partial(-u)}{\partial y} \right) + i \int_{\mathcal{R}} dx dy \left( \frac{\partial(u)}{\partial x} + \frac{\partial(-v)}{\partial y} \right) = 0$$

y acto seguido, como  $f(z)$  es analítica, invocamos las condiciones de Cauchy Riemann (ecuación (1.3)) y es inmediato ver que se anula la integral de circulación.

### 1.6.2. Algunas observaciones y el Teorema de Morera

De la anterior “demostración” del Teorema de Cauchy Riemann emergen algunas observaciones

- La primera es la insistencia de que la condición que la derivada  $f'(z)$  existe y es continua en esta región no es necesaria.
- La segunda es que el Teorema de Cauchy Riemann, es válido también para regiones múltiplementes conexas. Consideremos una región como la descrita en la figura 1.5 cuadrante II, es claro que podemos circular la integral en los siguientes contornos

$$\oint_{\mathcal{C}} dz f(z) = \int_{ABDEAFGHFA} dz f(z) \equiv \int_{ABDEA} dz f(z) + \int_{AF} dz f(z) + \int_{FGHF} dz f(z) + \int_{FA} dz f(z) = 0$$

y como  $\int_{AF} dz f(z) = -\int_{FA} dz f(z)$  entonces

$$\int_{ABDEA} dz f(z) + \int_{FGHF} dz f(z) = 0 \Leftrightarrow \oint_{\mathcal{C}_1} dz f(z) + \oint_{\mathcal{C}_2} dz f(z) = 0$$

con lo cual se nota que para regiones múltiplemente conexas, a pesar que las circulaciones son opuestas, el “observador” que circula por  $\mathcal{C}_1$  y  $\mathcal{C}_2$  siempre tiene la región  $\mathcal{R}$  a su izquierda.

- Siguiendo con la reflexión anterior, podemos invertir el sentido de la circulación en el contorno  $\mathcal{C}_2$  con lo cual

$$\oint_{\mathcal{C}_1} dz f(z) - \oint_{\mathcal{C}_2} dz f(z) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \oint_{\mathcal{C}_1} dz f(z) = \oint_{\mathcal{C}_2} dz f(z)$$

Es decir, que si  $f(z)$  es analítica en una región  $\mathcal{R}$ , da igual cualquier recorrido por las fronteras de una región y el valor de la integral permanecerá inalterado.

- Más aún, este resultado puede extenderse a regiones con  $n$  huecos de tal forma que, tal y como ilustra en en la figura 1.5 cuadrante III

$$\oint_{\mathcal{C}_1} dz f(z) = \sum_{j=1}^n \oint_{\mathcal{C}_j} dz f(z)$$

Con lo cual estamos afirmando que, dada una región que contiene un número finito (¿numerable?)  $n$  de singularidades, la integral a lo largo del contorno que encierra la región  $\mathcal{R}$  es equivalente a la suma de las integrales que encierran cada una de las  $n$  singularidades.

Enunciaremos sin demostración el Teorema de Morera<sup>10</sup>, también conocido como el teorema inverso de Cauchy.

**Teorema de Morera:** Si una función  $f(z)$  es continua en una región  $\mathcal{R}$  encerrada por un contorno  $\mathcal{C}$  y  $\oint_{\mathcal{C}} dz f(z) = 0$  entonces  $f(z)$  es analítica en  $\mathcal{R}$ .

### Ejemplo

Considere la función definida en una región  $\mathcal{R}$

$$f(z) = \frac{1}{z - z_0} \quad \text{con} \quad \begin{cases} z_0 \text{ fuera de la región } \mathcal{R} \\ z_0 \text{ dentro de la región } \mathcal{R} \end{cases}$$

- Si  $z_0$  está **fuera** de la región, entonces  $f(z)$  es analítica en  $\mathcal{R}$ , con lo cual el Teorema de Cauchy implica que

$$\oint_{\mathcal{C}} dz f(z) = 0$$

- Si  $z_0$  está **dentro** de la región, entonces  $f(z)$  no es analítica en  $\mathcal{R}$  por cuanto existe una singularidad  $z = z_0$ . Si consideramos  $\mathcal{C}$  el contorno que bordea a  $\mathcal{R}$ , como una circunferencia centrada en  $z = z_0$  y  $\Gamma$  otra circunferencia que aísla a  $z_0$  con un radio  $|z - z_0| = \epsilon$  (esta situación se ilustra en la figura 1.6 cuadrante I). Entonces, si hacemos  $z - z_0 = \tilde{z} = \epsilon e^{i\theta}$  el Teorema de Cauchy implica

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{dz}{z - z_0} = \oint_{\Gamma} \frac{dz}{z - z_0} = \int_0^{2\pi} \frac{\epsilon i e^{i\theta} d\theta}{\epsilon e^{i\theta}} = i \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i$$

<sup>10</sup>Pueden consultar la demostración en la referencia [Arfken, Weber y Weber 2000].

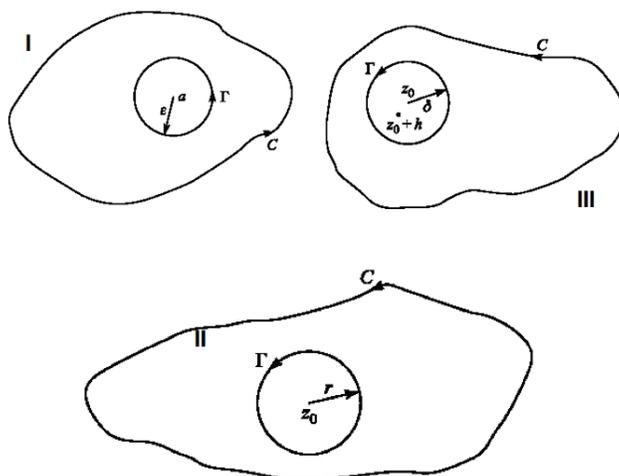


Figura 1.6: Circulaciones y Polos

### 1.6.3. Fórmula integral de Cauchy

El ejemplo de la sección anterior nos lleva a una de las expresiones más útiles e importantes del análisis complejo: *La Fórmula Integral de Cauchy*, la cual dice que si  $f(z)$  es analítica en una región  $\mathcal{R}$  encerrada por un contorno  $\mathcal{C}$  y consideramos un punto  $z = z_0$  contenido en esa región, entonces

$$\frac{1}{2i\pi} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(z) dz}{z - z_0} = f(z_0)$$

Para probar esta afirmación supongamos una vez más un circuito en encierra al polo  $z = z_0$  (ver figura 1.6 cuadrante II). Con lo cual, como  $f(z)$  es analítica en una región, el Teorema de Cauchy nos garantiza

$$\frac{1}{2i\pi} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(z) dz}{z - z_0} = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\Gamma} \frac{f(z) dz}{z - z_0} \quad \text{si } z - z_0 = re^{i\theta} \Rightarrow \frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{i\theta})rie^{i\theta} d\theta}{re^{i\theta}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta})d\theta$$

si hacemos  $r \rightarrow 0$  tendremos que

$$\frac{1}{2i\pi} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(z) dz}{z - z_0} = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\Gamma} \frac{f(z) dz}{z - z_0} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta})d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lim_{r \rightarrow 0} f(z_0 + re^{i\theta})d\theta = f(z_0)$$

**Observaciones** Surgen también observaciones al respecto

- Obvio que es válido para regiones múltiplemente conexas y es fácil demostrarlo. Se lo dejamos al lector como ejercicio.
- Si reacomodamos la expresión para la forma integral podemos hacer que esa fórmula sea válida para todo  $z$

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}$$

- Más aún, veremos que es fácil generalizar esta fórmula para derivadas de funciones, vale decir

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2i\pi} \oint_C \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{n+1}}$$

Veamos el caso más sencillo y demostremos que para  $n = 1$

$$f'(z_0) = \frac{1}{2i\pi} \oint_C \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^2} \Rightarrow f'(z_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{2i\pi} \oint_C \frac{f(z)}{h} \left\{ \frac{1}{z - z_0 - h} - \frac{1}{z - z_0} \right\} dz \right]$$

tal y como se muestra en la figura 1.6, cuadrante III tenemos que

$$f'(z_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{2i\pi} \oint_C \frac{f(z) dz}{(z - z_0 - h)(z - z_0)} \right] = \frac{1}{2i\pi} \oint_C \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^2}$$

Pero mucho más interesante hubiera sido “derivar respecto a una constante”. Este truco implica que

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \oint_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} \Rightarrow f^{(n)}(z) = \frac{1}{2i\pi} \oint_C \frac{\partial^n}{\partial z^n} \left[ \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \right] d\zeta = \frac{n!}{2i\pi} \oint_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)^{n+1}} \quad (1.5)$$

Esta fórmula es muy útil para calcular integrales. Considere, por ejemplo la siguiente integral

$$I = \oint_C \frac{e^{2\zeta} d\zeta}{(\zeta + 1)^4} \equiv \frac{2i\pi}{3!} f^{(3)}(-1) \quad \text{con } f(z) = e^{2z} \Rightarrow I = \frac{8i\pi}{3} e^{-2}$$

donde hemos supuesto que el contorno  $C$  encerraba el punto  $z = -1$ , porque de otro modo la función  $\frac{e^{2z}}{(z + 1)^4}$  sería analítica y la integral se anularía por el Teorema de Cauchy.

### Ejemplos

1. Evaluar

$$I = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{e^z}{z - 2} dz, \text{ para los entornos: } C: |z| = 3 \text{ y } C: |z| = 1.$$

El entorno  $|z| = 3$  contiene en su interior al punto  $z_0 = 2$ , esto implica que:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{e^z}{z - 2} dz = e^2.$$

Para el entorno  $|z| = 1$ , vemos que el punto  $z_0 = 2$  no está contenido en ese entorno, esto significa que el integrando es una función analítica en toda la región. Por lo tanto:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{e^z}{z - 2} dz = 0.$$

2. Evaluar

$$I = \int_C \frac{1}{z^2 + 4} dz, \text{ para los entornos: } C_1: |z - i| = 2, C_2: |z| = 3 \text{ y } C_3: |z + i| = 2.$$

La integral puede ser escrita de la siguiente manera:

$$I = \int_C \frac{1}{(z + 2i)(z - 2i)} dz.$$

Para el contorno  $|z - i| = 2$ , tenemos que éste contiene en su interior al punto  $z_0 = 2i$ . Si escribimos la integral como

$$I = \int_C \frac{1}{z-2i} dz,$$

la función  $1/(z + 2i)$  es analítica dentro de  $C_1$  y entonces por el teorema de Cauchy

$$I = \int_C \frac{1}{z-2i} dz = 2\pi i \left( \frac{1}{4i} \right) = \frac{\pi}{2}.$$

Consideremos ahora el contorno  $|z| = 3$ . Este contorno contiene en su interior a los puntos  $2i$  y  $-2i$ . Podemos trazar dos contornos adicionales, de radio  $\epsilon$  alrededor de cada punto, entonces:

$$\begin{aligned} \int_C \frac{1}{z^2 + 4} dz &= \int_{C_{(2i)}} \frac{1}{z^2 + 4} dz + \int_{C_{(-2i)}} \frac{1}{z^2 + 4} dz \\ &= \int_{C_{(2i)}} \frac{1}{z-2i} dz + \int_{C_{(-2i)}} \frac{1}{z+2i} dz \\ &= 2\pi i \left[ \frac{1}{z+2i} \right]_{z=2i} + 2\pi i \left[ \frac{1}{z-2i} \right]_{z=-2i} \\ &= 2\pi i \left[ \frac{1}{4i} \right] + 2\pi i \left[ -\frac{1}{4i} \right] = 0. \end{aligned}$$

Finalmente, para el contorno  $|z + i| = 2$  se tiene que éste contiene al punto  $z_0 = -2i$ . Repitiendo lo que hicimos en el primer caso tenemos:

$$I = \int_C \frac{1}{z+2i} dz$$

la función  $1/(z - 2i)$  es analítica dentro de  $C_3$  y entonces por el teorema de Cauchy

$$I = \int_C \frac{1}{z+2i} dz = 2\pi i \left( -\frac{1}{4i} \right) = -\frac{\pi}{2}.$$

# Bibliografía

- [1] G. B. Arfken y H.J. Weber (2000)  
**Mathematical Methods for Physicists** 5ta Edición (Academic Press, Nueva York)
- [2] R. V. Churchill y J. W. Brown (1989)  
**Complex Variables and Applications** (*McGraw-Hill, New York*).
- [3] K. Knopp (1996)  
**Theory of Functions, Parts I and II** (*Dover Publications, New York*)

Capítulo **2**

Series

## 2.1. Sucesiones y Series

Básicamente el tema central de este curso tiene que ver con el estudio de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias y el desarrollo de métodos para resolverlas. Las Ecuaciones Diferenciales aparecen ya como tema de estudio, o curiosidad matemática, desde los tiempos de Isaac Newton<sup>1</sup> cuando se comenzó con el desarrollo del Cálculo Diferencial. El propio Newton las estudia en su tratado de Cálculo Diferencial donde discute sus soluciones a través de una expansión en series.

Newton estudia la siguiente ecuación diferencial, que por contener una primera derivada llamaremos una ecuación diferencial de primer orden:

$$\frac{dy(x)}{dx} = 1 - 3x + y(x) + x^2 + xy(x). \quad (2.1)$$

Para buscar su solución, Newton propone el siguiente método que consiste en suponer una solución que tiene la forma de una serie infinita. El primer término de la serie es:

$$y = 0 + \dots$$

el cual corresponde al valor inicial  $x = 0$  en la ecuación (2.1). Al insertar este valor en (2.1) resulta

$$\frac{dy(x)}{dx} = 1 + \dots$$

que al integrarse se obtiene

$$y = x + \dots$$

Sustituyendo esta última expresión en (2.1), resulta

$$\frac{dy(x)}{dx} = 1 - 3x + x + \dots = 1 - 2x + x^2 + \dots$$

Integrando esta última ecuación, se obtiene

$$y = x - x^2 + \dots$$

Repitiendo el proceso:

$$\frac{dy(x)}{dx} = 1 - 2x + x^2 + \dots \Rightarrow y = x - x^2 + \frac{x^3}{3} + \dots$$

y continuando con el método repetidamente

$$y = x - x^2 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{6} + \frac{x^5}{30} - \frac{x^6}{45} + \dots$$

---

<sup>1</sup>Sir Isaac Newton (1643-1727), fue un científico, físico, filósofo, inventor, alquimista y matemático inglés, autor de los *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*, más conocidos como los Principia, donde describió la ley de gravitación universal y estableció las bases de la Mecánica Clásica mediante las leyes que llevan su nombre. Entre sus otros descubrimientos científicos destacan los trabajos sobre la naturaleza de la luz y la óptica y el desarrollo del cálculo matemático. Newton fue el primero en demostrar que las leyes naturales que gobiernan el movimiento en la Tierra y las que gobiernan el movimiento de los cuerpos celestes son las mismas. Es, a menudo, calificado como el científico más grande de todos los tiempos, y su obra como la culminación de la revolución científica. Tomado de Wikipedia.

**E. X E M P L. I.**

Sit Aequatio  $\frac{y}{x} = 1 - 3x + y + xx + xy$ , cujus Terminos:  
 $1 - 3x + xx$  non affectos *Relatá* Quantitate dispositos vides in la-  
 teralem Seriem primo loco, & reliquos  $y$  &  $xy$  in sinistra Columna.

	$+ 1 - 3x + xx$
$+ y$	$* + x - xx + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{30}x^5; \&c.$
$+ xy$	$* x + xx - x^3 + \frac{1}{3}x^4 - \frac{1}{6}x^5 + \frac{1}{30}x^6; \&c.$
Aggreg.	$+ 1 - 2x + xx - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{6}x^4 - \frac{4}{30}x^5; \&c.$
$y =$	$+ x - xx + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{30}x^5 - \frac{1}{45}x^6; \&c.$

Nunc

Figura 2.1: El esquema de Newton

Por otra parte, notemos que para cada valor de  $x$  y  $y$ , la ecuación (2.1) no es más que la derivada  $y'(x)$  (pendiente) de las soluciones de

$$y'(x) = 1 - 3x + y(x) + x^2 + xy(x)$$

Así, con un poco de paciencia, o con algún programa de computación apropiado, se puede obtener el *campo vectorial* correspondiente a la ecuación diferencial, como se puede apreciar en la Figura 2a. En realidad las soluciones se pueden apreciar como las curvas determinadas por las direcciones indicadas en el campo vectorial, Figura 2b. Las aproximaciones que se van obteniendo con el método mostrado anteriormente se pueden observar, junto con la solución verdadera en la Figura 2c. Notemos que todas las aproximaciones son más cercanas entre si cuando  $x$  toma valores cada vez más próximos a cero.

Las gráficas mostradas en la Figura 2 pueden obtenerse con la ayuda de algún programa de manipulación algebraico, digamos Maple:

```
> restart: with(DEtools):
> ED1 := diff(y(x),x) = 1-3*x+y(x)+x^2+x*y(x);
> ics := y(0)=0;
> Sol = dsolve(ED1,ics,y(x)); assign(%):
> dfieldplot(ED1, y(x), x=-2..2,y=-2..2,color=blue);
> DEplot(ED1,y(x),x=-2..2,[[y(0)=0]],y=-2..2,color=green,linecolor=-exp(x));
> Y1:=x: Y2:=x-x^2: Y3:=x-x^2+x^3/3: Y4:=x-x^2+x^3/3-x^4/6: Ys:=rhs(Sol):
> plot([Y1,Y2,Y3,Y4,Ys],x=-2..2,y=-2..2);
```

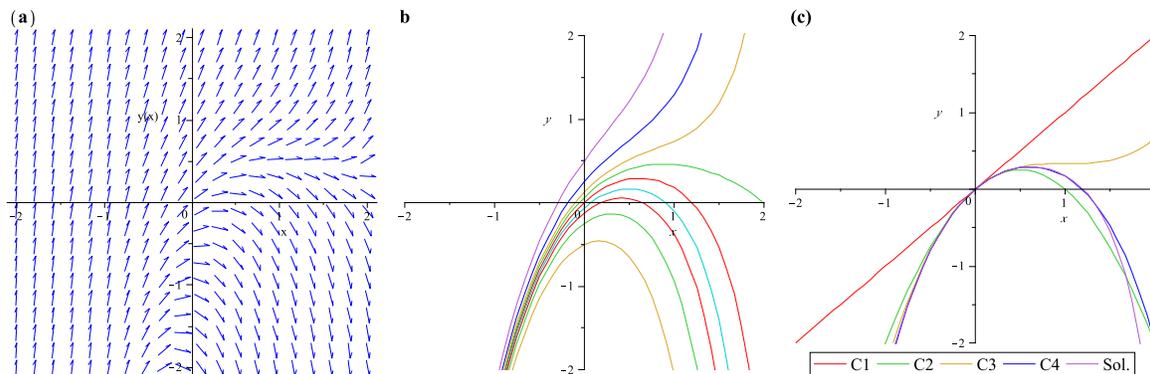


Figura 2.2: (a) Representación de los campos vectoriales. (b) Diferentes soluciones para la ecuación diferencial (2.1). (c) La solución correcta correspondiente al valor inicial  $y(0) = 0$  con las diferentes soluciones aproximadas.

Comencemos entonces nuestro estudio sobre Ecuaciones Diferenciales precisamente con las Series Matemáticas.

## 2.2. Introducción a las Series

Para empezar, vayamos a la noción elemental de sucesiones. Básicamente, una sucesión es una colección numerable de elementos, dados en cierto orden, como:

$$1, 2, 3, 4, \dots, \quad 1, x, x^2, \dots$$

Una sucesión puede contener infinitos elementos y en este caso se denomina una sucesión infinita, por lo tanto, si a cada número entero positivo se le asocia un elemento  $u_n$ , entonces el conjunto ordenado:  $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots$  define una sucesión infinita. Cada término  $u_n$  tendrá un siguiente término  $u_{n+1}$  y por lo tanto no existe un último término.

Las sucesiones se pueden expresar de una manera mas sencilla definiendo el  $n$ -ésimo término, como por ejemplo:

$$u_n = \frac{1}{n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

cuyos primeros cuatro términos son:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}.$$

Otra manera de definir sucesiones es por medio de una relación de recurrencia, por ejemplo, para la bien conocida sucesión de Fibonacci la relación de recurrencia es

$$u_1 = u_2 = 1, \quad u_{n+1} = u_n + u_{n-1}, \quad n \geq 2,$$

cuyos primeros términos son:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots$$

Existe una función que permite generar los números de Fibonacci, esta función cuando se expande en potencias de  $x$  tiene como coeficientes, ¡los números de Fibonacci!

$$f(x) = \frac{x}{1 - x - x^2} = x + x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 5x^5 + 8x^6 + 13x^7 + 21x^8 + 34x^9 + \dots$$

También es posible definir una sucesión a través del concepto de función. Se define una función para los enteros positivos, de manera que  $f(n)$  es el término  $n$ -ésimo de la sucesión para cada  $n = 1, 2, 3, \dots$

Los términos de las sucesiones se escriben como:

$$f(1), f(2), f(3), \dots, f(n), \dots$$

Las siguientes fórmulas son ejemplos de sucesiones

$$f(n) = (-1)^n, \quad f(n) = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right), \quad f(n) = (-1)^n \left[1 + \frac{1}{n}\right].$$

Una sucesión  $\{f(n)\}$  se dice que es creciente si

$$f(n) < f(n+1) \quad \forall \quad n \geq 1,$$

o decreciente si:

$$f(n) > f(n+1) \quad \forall \quad n \geq 1.$$

Una sucesión se denomina monótona cuando es creciente o decreciente, y en estos casos se tiene que la convergencia o divergencia se determina de manera sencilla, como lo indica el siguiente teorema:

**Teorema:** Una sucesión monótona converge si y sólo si es acotada.

Una sucesión  $\{f(n)\}$  se dice acotada si existe un número positivo  $M$  tal que  $|f(n)| \leq M$  para todo  $n$ .

A medida que  $n$  se hace cada más grande, el valor de una sucesión  $u_n$  se puede comportar de una manera bastante particular. Por ejemplo, si  $u_n = 1/n$ , es claro que  $u_n$  converge a cero a medida que  $n \rightarrow \infty$ . Pero si  $u_n = e^{an}$ , el límite dependerá del valor de  $a$ .

La pregunta a responder tiene que ver con el hecho de saber si los términos de  $u_n$  tienden, o no, a un límite finito cuando  $n$  crece indefinidamente.

Con el concepto de sucesiones es posible definir una expresión analítica que formalmente tiene aspecto de suma, que contiene un número infinito de sumandos y que se denomina *serie infinita*.

Si  $u_n, n = 1, 2, 3, \dots$ , es una sucesión infinita de números reales o complejos, es posible formar una nueva sucesión  $s_n$  a partir de tomar sumas parciales de  $\{u_n\}$ :

$$s_1 = u_1, \quad s_2 = u_1 + u_2, \quad s_3 = u_1 + u_2 + u_3, \quad \dots \quad s_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n = \sum_{i=1}^n u_i.$$

Si la sucesión  $s_n$  tiende a un límite  $S$ , la serie infinita  $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$  se dice que es convergente y converge al valor  $S$ , el cual es único. Entonces se puede escribir:

$$S = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \quad \Rightarrow \quad S = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n. \quad (2.2)$$

El número  $S$  se denomina la suma de la serie infinita y debe ser entendido como el límite de la sucesión. Se dirá que la serie *diverge* si el valor de la sumatoria aumenta indeteniblemente.

La serie también puede oscilar, con lo cual tampoco converge:

$$s_i = \sum_{n=1}^i (-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots + (-1)^i + \dots$$

Aquí  $s_n$  será 0 o 1 y por lo tanto el límite antes mencionado no existe.

Esto se puede formalizar diciendo que la condición para la existencia de un límite  $S$  es que para cada  $\epsilon > 0$  existe un número  $N = N(\epsilon)$  tal que

$$|S - s_i| < \epsilon \quad \text{para } i > N \quad \Rightarrow \quad |s_j - s_i| < \epsilon \quad \text{para, todo } i, j > N.$$

Esta afirmación se denomina **criterio de Cauchy**<sup>2</sup> sobre la convergencia de las series parciales, y viene a ser la condición necesaria y suficiente para que una suma parcial  $s_i$  converja a medida que avanzamos en los términos de la serie.

La serie cuyos términos son tomados a partir del  $(n + 1)$ -ésimo término, y en el mismo orden, de la serie (2.2) se llama el *resto n-ésimo* de la serie (2.2) y se denota por:

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k \quad \Rightarrow \quad u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + \dots \quad (2.3)$$

Si el resto n-ésimo de la serie (2.2) converge, entonces su suma

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k, \quad (2.4)$$

se denomina el *resto de la serie*.

De las series nos interesa conocer cuanto suman. Es decir, cuál es el valor de  $s_i$  para una serie finita cuando  $i = N$ . Pero también estamos interesados en conocer cuánto suma una serie infinita. Empecemos con las finitas.

### 2.2.1. Series elementales

De cursos anteriores hemos conocido algunas series emblemáticas, estudiemos algunas:

**Serie aritmética** Seguramente con anterioridad hemos oído hablar de progresiones aritméticas. Ellas son, sencillamente:

$$s_N = \sum_{n=0}^{N-1} (a + nd) = a + (a + d) + (a + 2d) + (a + 3d) + (a + 4d) + \dots + [a + (N - 1)d],$$

donde  $a$  y  $d$  son números reales o complejos.

Al desarrollar la serie anterior en orden inverso y sumarla con la serie original:

$$\begin{array}{cccccccc} s_N = & a & & +(a + d) & & +(a + 2d) & & +(a + 3d) & & + \dots & & + [a + (N - 1)d] \\ s_N = & [a + (N - 1)d] & + & [a + (N - 2)d] & + & [a + (N - 3)d] & + & [a + (N - 4)d] & + & \dots & + & a \end{array}$$

resulta

$$s_N = \frac{N}{2} [a + a + (N - 1)d] \rightarrow s_N = \frac{N}{2} [\text{Primer Término} + \text{Ultimo Término}]$$

obviamente, si  $N \rightarrow \infty$  la serie diverge.

**Serie Geométrica** De ésta también sabemos que

$$s_N = \sum_{n=0}^{N-1} ax^n = a + ax + ax^2 + ax^3 + \dots + ax^{N-1}$$

---

<sup>2</sup>Augustin Louis Cauchy París, 1789 - 1857, matemático francés pionero en los estudios de análisis (real y complejo) y de la Teoría de los Grupos de Permutación. Cauchy hizo aportes importantes en los criterios de convergencia y divergencia de series infinitas, así como también, en ecuaciones diferenciales, determinantes, probabilidades y Física Matemática

y si restamos

$$\begin{aligned} s_N &= a + ax + ax^2 + ax^3 + \dots + ax^{N-1} \\ xs_N &= ax + ax^2 + ax^3 + ax^4 + \dots + ax^N \end{aligned}$$

es inmediato comprobar que:

$$s_N = \frac{a(1-x^N)}{1-x},$$

si  $|x| < 1$  tendremos que la suma de la serie será:

$$S = \lim_{N \rightarrow \infty} s_N = \frac{a}{1-x},$$

y, divergirá (u oscilará) si  $|x| \geq 1$ .

**Series Aritmético-geométricas** Estas series, un poco más exóticas y como su nombre lo sugiere son una combinación de las anteriores. Estos es

$$s_N = \sum_{n=0}^{N-1} (a+nd)x^n = a + (a+d)x + (a+2d)x^2 + (a+3d)x^3 + (a+4d)x^4 + \dots + [a+(N-1)d]x^{N-1}$$

y con la misma estrategia de las geométricas se llega a encontrar el valor de la suma  $S$ , nada intuitiva:

$$s_N = \frac{a - [a+(N-1)d]x^N}{1-x} + \frac{xd(1-x^{N-1})}{(1-x)^2}$$

Otra vez, si  $|x| < 1$ , entonces cuando  $N \rightarrow \infty$  la serie converge a:

$$S = \frac{a}{1-x} + \frac{xd}{(1-x)^2}.$$

**Serie Armónica** Quizá no la conocíamos con este nombre (y menos por sus propiedades) pero seguro nos la hemos tropezado

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

Esta serie infinita resulta ser engañosa, en apariencia parece converger, pero no es así. Además notemos lo siguiente:

$$\sum_{n=1}^{20} \frac{1}{n} \approx 3,5977, \quad \sum_{n=1}^{220} \frac{1}{n} \approx 5,9731, \quad \sum_{n=1}^{20220} \frac{1}{n} \approx 10,492,$$

la suma de los primeros 20 términos es más grande que la suma de los siguientes ¡200 términos! y da la impresión de que la serie crece muy lentamente hacia algún valor límite.

Si analizamos con más cuidado, veremos que hay sutilezas

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \underbrace{\frac{1}{2}}_{\sigma_0} + \underbrace{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)}_{\sigma_1} + \underbrace{\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right)}_{\sigma_2} + \underbrace{\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{16}\right)}_{\sigma_3} + \dots$$

y puede ser reescrita como

$$1 + \underbrace{\frac{1}{1+1}}_{\sigma_0} + \underbrace{\frac{1}{2+1} + \frac{1}{2+2}}_{\sigma_1} + \underbrace{\frac{1}{4+1} + \frac{1}{4+2} + \frac{1}{4+3} + \frac{1}{4+4}}_{\sigma_2}$$

$$+ \underbrace{\frac{1}{8+1} + \frac{1}{8+2} + \cdots + \frac{1}{8+8}}_{\sigma_3} + \cdots + \sum_{j=1}^{2^n} \frac{1}{2^n + j} + \cdots$$

con lo cual

$$\sigma_0 = \frac{1}{2}; \quad \sigma_1 = \frac{7}{12} > \frac{1}{2}; \quad \sigma_2 = \frac{533}{840} > \frac{1}{2}; \quad \sigma_3 = \frac{95549}{144144} > \frac{1}{2};$$

y claramente diverge ya que

$$1 + \sigma_0 + \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \cdots > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots$$

Esta prueba aparentemente se le debe a Nicole D'Oresme<sup>3</sup>.

Una de las generalizaciones de la serie armónica es la función Zeta de Riemann<sup>4</sup>

$$\zeta(k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}, \quad \Re(k) > 1.$$

Esta última expresión es también un ejemplo donde a partir de una serie se define una función.

**Ejemplo**

1. Demuestre que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$$

Se tiene que

$$s_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n},$$

y que al multiplicar por  $\frac{1}{2}$  se obtiene

$$\frac{1}{2}s_n = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}},$$

restando

$$\left[1 - \frac{1}{2}\right] s_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}} = 1 - \frac{1}{2^n}.$$

por lo tanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 - \frac{1}{2^n}\right] = 1,$$

la serie converge.

Las series que hemos mencionado con anterioridad tienen la particularidad de que todos sus términos son positivos, es decir, para la serie  $\sum a_n$  se tiene que  $a_n \geq 0$ , y por lo tanto:

$$s_n = s_{n-1} + a_n \geq s_{n-1}$$

de manera que las sumas parciales  $s_n$  son una sucesión monótona creciente.

<sup>3</sup>Nicole D'Oresme (1323-1382) Matemático francés que inventó la geometría coordenada antes de Descartes. Sobre la serie armónica consulte: <http://mathworld.wolfram.com/HarmonicSeries.html>

<sup>4</sup>Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826 Hanover, Alemania - 1866 Selasca, Italia) Matemático alemán cuyas ideas sobre la geometría del espacio han tenido un profundo impacto en el desarrollo de la Física Teórica. Igualmente clarificó la noción de integral al introducir el concepto de lo que hoy se conoce como *integral de Riemann*. Más detalles en <http://mathworld.wolfram.com/RiemannIntegral.html>.

## Ejercicios

- Encuentre la suma de los 100 primeros enteros.
- Encuentre la distancia total que recorre una pelota que rebota verticalmente y que en cada rebote pierde  $2/3$  de su energía cinética.
- Encuentre la suma de la serie  $S = 2 + \frac{5}{2} + \frac{8}{4} + \frac{11}{8} + \dots$ .
- Demuestre que

a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2}$$

- Determine el limite de las siguientes sucesiones cuando  $n \rightarrow \infty$ .

a)  $u_n = \frac{n}{n+1}$

b)  $u_n = \frac{1}{1+n^2}$

c)  $u_n = \frac{n^2}{1+n}$

d)  $u_n = \frac{(an+b)^2}{cn^2+d}$

## 2.3. Más sobre las series geométricas

Las series infinitas se encuentran entre las más poderosas herramientas que se introducen en un curso de cálculo elemental. Son un ejercicio bastante inteligente para la manipulación de límites y son una buena herramienta para el estudio de las ecuaciones diferenciales, en el desarrollo de métodos numéricos y para estimar el comportamiento de funciones.

### 2.3.1. Derivación de series geométricas elementales

La serie geométrica:

$$a + az + az^2 + az^3 + \dots + az^n + \dots$$

con  $|z| < 1$ , es uno de los pocos ejemplos donde se puede encontrar el término de las sumas parciales a través de una expresión sencilla. Esta serie se puede tomar como punto de partida para encontrar la suma de un gran número de series interesantes. Consideremos el caso  $a = 1$  y  $z = x$ .

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots = \frac{1}{1-x}, \quad |x| < 1. \quad (2.5)$$

Si cambiamos  $x$  por  $x^2$  en (2.5) resulta

$$1 + x^2 + x^4 + x^6 + \dots + x^{2n} + \dots = \frac{1}{1-x^2}, \quad |x| < 1. \quad (2.6)$$

Si se multiplica (2.6) por  $x$  se obtiene

$$x + x^3 + x^5 + x^7 + \dots + x^{2n+1} + \dots = \frac{x}{1-x^2}, \quad |x| < 1. \quad (2.7)$$

Si cambiamos  $x$  por  $-x$  en (2.5) resulta

$$1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + \dots = \frac{1}{1+x}, \quad |x| < 1. \quad (2.8)$$

Si cambiamos  $x$  por  $x^2$  en (2.8) resulta

$$1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots + (-1)^n x^{2n} + \dots = \frac{1}{1+x^2}, \quad |x| < 1. \quad (2.9)$$

Si se multiplica (2.9) por  $x$  se obtiene

$$x - x^3 + x^5 - x^7 + \dots + (-1)^n x^{2n+1} + \dots = \frac{x}{1+x^2}, \quad |x| < 1. \quad (2.10)$$

Si cambiamos  $x$  por  $2x$  en (2.6) resulta

$$1 + 4x^2 + 16x^4 + \dots + 4^n x^{2n} + \dots = \frac{1}{1-4x^2}, \quad |x| < \frac{1}{2}. \quad (2.11)$$

Si se deriva (2.5) entonces

$$1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1} + \dots = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad |x| < 1. \quad (2.12)$$

Si se integra (2.8):

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} + \dots = \ln(1+x), \quad |x| < 1. \quad (2.13)$$

Si se integra (2.9) ahora resulta

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + \dots = \arctan(x), \quad |x| < 1. \quad (2.14)$$

Siguiendo a Laplace, quien dijo que había que leer a Euler: “*Read Euler, read Euler. He is the master of us all*”, podemos hacer lo siguiente con (2.13):

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \quad (2.15)$$

Es bueno acotar que Euler utilizó esta expresión para construir ¡tablas de logaritmos! Ahora bien, cambiando  $x$  por  $-x$  resulta

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \dots \quad (2.16)$$

restando (2.15) menos (2.16):

$$\ln(1+x) - \ln(1-x) = \left[ x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \right] - \left[ -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \dots \right] \quad (2.17)$$

$$= 2x + \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^5}{5} + \dots \quad (2.18)$$

Es decir:

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2x + \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^5}{5} + \dots \quad (2.19)$$

Para valores pequeños de  $x$ , digamos  $x = 1/3$  resulta:

$$\ln\left(\frac{1+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}\right) = \ln(2) = 2\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{2\left(\frac{1}{3}\right)^3}{3} + \frac{2\left(\frac{1}{3}\right)^5}{5} + \dots \approx 0,6930041152$$

Euler notó la siguiente conexión entre logaritmos y las series armónicas. Cambiando  $x$  por  $1/n$  en (2.15) se obtiene

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} - \frac{1}{4n^4} + \dots \quad (2.20)$$

por lo tanto

$$\frac{1}{n} = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{3n^3} + \frac{1}{4n^4} - \dots \quad (2.21)$$

y para valores de  $n$  muy grandes, se cumple que

$$\frac{1}{n} = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

Ahora bien, para diferentes valores de  $n$  se obtienen las siguientes relaciones

$$1 = \ln(2) + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \dots \quad (2.22)$$

$$\frac{1}{2} = \ln\left(\frac{3}{2}\right) + \frac{1}{8} - \frac{1}{24} + \frac{1}{64} - \dots \quad (2.23)$$

$$\frac{1}{3} = \ln\left(\frac{4}{3}\right) + \frac{1}{18} - \frac{1}{81} + \frac{1}{324} - \dots \quad (2.24)$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad (2.25)$$

$$\frac{1}{n} = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) + \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{3n^3} + \frac{1}{4n^4} - \dots \quad (2.26)$$

si sumamos por columnas resulta

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} &= \ln(2) + \ln\left(\frac{3}{2}\right) + \ln\left(\frac{4}{3}\right) + \dots + \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \\ &+ \frac{1}{2} \left[1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{n^2}\right] - \frac{1}{3} \left[1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{27} + \dots + \frac{1}{n^3}\right] \\ &+ \frac{1}{4} \left[1 + \frac{1}{16} + \frac{1}{81} + \dots + \frac{1}{n^4}\right] - \dots \end{aligned}$$

Es fácil ver que la suma de los logaritmos de la primera línea se puede escribir como el logaritmo de sus productos, es decir,

$$\ln(2) + \ln\left(\frac{3}{2}\right) + \ln\left(\frac{4}{3}\right) + \dots + \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln\left[2 \left(\frac{3}{2}\right) \left(\frac{4}{3}\right) \dots \frac{n+1}{n}\right] = \ln(n+1)$$

De manera que, y siguiendo a Euler que llevó a cabo un estimado para los términos sobrantes, resulta lo siguiente:

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \approx \ln(n+1) + 0,577218 \quad (2.27)$$

Para valores de  $n$  muy grandes la suma de la serie armónica es igual a un logaritmo más una constante. Esta constante es actualmente llamada la Constante de Euler y denotada por la letra  $\gamma$ :

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n+1) \right]. \quad (2.28)$$

**Ejercicio** Demuestre que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n+1) \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) \right].$$

La constante de Euler juega un papel central en otras ramas de las matemáticas, por ejemplo, en el análisis real aparece como:

$$\gamma = - \int_0^{\infty} e^{-x} \ln(x) dx. \quad (2.29)$$

## 2.4. El método de la diferencia

A veces para una serie finita,  $s_N = \sum_{n=1}^N a_n$ , uno encuentra que para el término  $n$ -ésimo se tiene que:  $a_n = f(n) - f(n-1)$  para alguna función  $f(n)$ . En ese caso es inmediato demostrar lo siguiente:

$$s_N = \sum_{n=1}^N a_n = f(N) - f(0) = \sum_{k=1}^m f(N-k+1) - \sum_{k=1}^m f(k-1) \quad (2.30)$$

más aún, se puede ir más allá. Si identificamos que el término  $n$ -ésimo tiene la forma de  $a_n = f(n) - f(n-m)$  es fácilmente demostrable que la suma de la serie se puede escribir como la segunda ecuación de (2.30). Hay que hacer notar que el argumento  $n-m$  puede ser positivo o negativo. Con lo cual el método de la diferencia resulta versátil y muy útil cuando se requiere encontrar la suma de series de variada dificultad.

**Ejemplo 1** Para la serie

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n(n+1)}$$

se tiene que

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)} = -\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} \rightarrow f(n) = -\frac{1}{n+1}$$

por lo tanto, la suma se podrá expresar como

$$s_N = f(N) - f(0) = -\frac{1}{N+1} + 1 = \frac{N}{N+1}.$$

**Ejemplo 2** Siguiendo la estrategia de la expansión en fracciones simples se puede encontrar que para la serie

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n(n+2)}$$

se tiene

$$a_n = \frac{1}{n(n+2)} = -\frac{1}{2(n+2)} + \frac{1}{2n} \rightarrow f(n) = -\frac{1}{2(n+2)}$$

de forma y manera que

$$s_N = f(N) + f(N-1) - f(0) - f(-1) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{N+2} + \frac{1}{N+1} \right).$$

Ahora bien, con alguna frecuencia surgen las series de números naturales. La más simple es

$$s_N = 1 + 2 + 3 + \dots + N = \sum_{n=1}^N n = \frac{N(N+1)}{2},$$

una serie aritmética de razón  $d = 1$ .

Más interesante puede ser la serie de cuadrados de números enteros

$$s_N = 1 + 2^2 + 3^2 + \dots + N^2 = \sum_{n=1}^N n^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}.$$

Este resultado, nada intuitivo, surge de la aplicación ingeniosa del método de la diferencia. Tal y como hemos dicho, se trata de encontrar que el elemento genérico de la serie, tal que,  $a_n = f(n) - f(n-1) = n^2$  para alguna función. Suponga una función del tipo

$$f(n) = n(n+1)(2n+1) \Rightarrow f(n-1) = (n-1)n(2n-1),$$

entonces

$$f(n) - f(n-1) = n(n+1)(2n+1) - (n-1)n(2n-1) = 6n^2$$

con lo cual

$$a_n = 6n^2 = N(N+1)(2N+1) \Rightarrow s_N = \frac{f(N) - f(0)}{6} = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}.$$

### 2.4.1. Sumando por analogía

Como siempre, intentaremos proceder por analogía. La intención es expresar una serie complicada como sumas de series conocidas. Considere el siguiente ejemplo

$$s_N = \sum_{n=1}^N (n+1)(n+3) = \sum_{n=1}^N (n^2 + 4n + 3) = \sum_{n=1}^N n^2 + \sum_{n=1}^N 4n + \sum_{n=1}^N 3$$

con lo cual

$$s_N = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6} + \frac{N(N+1)}{2} + 3N = \frac{N(2N^2 + 15N + 31)}{6}.$$

## 2.5. Algebra Elemental de Series

Las series se suman, se igualan y se multiplican. Para ello es importante que tengamos cuidado con los índices y sus valores. Consideremos un par de series infinitas

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad y \quad v = \sum_{n=0}^{\infty} b_n,$$

con lo cual la suma de esas series será

$$u + v = \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)$$

Los índices son mudos y se acomodan para ser sumados.

Para sumar series es imperioso que los índices de cada serie comiencen con el mismo valor esto es

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{j=1}^{\infty} b_j = \sum_{n=1}^{\infty} (a_{n-1} + b_n) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$$

nótese que hemos hecho los siguientes cambios:  $j \rightarrow n$  y  $n \rightarrow n - 1$ .

Algo parecido ocurre cuando las series se igualan

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} [(n+1) a_{n+1} - b_n] = 0$$

Para finalizar se puede comprobar que las series también se pueden multiplicar

$$u v = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n,$$

donde:

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_j b_{n-j} + \dots + a_{n-2} b_2 + a_{n-1} b_1 + a_n b_0.$$

Cuando las sucesiones comprenden sumas y productos de otras sucesiones, es decir, si  $u_k$  y  $v_k$  son dos sucesiones con  $u_k \rightarrow U$  y  $v_k \rightarrow V$  cuando  $k \rightarrow \infty$ , entonces se cumple que:

1. si  $a$  y  $b$  son números independientes de  $k$ , entonces  $au_k + bv_k \rightarrow aU + bV$  cuando  $k \rightarrow \infty$ .
2.  $u_k v_k \rightarrow UV$  para  $k \rightarrow \infty$ .
3. si  $V \neq 0$  entonces  $u_k/v_k \rightarrow U/V$  a medida que  $k \rightarrow \infty$ .
4. si  $u_k < v_k \forall k > N$  entonces  $U \leq V$  cuando  $k \rightarrow \infty$ .

**Teorema:** Si la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  converge, entonces cualquiera de sus restos converge. Si cualquier resto de la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  converge, entonces la propia serie también converge y si además

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n, \quad s_i = \sum_{n=1}^i u_n, \quad r_i = \sum_{n=i+1}^{\infty} u_n,$$

Entonces

$$S = s_i + r_i.$$

Se tiene entonces que es posible agregar o quitar un número finito de términos a la serie dada y esta operación no influirá sobre su convergencia. También se desprende del teorema anterior que si la serie converge entonces su resto tiende a cero:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} r_i = \lim_{i \rightarrow \infty} (S - s_i) = 0. \quad (2.31)$$

## 2.6. Series telescópicas

Una propiedad importante de las series finitas es la propiedad telescópica:

$$\sum_{k=1}^n (a_k - a_{k+1}) = a_1 - a_{n+1}, \quad (2.32)$$

para el caso de series infinitas, se consideran aquellas series  $\sum u_n$  donde cada término se puede expresar como una diferencia de la forma:

$$u_n = a_n - a_{n+1}.$$

**Teorema:** Sean  $\{u_n\}$  y  $\{a_n\}$  dos sucesiones de números complejos tales que

$$u_n = a_n - a_{n+1} \quad \text{para } n = 1, 2, 3, \dots$$

Entonces la serie  $\sum u_n$  converge si y sólo si la sucesión  $\{a_n\}$  converge, en cuyo caso se tiene:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = a_1 - L \quad \text{donde } L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

**Ejemplo:** Consideremos la siguiente serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n}.$$

Tenemos entonces que

$$u_n = \frac{1}{n^2 + n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1},$$

es decir que:  $a_n = 1/n$ ,  $a_1 = 1$  y además ya vimos que la sucesión  $a_n = 1/n$  converge. Entonces:

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Por lo tanto:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n} = 1.$$

Las series pueden llegar a tener comportamientos extraños, como se ve con la siguiente serie

$$S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots,$$

como se verá más adelante la suma tienen el valor de  $S = \ln(2)$ , pero si se arreglan los términos de la manera siguiente:

$$S = 1 + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9}\right) + \left(\frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \frac{1}{13}\right) + \dots,$$

la cual contiene exactamente los mismos términos, aunque en orden diferente, la suma es ahora  $S = \frac{3}{2} \ln(2)$ .

A pesar de que las series pueden presentar estos comportamientos extraños, las series resultan muy buenas representaciones aproximadas de funciones, por ejemplo:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}. \quad (2.33)$$

La suma directa de una serie infinita no es un método práctico para estudiar su convergencia, por ejemplo, la serie

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\ln k}{k^2},$$

converge al valor 0,937548..., pero para obtener estos primeros cinco decimales se tendría que sumar unos  $10^7$  términos!

```
> restart;
> Sum(ln(k)/k^2,k=2..10)= evalf(sum(ln(k)/k^2,k=2..10));
> Sum(ln(k)/k^2,k=2..100)= evalf(sum(ln(k)/k^2,k=2..100));
> Sum(ln(k)/k^2,k=2..1000)= evalf(sum(ln(k)/k^2,k=2..1000));
> Sum(ln(k)/k^2,k=2..10000)= evalf(sum(ln(k)/k^2,k=2..10000));
> Sum(ln(k)/k^2,k=2..100000)= evalf(sum(ln(k)/k^2,k=2..100000));
```

Es necesario entonces desarrollar algunos criterios que nos permitan saber si una serie puede llegar a converger o no.

## Ejercicios

1. Muestre que  $s_N = 1 + 2^3 + 3^3 + \dots + N^3 = \sum_{n=1}^N n^3 = \left(\sum_{n=1}^N n\right)^2 = \frac{N^2(N+1)^2}{4}$ .
2. Demuestre que para  $|x| < 1$ 
  - a)  $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$
  - b)  $\sum_{n=1}^{\infty} n^2x^n = \frac{x^2+x}{(1-x)^3}$
  - c)  $\sum_{n=1}^{\infty} n^3x^n = \frac{x^3+4x^2+x}{(1-x)^4}$
  - d)  $\sum_{n=1}^{\infty} n^4x^n = \frac{x^4+11x^3+11x^2+x}{(1-x)^5}$

## 2.7. Criterios de Convergencia

La pregunta que nos planteamos es la siguiente: Si hacemos que  $N \rightarrow \infty$  entonces ¿la suma  $\sum_{k=1}^N a_k$ , tiene un límite? Existen algunas formas de averiguarlo, a pesar de que sólo podremos calcular la suma de algunas series. En la mayoría de los casos nos será imposible y nos tendremos que conformar con saber si convergen o no, o peor aún, si una suma parcial converge sin poder calcular el valor de esa suma. Los términos de una serie pueden ser positivos, negativos o números complejos y las series pueden converger (decrecer o crecer hacia un valor finito) diverger (incrementar o decrecer indefinidamente) u oscilar, Existen una serie de criterios y teoremas de aplicación general que expondremos a continuación.

### 2.7.1. Convergencia Absoluta o Condicional

Para estudiar la convergencia de una serie infinita dada, i.e.,  $\sum a_i$  veremos que siempre podremos asociarle otra de la forma  $\sum |a_i|$ , es decir la serie de valores absolutos, con lo cual garantizamos la positividad (y que sean números reales) de los términos de la serie. Si la serie de los valores absolutos  $\sum |a_i|$  converge, entonces también convergerá la serie original  $\sum a_i$  y diremos que esa serie es *absolutamente convergente*. Sin embargo si la serie de valores absolutos diverge, no podremos decir que  $\sum a_i$  converja. De hecho si converge diremos que es *condicionalmente convergente* y, con un rearrreglo de sus términos podrá converger, diverger u oscilar.

**Teorema:** Si  $\sum |a_n|$  converge, entonces también converge  $\sum a_n$  y se tiene que

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

Para una serie de términos positivos el criterio de convergencia más intuitivo (necesario pero no suficiente) es que en límite cuando  $n \rightarrow \infty$  el término n-ésimo tienda a cero. Con lo cual tenemos que si esta condición no se satisface, la serie diverge.

**Teorema:** Si la serie  $\sum a_n$  converge, el término n-ésimo tiende a cero, esto significa que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

Notemos que para la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$  se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0,$$

sin embargo, como ya vimos anteriormente, esta serie diverge. Esto significa que el teorema suministra una condición suficiente para que exista la divergencia de la serie, es decir, si para el término  $n$ -ésimo de la serie  $a_n$  no se cumple que tiende a cero cuando  $n \rightarrow \infty$ , entonces la serie  $\sum a_n$  diverge.

Una serie que es convergente pero que no es absolutamente convergente es la siguiente

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \ln(2)$$

porque ya vimos que la serie de los valores absolutos asociada a la serie anterior es

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

la cual diverge.

### 2.7.2. Criterio de Comparación

En segundo lugar de simplicidad está el criterio de comparación entre un par de series de términos positivos. Si conocemos el comportamiento de una de ellas comparamos el de la otra. Esto es, suponga que consideramos dos series: una de prueba  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  y una serie conocida y convergente (o divergente)  $\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{a}_n$ , entonces

$$\text{Si } \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{a}_n \text{ converge y } \forall n \text{ se tiene que } \tilde{a}_n \geq a_n \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{a}_n \geq \sum_{n=0}^{\infty} a_n \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ converge}$$

Por otro lado

$$\text{Si } \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{a}_n \text{ diverge y } \forall n \text{ se tiene que } 0 \leq \tilde{a}_n \leq a_n \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{a}_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} a_n \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ diverge}$$

**Ejemplo** Para ilustrar esta estrategia consideremos las siguientes series

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{25} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n! + 1}$$

En ese caso compararnos con una serie conocida

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots = 1 + \underbrace{1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots}_e = 1 + e$$

y es claro que la serie indicada no es otra cosa que  $e$ , con lo cual la serie claramente converge y su suma es  $1 + e$ .

### 2.7.3. Criterio de la Raíz

Dada una serie de términos positivos  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ , el criterio de la raíz (o también de la raíz de Cauchy) puede resumirse en el siguiente par de afirmaciones. Sí:

$$(a_n)^{\frac{1}{n}} \leq \rho < 1 \quad \text{para un } n \text{ suficientemente grande y } \rho \text{ independiente de } n \Rightarrow \text{converge}$$

$$(a_n)^{\frac{1}{n}} > 1 \quad \text{para un } n \text{ suficientemente grande y } \rho \text{ independiente de } n \Rightarrow \text{diverge}$$

$$(a_n)^{\frac{1}{n}} = 1 \quad \text{para un } n \text{ suficientemente grande y } \rho \text{ independiente de } n \Rightarrow (?)$$

Otra forma, más compacta de expresarlo sería

$$\text{Sí } \rho = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^{\frac{1}{n}} \text{ entonces: } \begin{cases} \rho < 1 \implies \text{converge} \\ \rho > 1 \implies \text{diverge} \\ \rho = 1 \implies (?) \end{cases}$$

Es fácil ver que si utilizamos el criterio de comparación, entonces

$$(a_n)^{\frac{1}{n}} \leq \rho \implies a_n \leq \rho^n \implies \begin{cases} \text{cuando } \rho < 1 \text{ la serie converge} \\ \text{cuando } \rho \geq 1 \text{ la serie diverge} \end{cases}$$

**Ejemplo** Dada la siguiente serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{n}{n+1} \right]^{n^2},$$

por lo tanto:

$$(a_n)^{\frac{1}{n}} = \left[ \frac{n}{n+1} \right]^n = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \implies \rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} < 1.$$

La serie converge.

### 2.7.4. Criterio de d'Alembert

Dada una serie de términos positivos  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ , el criterio de d'Alembert<sup>5</sup> o también llamado criterio del cociente, compara el valor relativo de un término de la serie con el que le precede. Este criterio se resume también fácilmente

$$\text{Si } \rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \text{ entonces: } \begin{cases} \rho < 1 \implies \text{converge} \\ \rho > 1 \implies \text{diverge} \\ \rho = 1 \implies \text{indeterminado} \end{cases}$$

Nótese que si

$$\rho < 1 \implies \rho < x < 1 \implies \frac{a_{n+1}}{a_n} < x \implies a_{n+1} = a_n x$$

Entonces para un  $N < n$ , pero también suficientemente grande, tendremos que los términos de la serie a partir de ese  $N$  serán

$$a_N + a_{N+1} + a_{N+2} + a_{N+3} \dots = a_N + x a_N + x^2 a_N + x^3 a_N \dots = a_N (1 + x + x^2 + x^3 + x^4 \dots)$$

y que no es otra cosa que una serie geométrica con razón  $x < 1$  y por consiguiente converge. Es claro que un argumento similar se puede utilizar para probar la divergencia.

**Ejemplo** Un ejemplo inmediato lo constituye la serie

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{3}{8} + \frac{1}{4} + \frac{5}{32} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} \implies \frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}} = \frac{1}{2} \frac{n+1}{n} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right),$$

<sup>5</sup>Jean Le Rond d'Alembert París, Francia 1717 - 1783. Matemático francés pionero en el estudio de las ecuaciones diferenciales y su utilización en la Física, en particular en el estudio de los fluidos. Más detalles en [http://es.wikipedia.org/wiki/Jean\\_Le\\_Rond\\_d'Alembert](http://es.wikipedia.org/wiki/Jean_Le_Rond_d'Alembert)

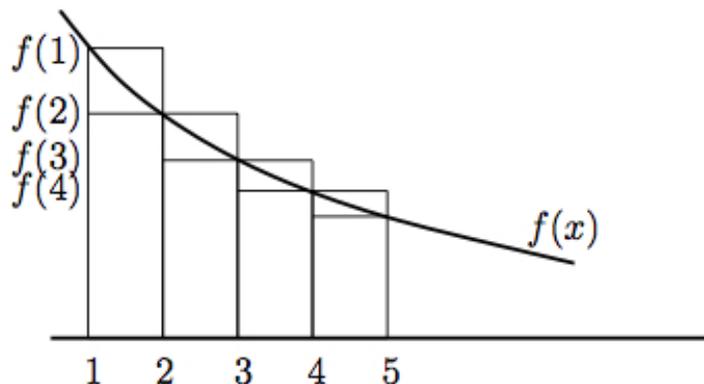


Figura 2.3: El criterio de la integral

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{n} \right) \right] = \frac{1}{2} < 1,$$

con lo cual tiene que converger.

### 2.7.5. Criterio de la Integral de Maclaurin

El criterio de la Integral de Maclaurin<sup>6</sup> es otro criterio de comparación, pero esta vez se compara la serie con una integral. Así supondremos que existe una función  $f(x)$  continua y monótonamente decreciente para un valor de  $x \geq x_0$  y que, adicionalmente, se cumple que para algún valor entero  $x = n$  el valor de la función es igual a un término de la serie. Esto es  $f(n) = a_n$ . Entonces se tendrá que si el límite  $\lim_{N \rightarrow \infty} \int_1^N dx f(x)$  existe y es finito, entonces  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  converge. Por el contrario si el límite no existe o es infinito, entonces diverge.

La idea de este criterio es comparar la integral de  $f(x)$  (es decir, el área bajo la curva) con la suma de rectángulos que representa la serie. Entonces, la suma parcial

$$s_i = \sum_{n=1}^i a_n \equiv \sum_{n=1}^i f(n).$$

Pero:

$$\left. \begin{array}{l} s_i > \int_1^{i+1} dx f(x) \\ s_i - a_1 < \int_1^i dx f(x) \end{array} \right\} \Rightarrow \int_1^{i+1} dx f(x) \leq s_i \leq \int_1^i dx f(x) + a_1$$

donde  $a_1 = f(1)$ , con lo cual, al hacer  $i \rightarrow \infty$  tendremos que si el límite de la integral existe, entonces la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  converge.

$$\int_1^{\infty} dx f(x) \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \int_1^{\infty} dx f(x) + a_1$$

<sup>6</sup>Colin Maclaurin 1698, Argyllshire, Escocia - 1746 Edinburgo, Escocia. Matemático escocés quien escribió el *Tratado de las Fluxiones* el primer tratado que expuso de una manera sistemática y rigurosa el cálculo diferencial ideado por Newton. Este tratado fue como respuesta a la crítica de Berkeley sobre la falta de rigurosidad de los métodos Newton.

### Ejemplos

1. Un ejemplo inmediato podría ser determinar si la siguiente serie converge

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(n - \frac{3}{2}\right)^2} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{\left(x - \frac{3}{2}\right)^2} \Rightarrow \lim_{N \rightarrow \infty} \int^N dx \frac{1}{\left(x - \frac{3}{2}\right)^2} \Rightarrow \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{-1}{N - \frac{3}{2}}\right) = 0$$

con lo cual claramente converge.

Este criterio es muy útil para acotar (entre un ínfimo y un supremo) el residuo de una determinada serie. Vale decir

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^N a_n + \underbrace{\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n}_{\text{Residuo}} \Rightarrow \int_{N+1}^{\infty} dx f(x) \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n \leq \int_{N+1}^{\infty} dx f(x) + a_{N+1}$$

2. Comprobar que la función Zeta de Riemann,  $\zeta(p) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-p}$ , efectivamente converge. En este caso  $f(x) = x^{-p}$ , entonces

$$\zeta(p) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-p} \Rightarrow \int_1^{\infty} dx x^{-p} = \begin{cases} \frac{x^{-p+1}}{-p+1} \Big|_1^{\infty} & \text{Para } p \neq 1 \\ \ln x \Big|_1^{\infty} & \text{Para } p = 1 \end{cases}$$

y es claro que para  $p > 1$  el límite existe y es finito, por lo tanto, la función Zeta de Riemann,  $\zeta(p) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-p}$ , converge para  $p > 1$ .

```
> restart:
> assume(p>1):
> Limit(Int((x)^(-p),x=1..infinity),x=infinity)=
limit(int((x)^(-p),x=1..infinity),x=infinity);
> assume(p<=1):
> Limit(Int((x)^(-p),x=1..infinity),x=infinity)=
limit(int((x)^(-p),x=1..infinity),x=infinity);
```

### 2.7.6. Series alternantes y convergencia condicional

Hasta ahora todos los criterios que analizamos eran para una serie de términos positivos, por lo cual todos esos criterios nos llevaban al concepto de series absolutamente convergente. Esto es, si  $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$  converge, entonces  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  también converge. Sin embargo, muchas veces nos tendremos que conformar con que una serie sea simplemente convergente y no requerir que sea absolutamente convergente. Este es el caso de las series alternantes. Series en las cuales se alternan términos positivos y negativos:

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + \dots + a_{2n-1} - a_{2n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} (a_n) \quad \text{con } a_n \geq 0$$

Entonces, si la serie es monótona decreciente para un  $n$  suficientemente grande tenemos lo que se denomina el Criterio de Leibniz:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} (a_n) \text{ converge, si: } \begin{cases} a_n > a_{n-1} & \forall n > N \\ & \wedge \\ a_n \rightarrow 0 & \text{cuando } n \rightarrow \infty \end{cases}$$

De otro modo la serie oscilará.

Estas condiciones son fáciles de ver si reorganizamos la serie de los primeros  $2m$  términos, a partir de un determinado  $N$  par y  $N > n$ , entonces

$$s_{2m} = (a_N - a_{N-1}) + (a_{N-2} - a_{N-3}) + \dots + (a_{N+2m-2} - a_{N+2m-1})$$

donde todos los paréntesis son positivos, con lo cual  $s_{2m} > 0$  y se incrementa al incrementar  $m$ . Ahora bien, si reorganizamos la serie tendremos que

$$s_{2m} = a_N - (a_{N-1} - a_{N-2}) - (a_{N-3} - a_{N-4}) + \dots - (a_{N+2m-1} - a_{N+2m-2}) - a_{N+2m-1}$$

donde, otra vez los paréntesis son positivos y es inmediato comprobar que entonces  $s_{2m} < a_n$  para todo  $m$ .

Como  $a_n \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$ , la serie alternante necesariamente converge.

La series alternantes ya eran conocidas desde hace mucho tiempo, como por ejemplo la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \left( \frac{x^n}{n} \right) + \dots$$

Esta serie converge y su suma es  $\ln(1+x)$  para  $-1 < x \leq 1$ . Para  $x$  positivo es una serie alternante y en el caso particular de  $x = 1$  se tiene:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \left( \frac{1}{n} \right) + \dots = \ln(2)$$

Otra relación interesante es:

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + (-1)^{n-1} \left( \frac{1}{2n-1} \right) + \dots = \frac{\pi}{4}$$

**Teorema:** Si  $\{a_n\}$  es una sucesión monótona decreciente con límite igual a cero, la serie alternante

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n,$$

converge.

Si  $S$  es su suma y  $s_n$  su suma parcial  $n$ -ésima, se tiene que:

$$0 < (-1)^n (S - s_n) < a_{n+1} \quad \text{para } n \geq 1.$$

**Ejemplo** Estudiemos la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left( \frac{1}{n} \right) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots,$$

Sabemos que  $1/n$  es una sucesión monótona decreciente y que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0,$$

por lo tanto, de acuerdo al teorema anterior la serie converge; como ya hemos visto.

**Ejemplo** Sea

$$a_{2n-1} = \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad a_{2n} = \int_n^{n+1} \frac{dx}{x} \quad \text{para} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Por otro lado, se tiene también que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0,$$

y que  $a_n$  es monótona decreciente, por lo tanto la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n,$$

converge.

La suma parcial  $(2n - 1)$  se puede escribir de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} s_{2n-1} &= 1 - \int_1^2 \frac{dx}{x} + \frac{1}{2} - \int_2^3 \frac{dx}{x} + \dots + \frac{1}{n-1} - \int_{n-1}^n \frac{dx}{x} + \frac{1}{n} = \\ s_{2n-1} &= 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \int_1^n \frac{dx}{x} = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln(n). \end{aligned}$$

y obtenemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln(n) \right) = \gamma,$$

donde  $\gamma$  es la constante de Euler,  $\gamma \approx 0,5772156649$ .

## Ejercicios

1. Encuentre el radio de convergencia de las siguientes series

a)

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n$$

b)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} x^n$$

c)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n}{n^{3/2}} x^n$$

d)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^4}{5^n} x^n$$

e)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{[3 + (-1)^n]^n}$$

f)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^{n+(-1)^n}}$$

## 2.8. Series de funciones

La idea de series se puede ampliar al permitir que sus términos sean función de alguna variable (una o varias), esto es  $a_n = a_n(x)$ . Esta extensión del concepto de serie, trae como consecuencia que ahora las sumas parciales dependen de  $x$

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k(x) = a_0(x) + a_1(x) + a_2(x) + \dots,$$

con lo cual, si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(x),$$

entonces, el comportamiento de la serie también dependerá de la variable.

La convergencia de la serie podrá ser posible para algunos valores de  $x$  y no para otros. El punto central con las series de funciones  $f(x)$  complicadas es la de tratar de construir funciones como una serie de términos,  $a_k(x)$ , más simples. Así, esas sumas parciales  $f_n(x)$  constituirán la función deseada

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k(x).$$

Estaremos interesados en aquellas funciones a las cuales converjan las sumas parciales de una serie. Para fijar conceptos, comenzaremos por las series de funciones más comunes: Las Series de Potencias.

### 2.8.1. Series de Potencias

Asociaremos una serie de potencias  $a_n = c_n x^n$  a un polinomio de grado infinito.

$$P(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \text{ o también } P(x - x_0) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n.$$

Esta asociación tiene la ventaja de permitirnos intuir algunos comportamientos de la serie para algunos valores de  $x$ . Los coeficientes  $c_n$  son números independientes de  $x$ . Pero, más aún, estas series pueden ser series de potencias de número complejos. Vale decir,  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$  con  $z = x + iy$ .

### 2.8.2. Convergencia de una serie de potencias

Se pueden utilizar todos los criterios que hemos desarrollado anteriormente. Así una serie de potencias  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$  converge en un punto  $x_0$  si el límite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

existe, para  $x = x_0$ , para todo  $x$  o para algunos  $x$ .

Una serie de potencias  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$  convergerá absolutamente sí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^n |c_j (x - x_0)^j| = \rho, \quad \text{existe.}$$

También se cumplirá el criterio de convergencia absoluta. Esto es, si  $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n (x - x_0)^n|$  converge, entonces,  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$  converge, pero el inverso no es siempre verdad.

Los criterios más populares para evaluar la convergencia, se seguirán cumpliendo. Así el criterio de d'Alembert y el de la raíz de Cauchy se podrán reescribir como:

$$\rho(x) = \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1} (x - x_0)^{n+1}}{c_n (x - x_0)^n} \right| & \Rightarrow \quad \rho(x) < 1 \quad \Rightarrow \quad \text{converge} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c_n (x - x_0)^n} & \Rightarrow \quad \rho(x) > 1 \quad \Rightarrow \quad \text{diverge} \end{cases}$$

Sólo que ahora es bueno enfatizar que  $\rho = \rho(x)$  dependerá de la variable. Llamaremos, de ahora en adelante a este límite el *radio o entorno de convergencia*, el cual delimitará los valores de  $x$  para que la serie de potencias converja.

### Ejemplos

1. Consideremos la siguiente serie

$$1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$

por lo tanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x}{n+1} \right| = 0,$$

es decir,

$$\rho(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0,$$

con lo cual la serie converge para todo valor de  $x$ .

2. Otro caso ocurre cuando consideramos la siguiente serie de potencias:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n (x-2)^n = x-2 - 2(x-2)^2 + 3(x-2)^3 - 4(x-2)^4 + \dots,$$

por lo tanto:

$$\rho(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^{n+2} (n+1) (x-2)^{n+1}}{(-1)^{n+1} n (x-2)^n} \right| = |x-2| \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n+1}{n} \right| = |x-2|$$

lo que implica que la serie:

$$\text{converge si: } |x-2| < 1 \Rightarrow 1 < x < 3 \quad \text{y} \quad \text{diverge si: } |x-2| > 1.$$

Es decir, la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n (x-2)^n$  convergerá únicamente para  $1 < x < 3$ . Para otros valores de  $x$ , diverge.

Para puntualizar:

- Si una serie converge en  $x = x_1$ , convergerá absolutamente para  $|x - x_0| < |x_1 - x_0|$  y divergerá para  $|x - x_0| > |x_1 - x_0|$ .
- Se llama radio de convergencia,  $\rho = \rho(x)$  a aquella cantidad tal que la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$  converge para  $|x - x_0| < \rho$  y diverge para  $|x - x_0| > \rho$ .

Una serie  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$  que converge únicamente para  $x = x_0$  tendrá un radio de convergencia  $\rho = 0$ , mientras que una que converja para todo  $x$  tendrá un radio de convergencia  $\rho = \infty$ .

### 2.8.3. Cobergencia uniforme

Se puede rephrasing el criterio de convergencia de Cauchy que vimos anteriormente. Para cualquier valor de  $\epsilon > 0$ , tan pequeño como uno quiera, siempre existirá un número  $N$  **independiente de  $x$** , con  $a \leq x \leq b$ , tal que:

$$\text{si } S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \Rightarrow |S(x) - s_n(x)| < \epsilon \quad \forall x \in [a, b] \wedge n \geq N.$$

Con ello es inmediato indentificar el error que se comete cuando se corta la serie en un  $N$  suficientemente grande

$$S(x) = \underbrace{\sum_{n=1}^N a_n(x)}_{s_n(x)} + \underbrace{\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n(x)}_{\approx \epsilon}$$

Hay que resaltar el hecho de que las suma de funciones continuas  $a_n(x)$  no necesariamente habrá de ser continua, el concepto de convergencia uniforme busca garantizar que esa suma de funciones continuas también sea continua.

Recordemos la idea de continuidad de una función. Una función será continua si sus límites por la derecha y por izquierda coinciden

$$\lim_{t \rightarrow x^\pm} f(t) = f(x)$$

Por otro lado, a partir del hecho de que

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

es valido preguntarse si el límite de la sucesión de sumas parciales es continua, esto es:

$$\lim_{t \rightarrow x^\pm} \left[ \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right] \stackrel{?}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \lim_{t \rightarrow x^\pm} f_n(x) \right].$$

Es decir, al suponer que la suma de términos continuos tiende a una función continua estamos suponiendo que podemos intercambiar los límites, pero eso no es siempre cierto. Consideremos el caso (extremo)

$$f_n = n^2 x (1 - x^2)^n \quad \text{con: } 0 \leq x \leq 1 \quad \text{y} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

entonces:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n &= 0 \quad \Rightarrow \quad \int_0^1 dx \left[ \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right] = 0 \\ \int_0^1 dx f_n(x) &= \frac{n^2}{2(n+1)} \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 dx f_n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Claramente no se pueden intercambiar los límites.

**Ejemplo** Sea la serie

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x) = x^2 + \frac{x^2}{1+x^2} + \frac{x^2}{(1+x^2)^2} + \frac{x^2}{(1+x^2)^3} + \dots + \frac{x^2}{(1+x^2)^k} + \dots,$$

de manera que

$$a_k(x) = \frac{x^2}{(1+x^2)^k}.$$

Como

$$\frac{a_{n+1}(x)}{a_n(x)} = \frac{1}{1+x^2} < 1 \quad \forall \quad x \neq 0,$$

la serie es absolutamente convergente  $\forall x (x \neq 0)$ .

Sin embargo, tenemos que  $f(0) = 0$ . El término n-ésimo para la suma parcial es

$$f_n(x) = x^2 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(1+x^2)^k} = 1 + x^2 - \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}} = 1 + x^2 - \frac{1+x^2}{(1+x^2)^n},$$

como  $1+x^2 > 1$ , entonces:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 1 + x^2, \quad x \neq 0.$$

pero hemos establecido que  $f(0) = 0$  de manera que  $f(x)$  no es continua.

**Ejemplo** Dada la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{[(n-1)x+1][nx+1]},$$

cuya suma n-ésima parcial es

$$s_n(x) = \frac{nx}{nx+1}.$$

La función  $s_n(x)$  es una función continua de  $x \forall 0 \leq x \leq 1$ , y para todo  $n$ . Por otro lado,

$$\begin{aligned} S(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = 0, \text{ si } x = 0 \\ S(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = 1, \text{ si } x \neq 0. \end{aligned}$$

Existe una discontinuidad en  $x = 0$  para  $S(x)$  y por lo tanto la condición (2.8.3) no se cumplirá.

Para el caso de series de funciones, existen un par de criterios que identifican la convergencia uniforme. El criterio Mayorante de Weierstrass<sup>7</sup> y el criterio de Abel<sup>8</sup>. Estos criterios desarrollan la noción de convergencia uniforme la cual es necesaria para asegurar el intercambio en los límites.

### 2.8.4. Criterio Mayorante de Weierstrass

La idea de convergencia uniforme se introduce para garantizar que la sumas infinitas de un conjunto de funciones sea continua.

Una condición suficiente, pero no necesaria, para que la serie

$$a_1(x) + a_2(x) + a_3(x) + \dots + a_n(x) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$$

sea uniformemente convergente es dada por la condición de Weierstrass:

Si encontramos una serie convergente de números positivos

$$M = \sum_{j=1}^{\infty} M_j \quad \text{con } M_i \geq |a_i(x)| \quad \forall x \in [a, b] \quad \text{entonces la serie } \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$$

es **uniformemente** convergente.

La demostración se obtiene a partir de la definición misma de convergencia. Si  $\sum_{j=1}^{\infty} M_j$  converge, entonces para  $n+1 \geq N$  se tiene

$$\sum_{j=n+1}^{\infty} M_j < \epsilon \text{ y como } |a_i(x)| \leq M_i \Rightarrow \sum_{j=n+1}^{\infty} |a_i(x)| < \epsilon \Rightarrow |S(x) - s_n(x)| \equiv \sum_{j=n+1}^{\infty} |a_i(x)| < \epsilon$$

con la cual la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$  será uniformemente convergente para todo  $x \in [a, b]$ .

Ahora bien, como consideramos los  $M_i \geq 0$ . La serie en cuestión también será absolutamente convergente. Otra vez, los criterios de convergencia absoluta y, en este caso, de convergencia uniforme, no son consecuencia uno del otro, ni están relacionados.

<sup>7</sup>**Karl Theodor Wilhelm Weierstrass** (1815 - 1897). Matemático Alemán con importantes contribuciones al análisis complejo mediante la utilización de series.

<sup>8</sup>**Niels Henrik Abel** (1802-1829). Matemático Noruego. Su primera mayor aportación fue la prueba de la imposibilidad de resolución algebraica de la ecuación cuántica mediante radicales.

Las series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x^2} \quad \text{para } -\infty < x < \infty \quad \wedge \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \quad \text{para } 0 \leq x \leq 1$$

convergen uniformemente pero NO absolutamente. Sin embargo, en el intervalo  $0 \leq x \leq 1$  la serie  $\sum_{j=0}^{\infty} (1-x)x^j$  converge absolutamente pero no uniformemente, por cuanto tiene una discontinuidad. Se puede demostrar que

$$\sum_{j=0}^{\infty} (1-x)x^j = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$$

con lo cual se puede concluir que una serie arbitraria  $f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j(x)$  no podrá converger uniformemente en intervalos en los cuales la función  $f(x)$  sea discontinua.

**Ejemplo** La serie

$$f(x) = \cos(x) + \frac{1}{2^2} \cos^2(x) + \frac{1}{3^2} \cos^3(x) + \dots$$

es uniformemente convergente, porque al tomar  $M_k = 1/k^2$  la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2},$$

converge a  $\pi^2/6$ .

### 2.8.5. Criterio de Abel

El criterio de Abel se puede resumir de la siguiente manera. Sí

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i(x) \quad \wedge \quad a_i(x) = c_i(x)f_i(x),$$

donde  $\sum_{i=0}^{\infty} c_i(x)$  converge, es decir:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n c_i(x) = S,$$

entonces la serie converge uniformemente en  $[a, b]$ . Para que se cumpla el criterio de Abel,  $f_n(x)$  tiene que estar acotada ( $0 \leq f_n \leq M \forall n$ ) y tiene que ser monótonamente decreciente en el intervalo en el cual esté definida,  $f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$  con  $x \in [a, b]$ .

En resumen, si la serie

$$f(x) = a_1(x) + a_2(x) + a_3(x) + \dots + a_n(x) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$$

es uniformemente convergente para  $a \leq x \leq b$ , entonces es posible integrar y diferenciar término por término.

$$\begin{aligned} \frac{df}{dx} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{da_k}{dx} \\ \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\alpha}^{\beta} a_k(x) dx, \end{aligned}$$

donde  $a \leq \alpha < \beta \leq b$ .

La convergencia uniforme no implica convergencia absoluta y convergencia absoluta no implica convergencia uniforme, como se vió anteriormente, la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n},$$

es absolutamente convergente pero no uniformemente convergente cerca de  $x = 0$ .

Las series absolutamente convergentes tienen la propiedad de comportarse como las series finitas, los términos pueden ser multiplicados e intercambiado el orden de la suma. Las series uniformemente convergentes se comportan como las series finitas donde la serie es continua si cada término de la serie también lo es.

La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n+x^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{2+x^2} + \frac{1}{3+x^2} + \dots$$

es únicamente condicionalmente convergente, pero, es también uniformemente convergente.

## Ejercicios

1. Demuestre que la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x^2},$$

es uniformemente y condicionalmente convergente.

2. Demuestre que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+x^2}{n^2},$$

converge uniformemente, pero no absolutamente.

3. Determine el radio de convergencia de la serie

$$\frac{x}{a+1} + \frac{x^2}{a+\sqrt{2}} + \frac{x^3}{a+\sqrt{3}} + \dots + \frac{x^n}{a+\sqrt{n}} + \dots$$

donde  $a$  es un número real y positivo. Determine si la serie es o no uniformemente convergente.

4. Considere la siguiente sucesión

$$f_n(x) = \frac{\text{sen}(nx)}{\sqrt{n}}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

demuestre que:

$$\frac{d}{dx} \left[ \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right] \neq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d}{dx} f_n(x),$$

5. Discuta la convergencia de las siguientes series

a)

$$1 - \frac{2}{3} + \frac{3}{5} - \frac{4}{7} + \dots$$

b)

$$\left(a - \frac{b}{2}\right) + \left(\frac{a}{3} - \frac{b}{4}\right) + \dots + \left(\frac{a}{2n-1} - \frac{b}{2n}\right) + \dots$$

donde  $a$  y  $b$  son constantes positivas.

6. Utilizando fracciones parciales, demuestre que

a)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)(k+3)(k+5)} = \frac{23}{480}$$

b)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3k-2}{k(k+1)(k+2)} = 1.$$

## 2.9. Álgebra de series de potencias

El álgebra elemental de series se puede reconsiderar a la luz de las series de potencias. De esta forma recordamos que los índices en las series son mudos

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n n (x-x_0)^{n-1} = \sum_{j=1}^{\infty} a_j j (x-x_0)^{j-1} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1} (k+1) (x-x_0)^k$$

en la última sumatoria hemos hecho  $k = j - 1$ , por lo cual  $j = k + 1$ .

Las series se igualan

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-x_0)^n &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n n (x-x_0)^{n-1} \\ \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-x_0)^n &= \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1} (k+1) (x-x_0)^k = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} (n+1) (x-x_0)^n \end{aligned}$$

por lo cual

$$b_n = a_{n+1} (n+1).$$

Si la igualdad hubiera sido

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n (x-x_0)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} (n+1) (x-x_0)^n \implies a_{n+1} = \frac{a_n}{(n+1)}$$

Las series se suman

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n + \sum_{k=2}^{\infty} b_k (x-x_0)^k = a_0 + a_1 (x-x_0) + \sum_{n=2}^{\infty} (a_n + b_n) (x-x_0)^n$$

o también

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n + \sum_{k=0}^{\infty} b_{k+2} (x-x_0)^{k+2} &= a_0 + a_1 (x-x_0) + \sum_{n=2}^{\infty} (a_n + b_n) (x-x_0)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + c_{n-2}) (x-x_0)^n, \end{aligned}$$

y en este último caso  $c_{-2} = c_{-1} = 0$  y  $c_i = b_{i+2}$ . Nótese como en los dos ejemplos anteriores hemos hecho coincidir los dos índices de la sumatoria desde el comienzo.

La series también se multiplican, esto es

$$\left[ \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \right] \left[ \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-x_0)^n \right] = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n$$

con

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \dots + a_j b_{n-j} + \dots + a_{n-2} b_2 + a_{n-1} b_1 + a_n b_0$$

Si alguna de las series de potencias es absolutamente convergente, entonces su multiplicación con otra, será absolutamente convergente.

Pero también las series de potencias se ¡invierten! y para ello utilizamos todo lo visto anteriormente veamos. Supongamos que se tiene una serie del tipo

$$y - y_0 = a_0 + a_1 (x-x_0) + a_2 (x-x_0)^2 + \dots + a_n (x-x_0)^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$$

Es decir tenemos  $y - y_0$  expresado en términos de una serie de potencias de  $(x-x_0)^n$  entonces, igual podremos plantearnos invertir el proceso, vale decir, expresar  $(x-x_0)$  en términos de potencias  $(y-y_0)^n$ . Esto es

$$x - x_0 = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (y - y_0)^n \quad \Rightarrow \quad x - x_0 = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \left[ \sum_{j=0}^{\infty} a_j (x - x_0)^j \right]^k$$

y al igualar términos con la misma potencia, despejamos los coeficientes  $b_n$  en términos de los  $a_n$ , de forma que

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{1}{a_1} \\ b_2 &= -\frac{a_2}{(a_1)^3} \\ b_3 &= \frac{2(a_2)^2 - a_1 a_3}{(a_1)^5} \\ b_4 &= \frac{5a_1 a_2 a_3 - a_1^2 a_4 - 5a_2^3}{(a_1)^7} \\ &\vdots = \quad \quad \quad \vdots \end{aligned}$$

Igualmente, si una serie  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n$  converge para un entorno  $-R \leq x \leq R$  entonces por el criterio de Mayorante de Weierstrass, convergerá absoluta y uniformemente para  $-S \leq x \leq S$  con  $0 \leq S \leq R$ . Más aún, el criterio de Abel nos garantiza las siguientes propiedades:

- Dado que todos los términos  $a_n(x) = c_n (x - x_0)^n$  son funciones continuas de  $x$  y  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$  converge uniformemente para un entorno  $-S \leq x \leq S$ , entonces la función  $f(x)$  es continua en el intervalo de convergencia.
- Si los términos  $a_n(x) = c_n (x - x_0)^n$  son funciones continuas de  $x$ , entonces la serie puede ser derivada término a término

$$\frac{d}{dx} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n \right] = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n (x - x_0)^{n-1}$$

(nótese como cambia el comienzo de la serie) y convergerá a

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n n (x - x_0)^{n-1} \rightarrow \frac{df(x)}{dx} \quad a_n(x) \wedge \frac{d}{dx} a_n(x) \text{ continuas} \wedge \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x),$$

converge uniformemente en  $[a, b]$ .

- De igual manera las series pueden ser integradas término a término

$$\int_a^b dx f(x) = \int_a^b dx \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b dx c_n (x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} (x - x_0)^{n+1}.$$

## 2.10. Serie de Taylor

Para los físicos el uso apropiado (y frecuente) de la serie Taylor facilita muchos cálculos. La idea detrás de este tipo de series es la de la aproximación de una determinada función por una serie de potencias en donde existe una forma sistemática de construir los coeficientes y, dependiendo de el número de términos que utilicemos en la serie, tendremos una idea de cuan aproximada es la serie y cuanto es el error que cometemos al desarrollar la serie hasta un determinado término. Así supondremos que  $f = f(x)$  es una función continua y continuamente diferenciable. Con lo cual, si denotamos  $\frac{df(x)}{dx} = f'(x)$ , entonces supondremos que  $f'(x), f''(x), f'''(x), \dots, f^{(n)}(x)$  están definidas en el intervalo  $[a, b]$ .

De cursos anteriores se sabe que:

$$\int_a^{a+h} dx f'(x) = f(a+h) - f(a) \Rightarrow f(a+h) = f(a) + \int_a^{a+h} dx f'(x) \Rightarrow f(a+h) \approx f(a) + hf'(a),$$

donde hemos supuesto que en intervalo  $[a, a+h]$  la función  $f'(x)$  es constante y tiene como valor  $f'(a)$ . Ahora bien, esto vale para todo  $x$  y para cualquier función, por lo tanto se cumple que:

$$\begin{aligned} f(x) &\approx f(a) + (x-a)f'(a), \\ f'(x) &\approx f'(a) + (x-a)f''(a), \\ f''(x) &\approx f''(a) + (x-a)f'''(a), \\ &\vdots \\ f^{(n-1)}(x) &\approx f^{(n-1)}(a) + (x-a)f^{(n)}(a). \end{aligned}$$

Con lo cual podemos construir

$$f(a+h) = f(a) + \int_a^{a+h} dx f'(x) \approx f(a) + \int_a^{a+h} dx [f'(a) + (x-a)f''(a)] \approx f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2} f''(a),$$

que no es otra cosa que una aproximación de segundo orden a  $f(a+h)$ . En general podemos construir

$$\begin{aligned} f(a+h) &= f(a) + \int_a^{a+h} dx f'(x) = f(a) + \int_a^{a+h} dx \left[ f'(a) + \int_a^{a+h} dx f''(x) \right] \\ &= f(a) + hf'(a) + \int_a^{a+h} dv \left[ \int_a^{a+h} dx f''(x) \right] \\ &= f(a) + hf'(a) + \int_a^{a+h} du \left( \int_a^{a+h} dv \left[ f''(a) + \int_a^{a+h} dx f'''(x) \right] \right) \\ &= f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2} f''(a) + \int_a^{a+h} du \left( \int_a^{a+h} dv \left[ \int_a^{a+h} dx f'''(x) \right] \right) \end{aligned}$$

y si repetimos ese procedimiento  $n$  veces, suponiendo que las derivadas de  $f(x)$  existan, tendremos la aproximación  $n-1$  a la función. Esto es

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + \frac{h^3}{3!} f'''(a) + \dots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + \mathcal{R}_n$$

y también es fácil convencerse por inspección que el residuo o el error que cometemos en la aproximación  $n-1$  viene dado por la integración enésima de la derivada enésima, vale decir

$$\mathcal{R}_n = \int_a^{a+h} du \int_a^{a+h} dv \underbrace{\dots}_{n \text{ veces}} \int_a^{a+h} dx f^{(n)}(x)$$

y por el Teorema del Valor medio

$$\int_a^{a+h} d\tau g(\tau) = hg(\xi) \Rightarrow \mathcal{R}_n = \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(\xi) \quad \text{con } a \leq \xi \leq a+h$$

Ahora bien, una elección astuta del parámetro  $h = x - a$  nos lleva a la conocida expresión de la serie de Taylor para una función de una variable

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \frac{(x-a)^3}{3!} f'''(a) + \dots + \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + \mathcal{R}_n$$

y el error vendrá dado por

$$\mathcal{R}_n = \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(\xi) \quad \text{con } a \leq \xi \leq a+h$$

así la expansión de Taylor especifica el valor de una función en un punto  $x$  en términos de el valor de la función y sus derivadas en un punto de referencia  $a$ . La expansión se hace en términos de potencias de la diferencia,  $(x-a)$ , entre el punto que se evalúa y el punto de referencia.

Algunas otras formas de expresar la serie de Taylor, serían

$$f(x+h) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n \frac{d^n}{dx^n}}{n!} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n \mathbb{D}^n}{n!} f(x) = e^{h\mathbb{D}} f(x) \quad \text{donde, } \mathbb{D} \equiv \frac{d}{dx}$$

Si el punto de referencia es  $a = 0$  tendremos la serie de Maclaurin

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f'''(0) + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(0) + \mathcal{R}_n$$

### 2.10.1. Algunas Series de Taylor

Un listado incompleto de las series de Taylor más utilizadas es

$$\begin{aligned}
 e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \quad \text{para } -\infty < x < \infty \\
 \text{sen}(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots \quad \text{para } -\infty < x < \infty \\
 \text{cos}(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} + \cdots \quad \text{para } -\infty < x < \infty \\
 \arctan(x) &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)} + \cdots \quad \text{para } -1 < x < 1 \\
 \ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \cdots \quad \text{para } -1 < x < 1 \\
 (1+x)^m &= 1 + mx + m(m-1)\frac{x^2}{2} + m(m-1)(m-2)\frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{m!}{n!(m-n)!}x^n + \cdots \quad \forall x
 \end{aligned}$$

Si tenemos una función y queremos determinar su serie de potencias, es posible que los cálculos se simplifiquen notablemente si utilizamos apropiadamente las series elementales anteriores, por ejemplo:

$$e^{\alpha x^2 + \beta x} = 1 + (\alpha x^2 + \beta x) + \frac{(\alpha x^2 + \beta x)^2}{2} + \frac{(\alpha x^2 + \beta x)^3}{3!} + \frac{(\alpha x^2 + \beta x)^4}{4!} + \cdots$$

desarrollando los términos binomiales

$$e^{\alpha x^2 + \beta x} = 1 + \beta x + \left(\alpha + \frac{1}{2}\beta^2\right)x^2 + \left(\beta\alpha + \frac{1}{6}\beta^3\right)x^3 + \left(\frac{1}{2}\alpha^2 + \frac{1}{2}\alpha\beta^2 + \frac{1}{24}\beta^4\right)x^4 + \cdots$$

Si se quiere hacer el desarrollo alrededor de un punto diferente de  $x_0 = 0$ , podemos completar cuadrados:

$$\begin{aligned}
 e^{\alpha x^2 + \beta x} &= e^{\alpha(x^2 + \beta x/\alpha)} = e^{\alpha(x^2 + \beta x/\alpha + \beta^2/4\alpha^2 - \beta^2/4\alpha^2)} = e^{\alpha(x^2 + \beta x/\alpha + \beta^2/4\alpha^2) - \beta^2/4\alpha} \\
 &= e^{\alpha(x + \beta/2\alpha)^2 - \beta^2/4\alpha} = e^{\alpha(x + \beta/2\alpha)^2} e^{-\beta^2/4\alpha} \\
 &= e^{-\beta^2/4\alpha} [1 + \alpha(x + \beta/2\alpha)^2 + \alpha^2(x + \beta/2\alpha)^4/2 + \cdots]
 \end{aligned}$$

y esta es la expansión en series de potencias alrededor del punto  $x_0 = -\beta/2\alpha$ .

### 2.10.2. La expansión binomial

Por su uso frecuente, consideremos el caso de la expansión binomial

$$\begin{aligned}
 (1+x)^m &= 1 + mx + m(m-1)\frac{x^2}{2} + m(m-1)(m-2)\frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m!}{n!(m-n)!}x^n, \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m}{n} x^n,
 \end{aligned}$$

donde el término  $\binom{m}{n}$  se denomina el coeficiente binomial y la serie termina cuando  $m = n$ . Ahora bien, escrito de la forma compacta se sugiere que el exponente  $m$  tendría que ser entero y positivo. Pero no es así.

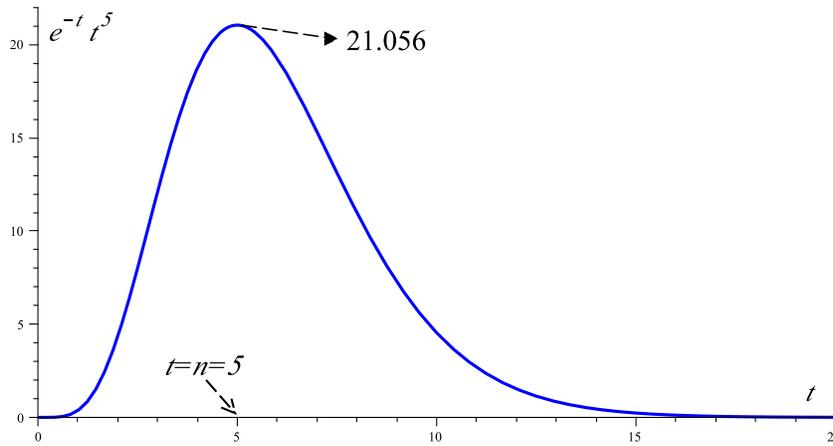


Figura 2.4: La función Gamma para  $n = 5$

La serie explícita no se restringe a valores enteros y positivos de  $m$ . Por ello, la forma compacta pero exacta de la expansión binomial es

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{x}{a}\right)^m &= 1 + m \left(\frac{x}{a}\right) + \frac{m(m-1)}{2} \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} \left(\frac{x}{a}\right)^3 + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1+m)}{\Gamma(1+n)\Gamma(1+m-n)} \left(\frac{x}{a}\right)^n. \end{aligned}$$

Donde hemos utilizado la función  $\Gamma(x)$  como la generalización del factorial para valores que no se restringen a enteros positivos. Nótese también que si el exponente es negativo,  $\left(1 + \frac{x}{a}\right)^m$  tiene una singularidad o un polo en  $x = -a$ .

Cuando  $n$  es un entero positivo tendremos

$$n! = \Gamma(1+n) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^n dt = \int_0^{\infty} e^{-t+n \ln(t)} dt$$

Esta integral, como se puede ver en la figura, nos recuerda la forma de una Gaussiana con un máximo en  $t = n$ . Al hacer una expansión alrededor de este punto

$$\begin{aligned} f(t) = -t + n \ln(t) &= f(n) + (t-n)f'(n) + (t-n)^2 f''(n)/2 + \dots \\ &= -n + n \ln(n) + 0 + (t-n)^2 (-n/n^2)/2 + \dots \end{aligned}$$

Si conservamos los términos hasta segundo orden, la integral puede ser aproximadamente igual a:

$$n! \sim \int_0^{\infty} e^{-n+n \ln(n)-(t-n)^2/2n} dt = n^n e^{-n} \int_0^{\infty} e^{-(t-n)^2/2n} dt$$

Para valores de  $n$  grandes, y esto es lo que se conoce como la aproximación de Stirling, se tiene:

$$n! \sim n^n e^{-n} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(t-n)^2/2n} dt = n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$$

Aquí, el símbolo  $\sim$  se refiere a un comportamiento asintótico de la función Gamma.

La gráfica mostrada en la Figura 1 pueden obtenerse de la siguiente manera:

```
> restart;
> n := 5;
> f := exp(-t)*t^n;
> Int(f,t=0..infinity)=int(f,t=0..infinity);
> GAMMA(5+1);
> plot(f,t=0..20);
> 'f(5)'=evalf(subs(t=5,f));
```

En la siguiente tabla se muestran, para algunos valores de  $n$ , el valor exacto del factorial, el valor por la fórmula de Stirling y el cociente entre estos dos valores. Se puede apreciar entonces lo buena que resulta tal aproximación.

$n$	$n!$	$n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$	$n!/(n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n})$
1	1	0,922	0,922
2	2	1,919	0,960
5	120	118,019	0,983
10	3628800	3598695,619	0,992

### 2.10.3. Taylor en varias variables

Sólo por razones de completitud, y para reforzar los conceptos de que es un desarrollo en series para una función alrededor de un determinado punto, escribiremos el desarrollo en series de Taylor para una función de dos variables  $f = f(x, y)$ . Esta es

$$\begin{aligned}
 f(x, y) &= f(a, b) + (x - a) f_x|_{ab} + (y - b) f_y|_{ab} \\
 &+ \frac{1}{2!} [(x - a)^2 f_{xx}|_{ab} + 2(x - a)(y - a) f_{xy}|_{ab} + (y - a)^2 f_{yy}|_{ab}] \\
 &+ \frac{1}{3!} [(x - a)^3 f_{xxx}|_{ab} + 3(x - a)^2(y - a) f_{xxy}|_{ab} + 3(x - a)(y - a)^2 f_{xyy}|_{ab} + (y - a)^3 f_{yyy}|_{ab}] \\
 &+ \dots
 \end{aligned}$$

De una manera más compacta

$$f(x^j + x_0^j) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (x^k \partial_k)^n f(x^m) \Big|_{x^m=x_0^m} \Rightarrow f(\vec{r} + \vec{a}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\vec{r} \cdot \vec{\nabla})^n f(x^m) \Big|_{\vec{r}=\vec{a}}$$

Dónde hemos utilizado la siguiente convención

$$f_x = \frac{\partial}{\partial x} = \partial_x; \quad f_y = \frac{\partial}{\partial y} = \partial_y; \quad f_{xx} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \partial_{xx}; \quad f_{xy} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} = \partial_{xy}; \quad f_{yy} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \partial_{yy}; \quad \dots$$

## Ejercicios

1. Utilice la siguiente definición

$$\tan^{-1} x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2},$$

expanda el integrando y luego integre término por término para derivar la siguiente expansión conocida como expansión de Gregory

$$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}.$$

Evalúe la serie para  $x = \frac{\pi}{4}$ .

2. Utilizando la definición

$$\operatorname{sen}^{-1} x = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+t^2}},$$

derive las expresiones siguientes

$$\operatorname{sen}^{-1} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \frac{x^{2n+1}}{2n+1},$$

$$\operatorname{sen}^{-1}(1-x) = \frac{\pi}{2} - \sqrt{2x} \left( 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1.3.5 \dots (2n-1)}{4^n (2n+1)n!} x^n \right).$$

3. Encuentre los primeros cinco términos, diferentes de cero, de la serie de Taylor, de la función

$$f(x) = \frac{1+x}{x^2} \left[ \frac{2+2x}{1+2x} - \frac{\ln(1+2x)}{x} \right].$$

Puedes usar el programa Maple!

## 2.11. Series y Espacios de Hilbert

Hemos dejado “suelos” algunos conceptos para los espacios de Hilbert *infinito*-dimensional. El primero de estos conceptos es que un vector  $|a\rangle \in E^\infty$  surge la combinación lineal de elementos de una base infinita  $\{|e_i\rangle\}$ , (de una serie) que converge al vector  $|a\rangle$  para un espacio donde también la norma del vector converge a un valor finito  $\|a\|^2 = \langle a|a\rangle$ . El segundo concepto fue la posibilidad de expresar un determinado vector (una función) como combinación lineal de una base (de dimensión infinita) de un espacio vectorial  $E^\infty$ . Efectivamente, esa combinación lineal (de dimensión infinita) habrá de converger a el valor de la función en ese punto. En su momento expresamos estos conceptos intuitivos y fácilmente demostrables para  $E^n$  (un espacio vectorial Euclideo de dimensión finita,  $n$ -dimensional) y sin mayores justificaciones hicimos el “salto” a  $E^\infty$  (un espacio Euclideo *infinito*-dimensional). Ahora, equipados con los conceptos de convergencia uniforme estamos en capacidad de explorar esas razones que antes eludimos. Ambos conceptos tienen que ver con la palabra *completitud*, la cual, como veremos, no tiene el mismo significado en cada una de las situaciones antes mencionadas, pero será complementario. En el primer caso la completitud de  $E^\infty$  se logra al poder expresar un vector como una combinación lineal de una base infinita que converja al valor del vector. En el segundo caso diremos que la base  $\{|e_i\rangle\}$  para  $E^\infty$  será completa si expande la totalidad de los vectores de  $E^\infty$ .

### 2.11.1. Completitud de $E^\infty$

La primera idea de completitud de un Espacio de Hilbert  $E^\infty$  tiene que ver con el hecho que, en ese espacio, donde la norma de un vector es finita  $\|a\|^2 = \langle a|a\rangle < \infty$ , la combinación lineal de los elementos de una base infinita,  $\{|e_i\rangle\}$ , converja al vector  $|a\rangle$ . Esto es  $a^i |e_i\rangle \xrightarrow{n \rightarrow \infty} |a\rangle$ .

Para el caso de  $E^n$  es inmediato que, dada una base (ortonormal, por ejemplo)

$$|a\rangle = a^i |e_i\rangle \Rightarrow \|a\|^2 = \langle a | a \rangle = a^i a_i < \infty \quad \text{con } i = 1, 2, 3, \dots, n$$

La norma es finita, por cuanto es la suma de términos finitos (las componentes del vector  $(a^1, a^2, a^3, \dots, a^n)$ ). Sin embargo, para el caso de  $E^\infty$  las componentes del vector serán función de las sumas parciales, esto es hasta dónde desarrollemos la serie y debemos demostrar que si

$$|a_n\rangle \Leftrightarrow (a_n^1, a_n^2, a_n^3, a_n^4, \dots, a_n^n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} |a_\infty\rangle \Leftrightarrow (a_\infty^1, a_\infty^2, a_\infty^3, \dots, a_\infty^j, \dots) \Rightarrow \| |a_\infty\rangle - |a_n\rangle \| < \epsilon$$

Es decir que, efectivamente, componente a componente el vector  $|a_n\rangle$  converja al vector  $|a\rangle$ . El criterio de convergencia de Cauchy, en este caso significa que: dadas dos sumas parciales (desarrollos parciales en una determinada base infinita  $\{|e_i\rangle\}$ )  $|a_n\rangle = a^i |e_i\rangle$  con  $i = 1, 2, \dots, n$  y  $|a_m\rangle = a^j |e_j\rangle$  con  $j = 1, 2, \dots, m$  entonces

$$\| |a_m\rangle - |a_n\rangle \| = \| |a_m\rangle - |a\rangle - |a_n\rangle + |a\rangle \| \leq \| |a\rangle - |a_n\rangle \| + \| |a\rangle - |a_m\rangle \| < \epsilon' + \epsilon'' \equiv \epsilon$$

con lo cual las diferencias en las sumas parciales serán siempre menor que un  $0 < \epsilon < 1$ . Nótese que hemos utilizado la desigualdad triangular  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ , y esa misma desigualdad triangular nos garantiza que

$$|a_n^j - a_m^j|^2 \leq \sum_{j=1}^{\infty} |a_n^j - a_m^j|^2 \equiv \| |a_m\rangle - |a_n\rangle \|^2 < \epsilon$$

vale decir, hemos demostrado que el término  $j$ -ésimo (y con ello todas las componentes del vector) de una suma parcial, converge al término correspondiente de la serie límite. Esto es  $a_n^j \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a_m^j \xrightarrow{m \rightarrow \infty} a^j$  por lo tanto que la combinación lineal converge al vector y nos queda por demostrar si su norma es finita, o lo que es lo mismo,  $\langle a | a \rangle = a^i a_i < \infty$  con  $i = 1, 2, 3, \dots, \infty$ . Es claro que

$$\sum_{j=1}^M |a_n^j - a_m^j|^2 \leq \sum_{j=1}^{\infty} |a_n^j - a_m^j|^2 \equiv \| |a_m\rangle - |a_n\rangle \|^2 < \epsilon$$

con lo cual si  $m \rightarrow \infty$  tendremos que  $\sum_{j=1}^M |a_n^j - a^j|^2 < \epsilon$  y si ahora hacemos

$$M \rightarrow \infty \Rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} |a_n^j - a^j|^2 < \epsilon \Rightarrow \langle a | a \rangle = \sum_{j=1}^{\infty} |a^j|^2 \equiv \sum_{j=1}^{\infty} |a^j + a_n^j - a_n^j|^2$$

Ahora bien, para  $\alpha$  y  $\beta$  complejos, se cumple que

$$(|\alpha| - |\beta|)^2 \equiv |\alpha|^2 + |\beta|^2 - 2|\alpha||\beta| \geq 0 \Rightarrow 2|\alpha||\beta| \leq |\alpha|^2 + |\beta|^2 \Rightarrow |\alpha + \beta|^2 \leq \|\alpha + \beta\|^2 = |\alpha|^2 + |\beta|^2 + 2|\alpha||\beta|$$

para que finalmente, tengamos que

$$(|\alpha| - |\beta|)^2 \leq 2(|\alpha|^2 + |\beta|^2)$$

Finalmente, podemos aplicarlo al caso que nos compete

$$\langle a | a \rangle \equiv \sum_{j=1}^{\infty} |a^j + a_n^j - a_n^j|^2 \leq 2 \left( \sum_{j=1}^{\infty} |a^j - a_n^j|^2 + \sum_{j=1}^{\infty} |a_n^j|^2 \right) < \infty$$

### 2.11.2. Conjunto completo de funciones

El segundo sentido de completitud con que el conjunto (funciones) de vectores base expandan la totalidad del espacio vectorial (de funciones). Esto es, si  $\{|\mathbf{u}_i\rangle\} \Leftrightarrow \{u_i(x)\}$  es una base ortonormal para  $E^\infty$

$$|\mathbf{a}\rangle = a^i |\mathbf{u}_i\rangle \Rightarrow \|\mathbf{a}\|^2 = \langle \mathbf{a} | \mathbf{a} \rangle = a^i a_i = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 \quad \text{con } i = 1, 2, 3, \dots \infty$$

Es, otra vez, la misma afirmación que consideramos en el caso de un espacio finito dimensional,  $E^n$  en el cual demostramos que una base  $\{|\mathbf{u}_i\rangle\}$  con  $i = 1, 2, 3, \dots, n$  expandía todo el espacio.

Si adicionalmente existe una función *cuadrado integrable*,  $\mathcal{L}_{[a,b]}^2$  definidas en el intervalo  $[a, b]$ , la cual pueda ser aproximada por la base

$$\|\mathbf{f}\|^2 \equiv \langle \mathbf{f} | \mathbf{f} \rangle < \infty \Rightarrow |\mathbf{f}\rangle = \sum_{i=0}^{\infty} c^i |\mathbf{u}_i\rangle \sim \sum_{i=0}^N c^i |\mathbf{u}_i\rangle \Leftrightarrow \|f(x)\|^2 \equiv \int_a^b dx |f(x)|^2 \Rightarrow f(x) \sim \sum_{j=0}^N c^j u_j(x)$$

Nótese que hemos supuesto la existencia de un producto interno y si las bases son ortonormales tendremos que

$$\langle \mathbf{g} | \mathbf{f} \rangle \equiv \int_a^b dx g^*(x) f(x) \Rightarrow \langle \mathbf{u}^k | \mathbf{u}_l \rangle \equiv \int_a^b dx u^{*k}(x) u_l(x) = \delta_l^k \Rightarrow \|f(x)\|^2 \equiv \int_a^b dx |f(x)|^2 = \sum_{j=0}^{\infty} |c^j|^2$$

donde

$$c^k = \int_a^b dx u^{*k}(x) f(x)$$

Para demostrar que  $E^\infty$  es completo, comenzamos por demostrar la llamada *Desigualdad de Bessel*. Esta es: dada una base ortonormal infinita,  $\{|\mathbf{u}_i\rangle\} \Leftrightarrow \{u_i(x)\}$  para un espacio vectorial de Hilbert,  $E^\infty$ , de funciones cuadrado integrable  $f(x) \in \mathcal{L}_{[a,b]}^2$ , con un producto interno definido por  $\langle \mathbf{g} | \mathbf{f} \rangle \equiv \int_a^b dx g^*(x) f(x)$ , entonces se cumple que

$$\|f(x)\|^2 \geq \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \quad \text{con } c^k = \langle \mathbf{u}^k | \mathbf{f} \rangle = \int_a^b dx u^{*k}(x) f(x) \quad \wedge \quad \langle \mathbf{g} | \mathbf{f} \rangle \equiv \int_a^b dx g^*(x) f(x)$$

Para demostrar la desigualdad de Bessel, partimos de una afirmación obvia en espacios finito dimensionales

$$0 \leq \|\mathbf{f}\rangle - c^i |\mathbf{u}_i\rangle\|^2 \equiv [\langle \mathbf{f} | - c_k^* \langle \mathbf{u}^k | ] [|\mathbf{f}\rangle - c^i |\mathbf{u}_i\rangle] = \|\mathbf{f}\|^2 - \underbrace{c_k^* \langle \mathbf{u}^k | \mathbf{f} \rangle}_{c^k} - \underbrace{c^i \langle \mathbf{f} | \mathbf{u}_i \rangle}_{c_i^*} + \underbrace{c_k^* c^i \langle \mathbf{u}^k | \mathbf{u}_i \rangle}_{\delta_i^k}$$

donde  $k, i = 1, 2, 3, \dots n$  Entonces, queda demostrada la desigualdad de Bessel al tomar el límite  $n \rightarrow \infty$

$$0 \leq \|\mathbf{f}\|^2 - \sum_{k=1}^n |c_k|^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \|\mathbf{f}\|^2 \geq \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2$$

Si definimos el error,  $M_n$ , que se comete al aproximar una función con su expansión hasta un término  $n$ -simo como  $M_n(b-a) \equiv \|\mathbf{f}\rangle - \alpha^i |\mathbf{u}_i\rangle\|^2$  demostraremos que  $M_n$  es mínima si  $\alpha^i = c^i = \langle \mathbf{u}^i | \mathbf{f} \rangle$  Para ello procedemos como es costumbre, partiendo de la definición que acabamos de hacer y nos concentramos en el caso finito dimensional

$$0 \leq M_n(b-a) \equiv \|\mathbf{f}\rangle - \alpha^i |\mathbf{u}_i\rangle\|^2 = \|\mathbf{f}\rangle - (\alpha^i - c^i) |\mathbf{u}_i\rangle - c^k |\mathbf{u}_k\rangle\|^2$$

Desarrollando

$$\begin{aligned} M_n(b-a) &= [\langle \mathbf{f} | -(\alpha_k^* - c_k^*) \langle \mathbf{u}^k | - c_k^* \langle \mathbf{u}^k | ] [\langle \mathbf{f} | - (\alpha^i - c^i) | \mathbf{u}_i \rangle - c^i | \mathbf{u}_i \rangle] \\ &= \| |\mathbf{f}\rangle \|^2 - c_i^* (\alpha^i - c^i) - 2c_i^* c^i - (\alpha_k^* - c_k^*) c^k + \sum_{j=1}^n \|\alpha^j - c^j\|^2 + (\alpha_k^* - c_k^*) c^k + c_i^* (\alpha^i - c^i) + c_i^* c^i \\ &= \left[ \| |\mathbf{f}\rangle \|^2 - \sum_{i=1}^n \|c^i\|^2 \right] + \sum_{j=1}^n \|\alpha^j - c^j\|^2 \end{aligned}$$

Pero la desigualdad de Bessel garantiza que la cantidad entre corchetes es positiva, por lo tanto  $M_n$  es mínima (y la denotaremos  $\tilde{M}_n$ ) cuando seleccionamos  $\alpha^j = c^j$ . Más aún  $\tilde{M}_n$  decrece cuando  $n \rightarrow \infty$ , vale decir

$$\tilde{M}_n(b-a) = \| |\mathbf{f}\rangle \|^2 - \sum_{i=1}^n \|c^i\|^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \tilde{M}_\infty(b-a) = \| |\mathbf{f}\rangle \|^2 - \sum_{i=1}^{\infty} \|c^i\|^2$$

y si, adicionalmente tenemos que  $\tilde{M}_n \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$  entonces es claro que

$$\| |\mathbf{f}\rangle \|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \|c^i\|^2 \implies \{ | \mathbf{u}_i \rangle \} \Leftrightarrow \{ u_i(x) \} \quad \text{es completa}$$

Este noción de convergencia se denomina como *convergencia al promedio*

Si adicionalmente exigimos que la serie  $c^i | \mathbf{u}_i \rangle$  converja uniformemente para  $x \in [a, b]$  entonces es claro que

$$\int_a^b dx \| f(x) - c^i | \mathbf{u}_i \rangle \|^2 = 0 \implies | \mathbf{f} \rangle = c^i | \mathbf{u}_i \rangle \quad (\text{con } i = 1, 2, 3 \dots, \infty) \Leftrightarrow f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c^i u_i(x)$$

Con lo cual enumeraremos las condiciones para la cual exigiremos que una función pueda ser expresada en términos de una base completa de funciones.

- Que  $f(x)$  sea cuadrado integrable  $f(x) \in \mathcal{L}_{[a,b]}^2$
- Que la base sea completa,  $\{ | \mathbf{u}_i \rangle \} \Leftrightarrow \{ u_i(x) \}$  i.e.  $\| |\mathbf{f}\rangle \|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \|c^i\|^2$
- Que la serie  $c^i | \mathbf{u}_i \rangle \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{\infty} c^i u_i(x)$  converja uniformemente, para  $x \in [a, b]$

## 2.12. Series de Laurent

Anteriormente consideramos series complejas de potencias. En esta sección revisaremos, desde la perspectiva de haber expresado la derivada n-ésima de una función analítica, el equivalente a las series de Taylor para funciones complejas de variable complejas.

### 2.12.1. Series de Taylor para funciones analíticas

Si  $f(z)$  es analítica en un círculo de radio  $R$ , encerrado por un contorno  $\mathcal{C}$  y centrado en un punto  $z = z_0$ , entonces  $f(z)$  puede ser expandida en series de potencias (enteras positivas) para todo  $|z - z_0| < R$  de la forma

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n \equiv f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \frac{f''(z_0)}{2} (z - z_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n + R_n,$$

con el resto  $R_n(z)$  definido como

$$R_n(z) = \frac{(z - z_0)^n}{2i\pi} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^n(\zeta - z)}.$$

Para probar esta afirmación partimos de la fórmula integral de Cauchy escrita convenientemente

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\mathcal{C}} d\zeta \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \left[ \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} \right], \quad (2.34)$$

de donde

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} \equiv \frac{1}{2i\pi} \oint_{\mathcal{C}} d\zeta \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \left[ 1 + \left( \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right) + \left( \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^2 + \dots + \left( \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^n + \frac{\left( \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^{n+1}}{\left( \frac{\zeta - z}{\zeta - z_0} \right)} \right]$$

este último corchete proviene de una forma ingeniosa de utilizar una serie geométrica de razón  $r = \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}$ .

Para entenderlo, recordemos que para una serie geométrica, se cumple que

$$1 + r + r^2 + r^3 + \dots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} = \frac{1}{1 - r} - \frac{r^{n+1}}{1 - r} \Rightarrow \frac{1}{1 - r} = 1 + r + r^2 + r^3 + \dots + r^n + \frac{r^{n+1}}{1 - r}. \quad (2.35)$$

Entonces:

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} \equiv \frac{1}{2i\pi} \oint_{\mathcal{C}} d\zeta \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \left[ \sum_{j=0}^n \left( \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^j + \frac{\left( \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^{n+1}}{\left( \frac{\zeta - z}{\zeta - z_0} \right)} \right] \quad (2.36)$$

con lo cual

$$f(z) = \sum_{j=0}^n (z - z_0)^j \left( \frac{1}{2i\pi} \oint_{\mathcal{C}} d\zeta \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{j+1}} \right) + R_n(z) = \sum_{j=0}^n \frac{f^{(j)}(z_0)}{j!} (z - z_0)^j + R_n(z) \quad (2.37)$$

donde

$$R_n(z) = \frac{(z - z_0)^n}{2i\pi} \oint_{\mathcal{C}} d\zeta \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^n(\zeta - z)} \quad (2.38)$$

Obvio que la serie (2.37) converge si  $R_n(z) \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$  y de eso es fácil convencerse al acotar la ecuación (2.38). Esto es, considerando  $\zeta$  sobre el contorno  $\mathcal{C}$  y  $z$  en el interior de  $\mathcal{R}$ , entonces

$$\begin{aligned} |R_n(z)| &= \left| \frac{(z - z_0)^n}{2i\pi} \oint_{\mathcal{C}} d\zeta \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^n(\zeta - z)} \right| < \frac{|z - z_0|^n}{2\pi} \oint_{\mathcal{C}} \left| \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^n(\zeta - z)} \right| d\zeta \\ &< \frac{|z - z_0|^n}{2\pi} M \frac{1}{R^n} 2\pi R, \end{aligned}$$

donde, una vez más, hemos utilizado la forma polar  $\tilde{\zeta} = \zeta - z_0 = Re^{i\theta}$  y hemos acotado  $\left| \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \right| < M$ , con

lo cual es inmediato constatar que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{z - z_0}{R} \right|^n = 0 \Rightarrow R_n(z) \rightarrow 0$ , con lo cual la serie converge.

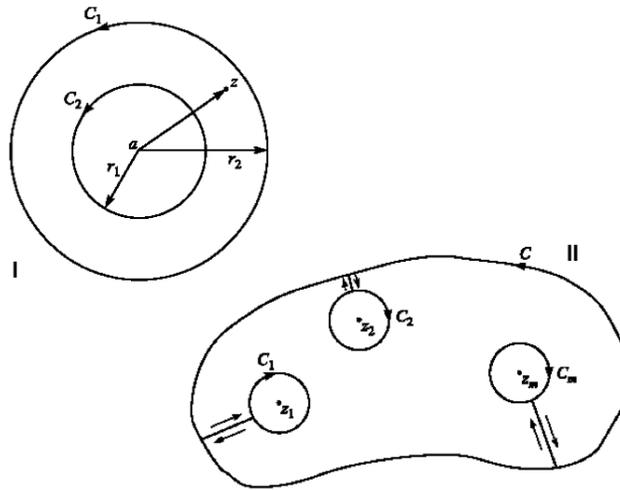


Figura 2.5: Expansión de Laurent

**Ejemplos** Expanda

- $f(z) = \frac{1}{1-z}$ , alrededor de  $z = z_0$

$$f(z) = \frac{1}{1-z_0} + \frac{1}{(1-z_0)^2}(z-z_0) + \frac{1}{(1-z_0)^3}(z-z_0)^2 + \frac{1}{(1-z_0)^4}(z-z_0)^3 + \dots + \frac{(z-z_0)^n}{(1-z_0)^{n+1}} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(1-z_0)^{n+1}}$$

- $f(z) = \ln(1+z)$ , alrededor de  $z = 0$  (Serie de Maclaurin)

$$f(z) = \ln(1+z) = \ln(1+z)|_{z=0} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}n!}{(1-z)^{n+1}} \Big|_{z=0} z^n \equiv f(0) + f'(0)z + \frac{f''(0)}{2}z^2 + \frac{f'''(0)}{3!}z^3 + \dots = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \dots$$

- $f(z) = \ln \left[ \frac{1+z}{1-z} \right]$ , alrededor de  $z = 0$  (Serie de Maclaurin)

$$\ln \left[ \frac{1+z}{1-z} \right] \equiv \ln[1+z] - \ln[1-z] = \left[ z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} \dots \right] - \left[ -z - \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3} \dots \right] = 2 \left[ z + \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} \dots \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2z^{2n+1}}{2n+1}$$

**2.12.2. Series de Laurent**

Hemos dicho que si una función  $f(z)$  es analítica en una región (digamos que circular)  $\mathcal{R}$ , entonces puede ser expandida por series de Taylor. Sin embargo, si  $f(z)$  tiene un polo de orden  $p$ , digamos, en  $z = z_0$ , dentro de la región  $\mathcal{R}$ , no será analítica en ese punto, mientras que la función:  $g(z) = (z - z_0)^p f(z)$  si lo será en todos los puntos de esa región. Entonces  $f(z)$  podrá ser expandida como series de potencias (de Laurent) de la forma

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u_k(z-z_0)^k = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(z-z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_{-n}}{(z-z_0)^n}, \text{ con } u_n = \frac{1}{2i\pi} \oint_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta-z_0)^{n+1}}, \quad (2.39)$$

para:  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  y  $R_1 < |z - z_0| < R_2$ . Equivalentemente

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^p} = \frac{a_{-p}}{(z - z_0)^p} + \frac{a_{-p+1}}{(z - z_0)^{p-1}} + \dots + \frac{a_{-1}}{(z - z_0)} + a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots \quad (2.40)$$

La suma de todos los términos que tengan potencias negativas, vale decir  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n}$ , se denomina *parte principal* de  $f(z)$ .

Para demostrar (2.39) o (2.40), recordamos que, tal y como muestra la figura 2.6 cuadrante  $I$ , si  $f(z)$  es analítica en la región anular, entonces el Teorema de Cauchy, nos garantiza que

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \oint_{C_1} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z_0} + \frac{1}{2i\pi} \oint_{C_2} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z_0} \equiv \frac{1}{2i\pi} \oint_{C_1} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z_0} - \frac{1}{2i\pi} \oint_{C_2} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z_0}$$

donde en el segundo caso hemos supuesto que ambas circulaciones tienen el mismo sentido.

Del mismo modo como procedimos en la ecuación (2.34) reescribimos el segundo par de integrales como

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \oint_{C_1} d\zeta \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \left[ \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} \right] + \frac{1}{2i\pi} \oint_{C_2} d\zeta \frac{f(\zeta)}{z - z_0} \left[ \frac{1}{1 - \frac{\zeta - z_0}{z - z_0}} \right]$$

y ahora invocando, una vez más la progresión geométrica (2.35) podemos construir expresiones de integrales equivalentes a la ecuación (2.36). Vale decir

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \oint_{C_1} d\zeta \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \left[ \sum_{j=0}^{n-1} \left( \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^j + \frac{\left( \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^n}{\left( \frac{\zeta - z_0}{z - z_0} \right)} \right] + \frac{1}{2i\pi} \oint_{C_2} d\zeta \frac{f(\zeta)}{z - z_0} \left[ \sum_{j=0}^{n-1} \left( \frac{\zeta - z_0}{z - z_0} \right)^j + \frac{\left( \frac{\zeta - z_0}{z - z_0} \right)^n}{\left( \frac{\zeta - z_0}{z - z_0} \right)} \right]$$

y equivalentemente

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \sum_{j=0}^{n-1} (z - z_0)^j \underbrace{\oint_{C_1} d\zeta \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{j+1}}}_{u_j} + R_{n1}(z) + \frac{1}{2i\pi} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{(z - z_0)^{j+1}} \underbrace{\oint_{C_2} d\zeta f(\zeta)(\zeta - z_0)^j}_{u_{-j}} + R_{n2}(z) \quad (2.41)$$

Con lo cual queda demostrado la forma funcional de los coeficientes de la expansión de Laurent. La demostración de la convergencia, esto es  $n \rightarrow \infty \Rightarrow R_{n1}(z) \rightarrow R_{n2}(z) \rightarrow 0$  sigue el mismo esquema que utilizamos para demostrar la convergencia de la ecuación (2.39) y se lo dejamos como ejercicio al lector.

Otra manera de representar las series de Laurent es por medio de las fórmulas:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{(z - z_0)^k}, \quad R_1 < |z - z_0| < R_2. \quad (2.42)$$

donde:

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.43)$$

$$b_k = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{-k+1}} dz, \quad k = 1, 2, \dots. \quad (2.44)$$

En este caso, se supone que la función es analítica en el dominio anular:  $R_1 < |z - z_0| < R_2$  y  $C$  es un contorno cerrado simple en torno a  $z_0$  y contenido en la región anular.

En el caso de  $b_k$  podemos ver que el integrando se puede escribir también como  $f(z)(z - z_0)^{k-1}$ . Si  $f$  es analítica en  $|z - z_0| < R_2$ , entonces el integrando es una función analítica en dicho disco y por lo tanto  $b_k = 0$ . Es decir, la serie (2.42) se reduce a una serie de Taylor donde los coeficientes son:

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

### 2.12.3. Algunos Ejemplos

En muchos casos las expansiones en series de Laurent no se generan a partir de las ecuaciones (2.39) o (2.42) sino a partir de manipulaciones algebraicas y expansiones en Taylor moduladas por otros factores.

**Ejemplo 1:** El primero lo haremos directamente, vale decir, que como lo vamos a hacer no lo haremos otra vez. Queremos hacer una representación en serie de Laurent de la función:

$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)}.$$

Utilizando las fórmulas de (2.41), construimos la relación

$$u_j = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z_0)^{j+1}} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{d\zeta}{\zeta^{j+2}(\zeta - 1)} = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{d\zeta}{\zeta^{j+2}} \sum_{n=0}^{\infty} \zeta^n = -\frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \oint_{C_1} \frac{d\zeta}{\zeta^{j+2-n}}$$

convirtiendo a la forma polar tendremos que

$$-\frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \oint_{C_1} \frac{r^j e^{i\theta} d\theta}{r^{j+2-n} e^{i(j+2-n)\theta}} = -\sum_{n=0}^{\infty} \delta_{j+2-n,1} \Rightarrow \begin{cases} u_n = -1 & \text{para } n \geq -1 \\ u_n = 0 & \text{para } n < -1 \end{cases}$$

es decir

$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)} = -\frac{1}{z} - 1 - z - z^2 - z^3 - \dots$$

Consideremos los siguientes ejemplos de desarrollos en Series de Laurent:

**Ejemplo 2:**

$$f(z) = \frac{1}{z(z-2)}.$$

La función puede escribirse en la forma:

$$f(z) = \frac{1}{z(z-2)} = -\frac{1}{2} \left[ \frac{1}{z} - \frac{1}{z-2} \right], \quad 0 < |z| < 2.$$

Por otro lado, sabemos que:

$$-\frac{1}{z-2} = \frac{1}{2} \frac{1}{1 - z/2} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}}, \quad |z| < 2,$$

por lo tanto:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z(z-2)} = -\frac{1}{2} \frac{1}{z} - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} \\ &= -\frac{1}{2} \frac{1}{z} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} z - \frac{1}{16} z^2 - \frac{1}{32} z^3 - \frac{1}{64} z^4 - \frac{1}{128} z^5 - \dots, \quad 0 < |z| < 2. \end{aligned}$$

**Ejemplo 3:**

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-3)}$$

Esta función tiene polos de orden 1 en  $z = 1$  y  $z = 3$ . Además, expresando  $f(z)$  como una suma de fracciones parciales, tendremos:

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-3)} = -\frac{1}{2} \left[ \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-3} \right], \quad 1 < |z| < 3,$$

- Para  $1 < |z| < 3$ .

Tenemos los siguientes desarrollos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{z-1} &= \frac{1}{z} \frac{1}{1-1/z} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}}, \quad |z| > 1, \\ -\frac{1}{z-3} &= \frac{1}{3} \frac{1}{1-z/3} = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{3^{n+1}}, \quad |z| < 3, \end{aligned}$$

La serie es:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{(z-1)(z-3)} = -\frac{1}{2} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{3^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} \right] \\ &= -\frac{1}{6} - \frac{1}{18} z - \frac{1}{54} z^2 - \frac{1}{162} z^3 - \frac{1}{2} z^{-1} - \frac{1}{2} z^{-2} - \frac{1}{2} z^{-3} - \frac{1}{2} z^{-4} - \dots \end{aligned}$$

- Para  $|z| > 3$ .

En este caso no podemos utilizar el segundo desarrollo anterior, ya que éste es válido sólo para  $|z| < 3$ . Por lo tanto:

$$-\frac{1}{z-3} = -\frac{1}{z} \frac{1}{1-3/z} = -\frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{z}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{z^{n+1}}, \quad |z| > 3,$$

podemos entonces escribir

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{(z-1)(z-3)} = -\frac{1}{2} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{z^{n+1}} \right] = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1-3^n}{z^{n+1}} \\ &= z^{-2} + 4z^{-3} + 13z^{-4} + 40z^{-5} + \dots \end{aligned}$$

- para  $|z| < 1$ .

Escribimos

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-3)} = -\frac{1}{2} \left[ \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-3} \right] = \frac{1}{2} \frac{1}{1-z} - \frac{1}{6} \frac{1}{1-z/3},$$

como  $|z| < 1$  y  $|z/3| < 1$  en este dominio, entonces:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} z^n - \frac{1}{6} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{3^n} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} z^n \left[ 1 - \frac{1}{3^{n+1}} \right] \\ &= \frac{1}{3} + \frac{4}{9} z + \frac{13}{27} z^2 + \frac{40}{81} z^3 + \frac{121}{243} z^4 + \dots \end{aligned}$$

**Ejemplo 4:**

$$f(z) = \frac{e^{2z}}{(z-1)^3}.$$

Sabemos que:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad |z| < \infty,$$

por lo tanto:

$$\begin{aligned} f(z) = \frac{e^{2z}}{(z-1)^3} &= \frac{e^2 e^{2(z-1)}}{(z-1)^3} = e^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n (z-1)^n}{n! (z-1)^3} = e^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} (z-1)^{n-3} \\ &= e^2 \left[ \frac{2}{3} + (z-1)^{-3} + 2(z-1)^{-2} + 2(z-1)^{-1} + \frac{2}{3} z + \frac{4}{15} (z-1)^2 + \dots \right], \end{aligned}$$

la cual es válida para:  $0 < |z-1| < \infty$ .

**Ejemplo 5:**

$$f(z) = \frac{z - \operatorname{sen} z}{z^3}.$$

Esta función se puede escribir como:

$$f(z) = \frac{1}{z^2} - \frac{\operatorname{sen} z}{z^3}.$$

Sabemos que:

$$\operatorname{sen} z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad |z| < \infty,$$

entonces

$$\begin{aligned} f(z) = \frac{1}{z^2} - \frac{\operatorname{sen} z}{z^3} &= \frac{1}{z^2} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{z^3 (2n+1)!} = \frac{1}{z^2} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2(n-1)}}{(2n+1)!} \\ &= \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^2} - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2(n-1)}}{(2n+1)!} = - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2(n-1)}}{(2n+1)!} \\ &= \frac{1}{6} - \frac{1}{120} z^2 + \frac{1}{5040} z^4 - \frac{1}{362880} z^6 + \frac{1}{39916800} z^8 - \dots, \end{aligned}$$

válida para:  $0 < |z| < \infty$ .

### 2.12.4. Integración por el método de los residuos

Las expansiones de funciones en series de potencias dejan “residuos” al detener la expansión a para una determinada potencia. Esto se puede apreciar claramente en la expresión de Taylor para funciones analíticas. Ahora, las expansiones de Laurent nos muestran otro “residuo”. Explotaremos las series de Laurent para funciones con polos y construiremos un método para evaluar integrales de funciones en esos puntos. Primero estudiaremos los residuos en general y luego los utilizaremos para evaluar integrales.

### 2.12.5. Los residuos de Laurent

Hemos dicho que si  $f(z)$  tiene un polo de orden  $p$  en  $z = z_0 \in \mathcal{R}$ , entonces

$$\oint_{\mathcal{C}} dz f(z) \neq 0 \Rightarrow f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = \frac{a_{-p}}{(z-z_0)^p} + \frac{a_{-p+1}}{(z-z_0)^{p-1}} + \dots + \frac{a_{-1}}{(z-z_0)} + a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \dots$$

más aún, tendremos que los coeficientes de la expansión pueden ser calculados a partir de

$$a_n = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)^{n+1}} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad \text{si } n = -1 \Rightarrow \oint_{\mathcal{C}} f(\zeta) d\zeta = 2i\pi a_{-1} \equiv 2i\pi \text{Res } f(z) \quad (2.45)$$

Es decir, la integración a lo largo de un contorno  $\mathcal{C}$  que aisle al polo  $z = z_0$  es proporcional al residuo correspondiente a la expansión de Laurent alrededor de ese polo. Nos queda entonces calcular el residuo para así no calcular la integral.

Esta situación se ilustra con el siguiente ejemplo. Supongamos

$$f(z) = \frac{\text{sen } z}{z^4} = \frac{1}{z^4} \left( z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots \right) = \frac{1}{z^3} - \frac{1}{3!z} + \frac{z}{5!} + \dots,$$

por lo tanto:

$$a_{-1} = -\frac{1}{3!} \Rightarrow \oint_{\mathcal{C}} f(\zeta) d\zeta = 2i\pi a_{-1} = -\frac{i\pi}{3}$$

En general, si  $f(z)$  tiene un polo de orden  $p$  en  $z = z_0 \in \mathcal{R}$ , entonces

$$(z-z_0)^p f(z) = a_{-p} + a_{-p+1}(z-z_0) + \dots + a_0(z-z_0)^p + \dots \Rightarrow \frac{d^{p-1}}{dz^{p-1}} [(z-z_0)^p f(z)] = (p-1)! a_{-1} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n (z-z_0)^n$$

con lo cual concluimos que

$$a_{-1} \equiv \text{Res } f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \left( \frac{1}{(p-1)!} \frac{d^{p-1}}{dz^{p-1}} [(z-z_0)^p f(z)] \right) \quad (2.46)$$

Si, por ejemplo consideramos

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{(z^2+1)^2} \equiv \frac{e^{iz}}{(z+i)^2(z-i)^2} \Rightarrow \begin{cases} z_0 = i \Rightarrow \frac{d}{dz} [(z-i)^2 f(z)] = \frac{d}{dz} \left[ \frac{e^{iz}}{(z+i)^2} \right] \\ z_0 = -i \Rightarrow \frac{d}{dz} [(z+i)^2 f(z)] = \frac{d}{dz} \left[ \frac{e^{iz}}{(z-i)^2} \right] \end{cases}$$

con lo cual

$$\text{Res} \frac{e^{iz}}{(z^2+1)^2} \Big|_i = \lim_{z \rightarrow i} \frac{1}{1!} \frac{d}{dz} \left[ \frac{e^{iz}}{(z+i)^2} \right] = \lim_{z \rightarrow i} \frac{(z+i)^2 i e^{iz} - e^{iz} 2(z+i)}{(z+i)^2} = \frac{-4ie^{-1} - 4ie^{-1}}{16} = -\frac{i}{2e}$$

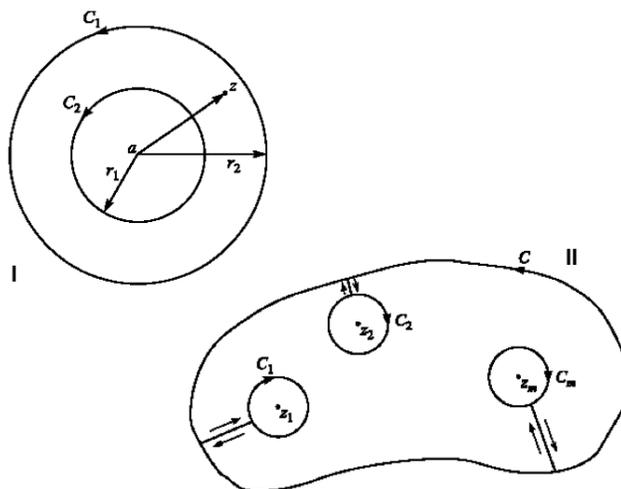


Figura 2.6: Expansión de Laurent

del mismo modo se procede para el caso  $z = -i$

Un caso particular y muy útil lo constituyen las funciones racionales del tipo  $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$  y  $f(z)$  tiene un polo simple en  $z = z_0$ . Esto es  $q(z_0) = 0$  entonces

$$\text{Res } f(z)|_{z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(z - z_0)p(z)}{q(z)} = p(z_0) \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(z - z_0)}{q(z)} = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)} \tag{2.47}$$

porque hemos utilizado el Teorema de L'Hopital. Este caso lo podemos ejemplificar si consideramos una función

$$f(z) = \frac{4 - 3z}{z^2 - z} \equiv \frac{4 - 3z}{z(z - 1)} \quad \text{con polos en } \begin{cases} z = 0 \Rightarrow \text{Res } f(z)|_{z=0} = \left. \frac{4 - 3z}{2z - 1} \right|_{z=0} = -4 \\ z = 1 \Rightarrow \text{Res } f(z)|_{z=1} = \left. \frac{4 - 3z}{2z - 1} \right|_{z=1} = 1 \end{cases} \tag{2.48}$$

## 2.13. Teorema del Residuo

### 2.13.1. Integrales impropias del tipo $\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x)$

Hemos visto como calcular las integrales de funciones, en regiones múltiplemente conexas, con polos simples a partir de residuos. Ahora generalizaremos ese esquema para una región, también múltiplemente conexas, pero con un número finito de polos. Tal y como se muestra en la figura 2.6 en el cuadrante II, realizamos una circulación ingeniosa, de tal modo que aislamos los distintos polos. Ahora bien, como la función es analítica en la región bordeada por todos esos contornos, entonces

$$\left[ \oint_C dz f(z) + \oint_{C_1} dz f(z) + \oint_{C_2} dz f(z) + \dots + \oint_{C_m} dz f(z) \right] = 0$$

y al cambiar el sentido de circulación comprobamos lo que ya sabíamos

$$\oint_C dz f(z) = \oint_{C_1} dz f(z) + \oint_{C_2} dz f(z) + \dots + \oint_{C_m} dz f(z) \Leftrightarrow \oint_C dz f(z) = 2i\pi \sum_{j=1}^m \text{Res } f(z)_{z=z_{0j}}$$

donde hemos utilizado lo que hicimos para la ecuación (2.45)

Con ello podemos enunciar el Teorema del Residuo que ya hemos demostrado

Si  $f(z)$  es analítica en una región  $\mathcal{R}$  excepto en un número,  $m$ , finito de polos  $z_{01}, z_{02}, z_{03}, \dots, z_{0m}$  entonces

$$\oint_C dz f(z) = 2i\pi \sum_{j=1}^m \text{Res } f(z)_{z=z_{0j}}$$

Una vez más ejemplificamos. Sea la función  $f(z) = \frac{4-3z}{z^2-z}$ , una función con polos simples en  $z = 0$  y  $z = 1$  correspondientes a residuos 4 y 1, respectivamente, tal y como se vió en la sección (2.12.5). Entonces, utilizamos los resultado expuestos en el ejemplo (2.48)

$$\oint_C dz \frac{4-3z}{z^2-z} = 2\pi i(-4+1) = -6\pi i$$

siempre y cuando el circuito  $C$  encierre los dos polos,  $z = 0$  y  $z = 1$ , para los cuales hemos calculado los residuos.

### Ejercicios

- Determinar los polos y los residuos correspondientes para cada una de las funciones propuestas

$$f(z) = \frac{2z+1}{z^2-z-2}; \quad f(z) = \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2; \quad f(z) = \frac{\text{sen } z}{z^2}; \quad f(z) = \cot z$$

- Evaluar

a)

$$\oint_C \frac{dz e^z}{\cosh z} \quad \text{a lo largo de una circunferencia } |z| = 5$$

b)

$$\oint_C \frac{(2z^2+5)dz}{(z+2)^3(z^2+4)z^2} \quad \text{a lo largo de una circunferencia } |z-2i| = 6 \text{ y}$$

un cuadrado de vértices  $z = 1+i; z = 2+i; z = 2+2i$  y  $z = 1+2i$ .

### 2.13.2. Evaluación de integrales, reales, impropias

El teorema del residuo (2.13) es una herramienta poderosa para evaluar algunos tipos de integrales definidas en variable real. La intención es “extender” el dominio de las funciones de la recta real al Plano Complejo. Una de las restricciones es que los contornos deben ser cerrados antes de que sean evaluados los residuos. El punto es que muchas integrales reales tienen contornos abiertos y la posibilidad de evaluar estas integrales a través del Teorema del Residuo descansa en la forma como se cierran los contornos. En estos casos se debe estimar las contribuciones de esos contornos adicionales que permiten cerrar los contornos abiertos. A continuación expondremos algunas técnicas para cerrar algunos tipos de contornos abiertos.

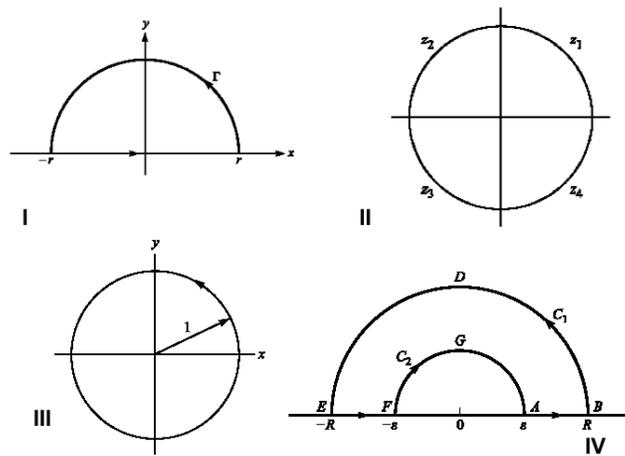


Figura 2.7: Circuitos y evaluación de integrales reales, impropias

### 2.13.3. Integrales impropias del tipo $\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x)$

Este tipo de integrales implica, si ambos límites existen

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) = \lim_{r \rightarrow -\infty} \int_r^0 dx f(x) + \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^r dx f(x) \leftrightarrow \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r dx f(x)$$

Necesitaremos que el integrando sea una función racional  $f(x) = p(x)/q(x)$ , donde  $q(x) \neq 0 \forall x$ . Adicionalmente requeriremos que cuando menos  $q(x) \sim x^2 p(x)$ . Supuesto todo esto, convertimos nuestra función racional en una función de variable compleja  $f(x) \rightarrow f(z)$  y consideramos la integral de circulación,  $\oint_C dz f(z)$ , sobre un contorno  $C$  descrito por el eje real y una semicircunferencia  $\Gamma$  en el plano complejo con  $y \geq 0$ , tal y como se muestra en el cuadrante I la figura 2.8. La intención es hacer  $r \rightarrow \infty$  y con ello evaluar la integral  $\int_0^{\infty} dx f(x)$ . Es fácil convencerse que

$$\oint_C dz f(z) = \int_{\Gamma} dz f(z) + \int_{-r}^r dx f(x) = 2i\pi \sum_{j=1}^m \text{Res } f(z)_{z=z_{0j}}$$

es decir,

$$\int_{-r}^r dx f(x) = 2i\pi \sum_{j=1}^m \text{Res } f(z)_{z=z_{0j}} - \int_{\Gamma} dz f(z)$$

Esta estrategia es válida porque hemos supuesto que  $f(x)$  es racional y que  $q(x) \neq 0 \forall x$ , entonces si existen polos para  $f(z)$  estarán en el plano complejo (no sobre el eje real). Todos esos polos serán encerrados por el contorno  $C$  que hemos seleccionado. Más aún, comprobaremos que  $\int_{\Gamma} dz f(z) \rightarrow 0$  cuando  $z \rightarrow \infty$ . Esto es sencillo si notamos que

$$q(x) \sim x^2 p(x) \Rightarrow |f(z)| < \frac{k}{|z|^2} \Rightarrow \left| \int_{\Gamma} dz f(z) \right| < \frac{k}{r^2} \pi r = \frac{k\pi}{r} \quad \text{para } |z| = r \geq 0$$

con lo cual llegamos a que para este tipo de integrales

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) = 2i\pi \sum_{j=1}^m \text{Res } f(z)_{z=z_{0j}} \quad \text{para } f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}, \quad \text{con } q(x) \neq 0 \quad \forall x \wedge p(x) \sim x^2 q(x) \quad (2.49)$$

**Ejemplo** Considere evaluar la siguiente integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4 + 1^4} \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4 + 1^4} = 2i\pi \sum_{j=1}^m \text{Res } f(z)_{z=z_{0j}}$$

donde hemos utilizado la expresión (2.49). La extensión analítica

$$f(x) \rightarrow f(z) = \frac{1}{z^4 + 1} \quad \text{tendrá cuatro polos simples: } z = e^{\pm \frac{i\pi}{4}}; z = e^{\pm \frac{3i\pi}{4}};$$

correspondientes a las cuatro raíces de  $z^4 = -1$ . Acto seguido calculamos los residuos invocando la relación (2.47) que hemos construido para funciones racionales. Esto es

$$\text{Res } \frac{p(z)}{q(z)} \Big|_{z=z_0} = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)} \Rightarrow \begin{cases} z = e^{\frac{i\pi}{4}} \Rightarrow \text{Res } f(z) \Big|_{z=e^{\frac{i\pi}{4}}} = \frac{1}{4z^3} \Big|_{z=e^{\frac{i\pi}{4}}} = \frac{e^{-\frac{3i\pi}{4}}}{4} = \frac{e^{\frac{i\pi}{4}}}{4} \\ z = e^{\frac{3i\pi}{4}} \Rightarrow \text{Res } f(z) \Big|_{z=e^{\frac{3i\pi}{4}}} = \frac{1}{4z^3} \Big|_{z=e^{\frac{3i\pi}{4}}} = \frac{e^{-\frac{9i\pi}{4}}}{4} = \frac{e^{-\frac{i\pi}{4}}}{4} \end{cases}$$

Hemos considerado únicamente los polos para el semiplano complejo  $y > 0$  ya que seguimos considerando el circuito descrito en el cuadrante *I* de la figura 2.8. Quedan dos polos ubicados en el semiplano complejo  $y < 0$ , tal y como se muestra en el cuadrante *II* de la misma figura 2.8. Consecuentemente, tendremos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4 + 1} = \frac{2\pi i}{4} \left( e^{\frac{i\pi}{4}} + e^{-\frac{i\pi}{4}} \right) = \pi \text{sen} \left( \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \pi \Rightarrow \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^4 + 1^4} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4 + 1^4} = \frac{\sqrt{2}}{4} \pi$$

**Ejemplo** Para evaluar la siguiente integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 + 1)^2 (x^2 + 2x + 2)} \Rightarrow f(z) = \frac{z^2}{(z^2 + 1)^2 (z^2 + 2z + 2)}$$

donde hemos realizado la extensión analítica  $f(x) \rightarrow f(z)$  y ubicado sus polos de  $z = i$  y  $z = i - 1$  en el semiplano complejo  $y > 0$  y los encerrados por el circuito descrito en el cuadrante *I* de la figura 2.8. El primero de estos polos es de segundo orden, mientras que el segundo corresponde a un polo simple. Consecuentemente, los residuos se calculan invocando la relación general (2.46) arriba expuesta. Con lo cual para

$$z = i \Rightarrow \lim_{z \rightarrow i} \left( \frac{d}{dz} \left[ (z - i)^2 \frac{z^2}{(z - i)^2 (z + i)^2 (z^2 + 2z + 2)} \right] \right) = \frac{-12 + 9i}{100}$$

y para

$$z = i - 1 \Rightarrow \lim_{z \rightarrow i-1} (z - i + 1) \frac{z^2}{(z^2 + 1)^2 (z - i - 1)(z + i - 1)} = \frac{3 - 4i}{25}$$

Finalmente, podemos evaluar la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 + 1)^2 (x^2 + 2x + 2)} = 2i\pi \sum_{j=1}^2 \text{Res } f(z)_{z=z_{0j}} = 2\pi i \left( \frac{-12 + 9i}{100} + \frac{3 - 4i}{25} \right) = \frac{7\pi}{50}$$

**Ejercicios** Evaluar las siguientes integrales

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)^2}; \quad \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^4+x^2+1}; \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+4x+5)^2}$$

### 2.13.4. Integrales de funciones racionales de $\cos \theta$ y $\sin \theta$

Ahora mostraremos la estrategia para integrales de funciones racionales de funciones trigonométricas,  $\mathcal{G}(\cos \theta, \sin \theta)$ . La idea es transformar estas integrales en otras de funciones de variable compleja a través de los cambios de variables que conectan las funciones trigonométricas y los números complejos. Esto es transformar integrales de la forma

$$\int_0^{2\pi} d\theta \mathcal{G}(\cos \theta, \sin \theta) \rightarrow \oint_C \frac{dz}{zi} f(z)$$

mediante cambios de variables estándares

$$z = re^{i\theta} \Rightarrow d\theta = \frac{dz}{zi}; \quad \cos \theta = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right); \quad \text{y} \quad \sin \theta = \frac{1}{2i} \left( z - \frac{1}{z} \right) \quad (2.50)$$

**Ejemplo** En las tablas de integrales encontrábamos<sup>9</sup> que

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + b \sin \theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}} \quad \text{con } |a| > |b|$$

veamos como se llega a ese resultado.

Haciendo  $z = re^{i\theta}$  y asumiendo las consecuencias, tal y como se presenta en (2.50) arriba, tendremos que

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + b \sin \theta} = \oint_C \frac{\frac{dz}{zi}}{a + \frac{b}{2i} \left( z - \frac{1}{z} \right)} = \oint_C \frac{2dz}{bz^2 + 2aiz - b} \quad \text{con } C \text{ una circunferencia } |z| = 1$$

los polos de

$$f(z) = \frac{2}{bz^2 + 2aiz - b} \Rightarrow z_{\pm 0} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - b^2}}{b} i$$

son los valores de  $z$  que anulan el denominador de  $f(z)$ . Seguidamente verificamos la ubicación de los polos simples y comprobamos que como  $|a| > |b|$  entonces

$$|z_{+0}| = \left| \frac{-a + \sqrt{a^2 - b^2}}{b} i \right| < 1 \quad \text{y} \quad |z_{-0}| = \left| \frac{-a - \sqrt{a^2 - b^2}}{b} i \right| > 1$$

y por lo tanto, sólo el primero de los polos está encerrado por el circuito  $C$  con  $|z| = 1$  tal y como muestra en el cuadrante *III* de la figura 2.8.

Una vez más calculamos el residuo para  $z_{+0}$  a partir de (2.46). Entonces tendremos que

$$\text{Res } f(z)|_{z=z_{+0}} = \lim_{z \rightarrow z_{+0}} (z - z_{+0}) \frac{2}{bz^2 + 2aiz - b} = \lim_{z \rightarrow z_{+0}} \frac{2}{2bz + 2ai} = \frac{1}{bz_{+0} + ai} \equiv \frac{-i}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

finalmente

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + b \sin \theta} = \oint_C \frac{2dz}{bz^2 + 2aiz - b} = 2i\pi \text{Res } f(z)|_{z=z_{+0}} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}.$$

<sup>9</sup>Encontrábamos porque hoy en día estas integrales las calculamos con manipuladores simbólicos del tipo **Maple**, **Reduce**, **Mathematica** o **Mupad**

**Ejercicios** Compruebe las siguientes evaluaciones

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + b \cos \theta + c \operatorname{sen} \theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2 - c^2}} \quad \text{con } a^2 > b^2 + c^2; \quad \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 3\theta \, d\theta}{5 - 4 \cos 2\theta} = \frac{3\pi}{8}.$$

## 2.14. Integrales de Fourier

Otro grupo de integrales que pueden ser evaluadas mediante el Teorema de Residuos son las integrales de Fourier. Integrales que involucran funciones racionales,  $f(x)$ , que satisfacen las condiciones expuestas anteriormente y funciones senos y cosenos. Integrales del tipo

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) \begin{Bmatrix} \cos mx \\ \operatorname{sen} mx \end{Bmatrix} \leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) e^{imx} \rightarrow \oint_C dz f(z) e^{imz} = 2i\pi \sum_{j=1}^m \operatorname{Res} |f(z) e^{imz}|_{z=z_{0j}} \quad (2.51)$$

Con  $m > 0$  y los polos correspondientes a los residuos que se muestran en el lado derecho, están ubicados en el semiplano complejo con  $y > 0$ . Es claro que el circuito seleccionado es  $\Gamma$  que muestra el cuadrante  $II$  de la figura 2.8.

Equivalentemente, igualando partes reales e imaginarias

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) \cos mx &= -2\pi \sum_{j=1}^m \operatorname{Im} \operatorname{Res} |f(z) e^{imz}|_{z=z_{0j}} \\ \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) \operatorname{sen} mx &= 2\pi \sum_{j=1}^m \operatorname{Re} \operatorname{Res} |f(z) e^{imz}|_{z=z_{0j}}. \end{aligned}$$

Otra vez, el circuito  $C$  se separa en una semicircunferencia  $\Gamma$  y el eje real.

Para demostrar que para evaluar las integrales de Fourier (2.51) se requiere la suma de los residuos nos convencemos que la integral a lo largo de la semicircunferencia se anula. Esto es fácil si comprobamos que  $y > 0$  y  $m > 0$ , entonces si  $z = x + iy$  tendremos que

$$|e^{imz}| = |e^{imx}| |e^{-my}| = e^{-my} < 1 \quad \Rightarrow |f(z) e^{imz}| = |f(z)| \leq |f(z)| |e^{imz}|$$

con lo cual reducimos al de una función racional.

**Ejemplo:** Comprobemos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx \cos mx}{x^2 + k^2} = \frac{\pi}{k} e^{-km} \quad \text{y} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx \operatorname{sen} mx}{x^2 + k^2} = 0$$

es fácil ver que el polo simple de la continuación analítica de  $f(x)$  es  $z_0 = ik$  y su residuo será

$$f(z) = \frac{e^{imz}}{z^2 + k^2} \quad \Rightarrow z_0 = ik \quad \Rightarrow \operatorname{Res} \frac{e^{imz}}{z^2 + k^2} \Big|_{z=ik} = \frac{e^{imz}}{2z} \Big|_{z=ik} = \frac{e^{-mk}}{2ik}$$

y por lo tanto

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{e^{imx}}{x^2 + k^2} = 2i\pi \frac{e^{-mk}}{2ik} = \frac{\pi}{k} e^{-mk}$$

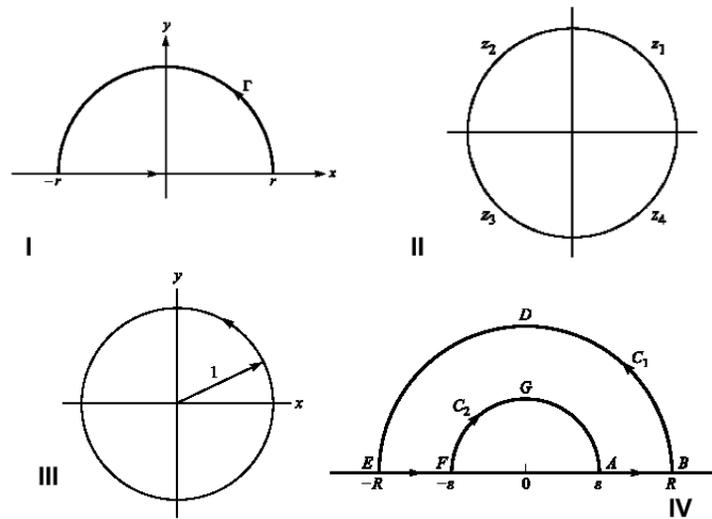


Figura 2.8: Circuitos y evaluación de integrales reales, impropias

**Ejemplo:** Evalúe

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{x \operatorname{sen} \pi x}{x^2 + 2x + 5}$$

Partimos de la continuación analítica de

$$f(x) \rightarrow f(z) = \frac{ze^{iz\pi}}{z^2 + 2z + 5} \Rightarrow z_{\pm 0} = -1 \pm 2i \Rightarrow \oint_C dz \frac{ze^{iz\pi}}{z^2 + 2z + 5} = \operatorname{Res} \frac{ze^{iz\pi}}{z^2 + 2z + 5} \Big|_{z=-1+2i}$$

ya que ese es el único polo encerrado por la circulación  $\Gamma$ . Calculando el residuo tendremos

$$\operatorname{Res} \frac{ze^{iz\pi}}{z^2 + 2z + 5} \Big|_{z=-1+2i} = \lim_{z \rightarrow -1+2i} \left( (z + 1 - 2i) \frac{ze^{iz\pi}}{z^2 + 2z + 5} \right) = (-1 + 2i) \frac{e^{-\pi(2+i)}}{4i}$$

con lo cual

$$\oint_C dz \frac{ze^{iz\pi}}{z^2 + 2z + 5} = \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{x \cos \pi x}{x^2 + 2x + 5} + i \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{x \operatorname{sen} \pi x}{x^2 + 2x + 5} = 2i\pi(-1 + 2i) \frac{e^{-\pi(2+i)}}{4i} = \frac{\pi}{2}(1 - 2i)e^{-2\pi}$$

igualando parte real e imaginaria tendremos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{x \cos \pi x}{x^2 + 2x + 5} = \frac{\pi}{2}e^{-2\pi} \quad \text{y} \quad \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{x \operatorname{sen} \pi x}{x^2 + 2x + 5} = -\pi e^{-2\pi}$$

**Ejercicios:** Compruebe que

$$\text{Para } m > 0 \quad \int_0^{\infty} dx \frac{\cos mx}{(x^2 + 1)^2} = \frac{\pi e^{-m}(1 + m)}{4} \quad \text{y} \quad \int_0^{\infty} dx \frac{\cos 2\pi x}{x^4 + x^2 + 1} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} e^{-\pi/\sqrt{3}}$$

## Otras Integrales Impropias

Existen integrales definidas para las cuales el integrando se hace infinito para un determinado punto en el rango de integración. Esto es, en general

$$\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| \rightarrow \infty \Rightarrow \int_a^b dx f(x) = \lim_{\zeta \rightarrow 0} \int_a^{x_0-\zeta} dx f(x) + \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{x_0+\xi}^b dx f(x)$$

donde  $\zeta$  y  $\xi$  tienden a cero de forma independiente, es decir, ambos límites se efectúan independientemente. Ahora bien, puede darse el caso que uno o ambos límites no existan pero si existe

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( \int_a^{x_0-\epsilon} dx f(x) + \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{x_0+\epsilon}^b dx f(x) \right) \Leftrightarrow V.P. \int_a^b dx f(x)$$

Diremos entonces que existe el *Valor Principal de Cauchy* para esa integral. La estrategia en estos casos será diseñar un circuito tal que evite los polos de la extensión analítica de la función. Normalmente se establece este recorrido rodeando los polos con arcos de circunferencia cuyos radios luego tenderán a cero. Veamos con un ejemplo esta estrategia de circunavegación.

**Ejemplo:** Consideremos que queremos evaluar la siguiente integral

$$\int_0^{\infty} dx \frac{\text{sen } x}{x} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$$

Si bien el límite está definido, cuando hacemos la extensión analítica<sup>10</sup>  $f(x) = \text{sen } x/x \rightarrow f(z) = e^{iz}/z$  la función compleja presenta un polo simple en  $z = 0$ , con lo cual la integral compleja presenta un polo en la región de integración. Esto es

$$\int_0^{\infty} dx \frac{\text{sen } x}{x} \rightarrow \oint_C dz \frac{e^{iz}}{z} = \int_{-R}^{-\epsilon} dx \frac{e^{ix}}{x} + \int_{C_2} dz \frac{e^{iz}}{z} + \int_{\epsilon}^R dx \frac{e^{ix}}{x} + \int_{C_1} dz \frac{e^{iz}}{z} = 0$$

donde hemos construido un circuito que rodea el polo  $z = 0$  (cuadrante *IV* de la figura 2.8.). Es claro que  $\oint_C dz \frac{e^{iz}}{z} = 0$  porque la región no contiene ningún polo.

Ahora mostraremos que  $\int_{C_1} dz \frac{e^{iz}}{z} \rightarrow 0$ , cuando  $R \rightarrow \infty$ . Para ello, convertimos

$$z = Re^{i\theta} \Rightarrow dz/z = id\theta,$$

entonces

$$\left| \int_{C_1} dz \frac{e^{iz}}{z} \right| = \left| \int_0^{\pi} d\theta ie^{iz} \right| \leq \int_0^{\pi} d\theta |e^{iz}| = \int_0^{\pi} d\theta \underbrace{|e^{iR \cos \theta}|}_1 e^{-R \text{sen } \theta} = \int_0^{\pi} d\theta e^{-R \text{sen } \theta}$$

con lo cual

$$\mathcal{I}_1 = \int_0^{\pi} d\theta |e^{iz}| = \int_0^{\pi} d\theta e^{-R \text{sen } \theta} = 2 \int_0^{\pi/2} d\theta e^{-R \text{sen } \theta} = 2 \left[ \int_0^{\zeta} d\theta \underbrace{e^{-R \text{sen } \theta}}_{I_1} + \int_{\zeta}^{\pi/2} d\theta \underbrace{e^{-R \text{sen } \theta}}_{I_2} \right]$$

<sup>10</sup>Nótese que la extensión analítica ha sido  $f(x) = \text{sen } x/x \rightarrow f(z) = e^{iz}/z$  y no  $f(x) = \text{sen } x/x \rightarrow f(z) = \text{sen } z/z$ . La razón de esta selección se fundamenta en el comportamiento patológico (oscilante) de la función seno en infinito.

para  $0 \leq \zeta \leq \pi/2$ .

Es claro que  $e^{-R\text{sen } \theta}$  es una función decreciente en  $\theta$  y como estamos tratando de demostrar que la integral a lo largo del circuito se anula  $\mathcal{I}_1 \rightarrow 0$ , podremos considerar los máximos valores para  $I_1$  y  $I_2$  en el entorno de integración y fijarlos como constantes, al hacer esto tendremos los máximos valores que podrán tomar las integrales respectivas. Los máximos valores para  $I_1$  y  $I_2$ , son, 1 y  $e^{-R\zeta}$ .

Entonces,

$$\mathcal{I}_1 = \int_0^\pi d\theta |e^{iz}| \leq 2 \left[ \int_0^\zeta d\theta + e^{-R\text{sen } \zeta} \int_\zeta^{\pi/2} d\theta \right] = 2 \left[ \zeta + e^{-R\text{sen } \zeta} \left( \frac{\pi}{2} - \zeta \right) \right] < 2\zeta + \pi e^{-R\text{sen } \zeta}$$

Al considerar que  $\zeta \rightarrow 0$  y  $R \rightarrow \infty$  comprobamos que  $\mathcal{I}_1 \rightarrow 0$ .

Seguidamente nos toca demostrar que  $\mathcal{I}_2 = \int_{C_2} dz \frac{e^{iz}}{z} \rightarrow 0$  cuando  $\epsilon \rightarrow 0$ . Para este caso  $z = \epsilon e^{i\theta}$  y como siempre,  $dz/z = i d\theta$ , entonces la integral

$$\mathcal{I}_2 = \int_{C_2} dz \frac{e^{iz}}{z} = \int_0^\pi d\theta i e^{i\epsilon \exp(i\theta)} \Rightarrow \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathcal{I}_2 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^\pi d\theta i e^{i\epsilon \exp(i\theta)} = i\pi$$

Esto implica que

$$\oint_C dz \frac{e^{iz}}{z} = \int_{-R}^{-\epsilon} dx \frac{e^{ix}}{x} + i\pi + \int_\epsilon^R dx \frac{e^{ix}}{x} = 0 \quad \underbrace{\Rightarrow}_{x \rightarrow -x} \int_\epsilon^R dx \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{x} + i\pi = 0$$

con lo cual es claro que

$$\int_\epsilon^R dx \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{x} = -i\pi \Rightarrow 2i \int_\epsilon^R dx \frac{\text{sen } x}{x} = -i\pi \Rightarrow \int_0^\infty dx \frac{\text{sen } x}{x} = \frac{\pi}{2}$$

donde hemos hecho los límites  $R \rightarrow \infty$  y  $\epsilon \rightarrow 0$ .

**Ejercicios:** Comprobar las evaluaciones para las siguientes integrales

1.

$$\int_0^\infty dx \text{sen } x^2 = \int_0^\infty dx \cos x^2 = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}$$

2.

$$\int_0^\infty dx \frac{\ln x}{x^4 + 1} = -\frac{\pi^2 \sqrt{2}}{16}; \quad \int_0^\infty dx \frac{(\ln x)^2}{x^4 + 1} = \frac{3\pi^3 \sqrt{2}}{16}$$

3.

$$\int_0^\infty dx \frac{x^{-p}}{x^2 + 2x \cos \alpha + 1} = \left( \frac{\pi}{\text{sen } p\pi} \right) \left( \frac{\text{sen } p\alpha}{\text{sen } \alpha} \right)$$

## 2.15. Series de Polinomios Ortogonales

Enunciaremos un teorema debido a Weierstrass el cual garantiza que una función continua en un intervalo  $[a, b]$  puede ser aproximada uniformemente por una serie de polinomios. Por lo tanto, cualquier función continua podrá ser aproximada por combinaciones lineales de potencias.

El Teorema de aproximación polinómica de Weierstrass queda enunciado como sigue. Cualquier función continua  $f(x)$  en un intervalo cerrado  $x \in [a, b]$  podrá ser aproximada uniformemente por polinomios en ese mismo intervalo si, para un  $n$  suficientemente grande y un  $\epsilon$  suficientemente pequeño siempre se tiene que

$$|\mathcal{P}_n(x) - f(x)| < \epsilon \quad \forall x \in [a, b]$$

Aceptaremos este teorema sin demostración<sup>11</sup>, sin embargo este teorema nos permitirá desarrollar las secciones siguientes.

## 2.16. Polinomios de Legendre

El primero de los ejemplos de una base ortonormal de polinomios en la cual podremos expresar cualquier función continua en el intervalo cerrado  $x \in [-1, 1]$  serán los *Polinomios de Legendre*. Estos vienen contruidos a partir de la Fórmula de Rodrigues

$$P_n(x) = \frac{1}{n!2^n} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

con  $P_0(x) = 1$ .

Es decir

$$\begin{array}{ll} P_0(x) = 1 & P_1(x) = x \\ P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1) & P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) \\ P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3) & P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x) \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

### 2.16.1. Generalidades de los Polinomios de Legendre

Es fácil comprobar que los polinomios de Legendre son mutuamente ortogonales para un producto interno definido de la siguiente manera

$$\int_{-1}^1 P_n(x)P_m(x)dx = \frac{2}{2n+1}\delta_{nm}.$$

Donde la función delta de Kronecker es  $\delta_{\alpha\beta} = 0$  si  $\alpha \neq \beta$ ; y  $\delta_{\beta\beta} = 1$ . La norma es definida por

$$\int_{-1}^1 P_n^2(x)dx = \frac{2}{2n+1}$$

nótese que los polinomios de Legendre, calculados a partir de la Fórmula de Rodrigues no están normalizados.

#### Ejemplos:

1.

$$\int_{-1}^1 P_1(x) P_2(x) dx = \int_{-1}^1 [x] \left[ \frac{1}{2} (3x^2 - 1) \right] dx = \int_{-1}^1 \left( \frac{3}{2}x^3 - \frac{1}{2}x \right) dx = 0.$$

<sup>11</sup>Consultar: Byron, F.W. y Fuller W.F. (1970) **Mathematics of Classical and Quantum Physics** y Cushing, J. (1975) **Applied Analytical Mathematics for Physical Sciences**.

2.

$$\int_{-1}^1 P_2(x) P_2(x) dx = \int_{-1}^1 \left[ \frac{1}{2} (3x^2 - 1) \right] \left[ \frac{1}{2} (3x^2 - 1) \right] dx = \int_{-1}^1 \left( \frac{9}{4} x^4 - \frac{3}{2} x^2 + \frac{1}{4} \right) dx = \frac{2}{5}.$$

Al ser los Polinomios de Legendre un conjunto completo de funciones, ellos expanden el espacio de funciones continuas en el intervalo cerrado  $x \in [-1, 1]$ . Por ello cualquier función en el intervalo  $[-1, 1]$  puede ser expresada en esa base.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\frac{2k+1}{2} \left[ \int_{-1}^1 f(t) P_k(t) dt \right]}_{a_k} P_k(x),$$

los primeros términos son:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(t) dt + \frac{3}{2} \left[ \int_{-1}^1 t f(t) dt \right] P_1(x) + \frac{5}{4} \left[ \int_{-1}^1 (3t^2 - 1) f(t) dt \right] P_2(x) \\ &+ \frac{7}{4} \left[ \int_{-1}^1 (5t^3 - 3t) f(t) dt \right] P_3(x) + \frac{9}{16} \left[ \int_{-1}^1 (35t^4 - 30t^2 + 3) f(t) dt \right] P_4(x) + \dots \end{aligned}$$

### Ejemplos

1. Si  $f(x)$  es un polinomio

$$f(x) = \sum_{n=0}^m b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x),$$

entonces, no se requiere hacer ninguna integral por cuanto los coeficientes  $a_n$  se determinan a través de un sistema de ecuaciones algebraicas. Para el caso de  $f(x) = x^2$  tendremos

$$\begin{aligned} f(x) = x^2 &= a_0 P_0(x) + a_1 P_1(x) + a_2 P_2(x) \\ &= a_0 + a_1 x + \frac{1}{2} a_2 (3x^2 - 1) \\ &= \left( a_0 - \frac{1}{2} a_2 \right) + a_1 x + \frac{3}{2} a_2 x^2 \Rightarrow a_0 = \frac{1}{3}, a_1 = 0, a_2 = \frac{2}{3} \\ &= \frac{1}{3} P_0(x) + \frac{2}{3} P_2(x). \end{aligned}$$

2. En el caso de una función mas complicada

$$f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{2}},$$

por un lado

$$\int_{-1}^1 f(x) P_k(x) dx = \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-x}{2}} P_k(x) dx$$

la expansión en series de Legendre quedaría como

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{1-x}{2}} &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-t}{2}} dt + \frac{3}{2} \left[ \int_{-1}^1 t \sqrt{\frac{1-t}{2}} dt \right] P_1(x) + \frac{5}{4} \left[ \int_{-1}^1 (3t^2 - 1) \sqrt{\frac{1-t}{2}} dt \right] P_2(x) \\ &+ \frac{7}{4} \left[ \int_{-1}^1 (5t^3 - 3t) \sqrt{\frac{1-t}{2}} dt \right] P_3(x) + \frac{9}{16} \left[ \int_{-1}^1 (35t^4 - 30t^2 + 3) \sqrt{\frac{1-t}{2}} dt \right] P_4(x) + \dots \\ &= \frac{2}{3} P_0(x) - \frac{2}{5} P_1(x) - \frac{2}{21} P_2(x) - \frac{2}{45} P_3(x) - \frac{2}{77} P_4(x) - \frac{2}{117} P_5(x) - \dots \\ &= \frac{2}{3} P_0(x) - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_n(x)}{(2n-1)(2n+3)}. \end{aligned}$$

Antes de entrar en el detalle de las propiedades de estos polinomios, hay que enfatizar que los Polinomios de Legendre constituyen la única base ortogonal para un espacio de Hilbert con un producto interno definido como el producto simple de funciones en el intervalo cerrado. Al ortonormalizar mediante Gram Schmidt la base  $\{1, x, x^2, x^3, \dots, x^n, \dots\}$  del espacio de polinomios,  $\mathcal{P}^n$ , de grado  $n$  en el intervalo  $[-1, 1]$ , con el producto interno definido por  $\int_{-1}^1 dx f(x) g(x)$  se obtienen los polinomios de Legendre.

Los polinomios de Legendre surgen, originalmente, como soluciones a la ecuación diferencial ordinaria del tipo

$$\frac{d}{dx} \left[ (1-x^2) \frac{dy}{dx} \right] + \lambda y = 0, \quad -1 \leq x \leq 1.$$

o de manera equivalente a ecuaciones como

$$(1-x^2) \frac{d^2 P_n(x)}{dx^2} - 2x \frac{dP_n(x)}{dx} + n(n+1) P_n(x) = 0,$$

donde  $y = P_n(x)$  y  $\lambda = n(n+1)$ .

La siguiente tabla muestra algunas ecuaciones diferenciales con sus respectivas soluciones

$n$	Ecuación de Legendre	Solución
0	$(1-x^2) \frac{d^2 P_0(x)}{dx^2} - 2x \frac{dP_0(x)}{dx} = 0$	$P_0(x) = 1$
1	$(1-x^2) \frac{d^2 P_1(x)}{dx^2} - 2x \frac{dP_1(x)}{dx} + 2 P_1(x) = 0$	$P_1(x) = x$
2	$(1-x^2) \frac{d^2 P_2(x)}{dx^2} - 2x \frac{dP_2(x)}{dx} + 6 P_2(x) = 0$	$P_2(x) = 1 - 3x^2$
3	$(1-x^2) \frac{d^2 P_3(x)}{dx^2} - 2x \frac{dP_3(x)}{dx} + 12 P_3(x) = 0$	$P_3(x) = x - \frac{5}{3}x^3$
4	$(1-x^2) \frac{d^2 P_4(x)}{dx^2} - 2x \frac{dP_4(x)}{dx} + 20 P_4(x) = 0$	$P_4(x) = 1 - 10x^2 + \frac{35}{3}x^4$

### 2.16.2. Relación de Recurrencia

Supongamos que conocemos todos los polinomios de Legendre hasta  $P_n(x)$  y queremos generar el próximo. Obviamente ese polinomio será de grado  $n+1$ . Nos plantemos generarlo a partir de  $xP_n(x)$ . Como estos

polinomios son base del espacio de funciones, entonces

$$xP_n(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{2k+1}{2} \left[ \int_{-1}^1 P_k(t)tP_n(t) dt \right] P_k(x),$$

Observando con algo más de detalle

$$\begin{aligned} xP_n(x) &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 tP_n(t)dt + \frac{3}{2} \left[ \int_{-1}^1 t^2P_n(t)dt \right] P_1(x) + \frac{5}{4} \left[ \int_{-1}^1 (3t^3 - t)P_n(t)dt \right] P_2(x) \\ &+ \frac{7}{4} \left[ \int_{-1}^1 (5t^4 - 3t^2)P_n(t)dt \right] P_3(x) + \frac{9}{16} \left[ \int_{-1}^1 (35t^5 - 30t^3 + 3t)P_n(t)dt \right] P_4(x) + \dots \end{aligned}$$

Notemos que

$$\int_{-1}^1 P_n(t)tP_n(t)dt = \int_{-1}^1 tP_n^2(t)dt,$$

por lo tanto, el integrando es una función impar. Consideremos algunos casos:

Para  $n = 0$

$$xP_0(x) = \frac{3}{2} \left[ \int_{-1}^1 t^2 dt \right] P_1(x) = P_1(x)$$

Para  $n = 1$

$$xP_1(x) = \frac{1}{2} \left[ \int_{-1}^1 t^2 dt \right] + \frac{5}{4} \left[ \int_{-1}^1 (3t^4 - t^2) dt \right] P_2(x) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}P_2(x)$$

Para  $n = 2$

$$\begin{aligned} xP_2(x) &= \frac{3}{4} \left[ \int_{-1}^1 (3t^4 - t^2) dt \right] P_1(x) + \frac{7}{16} \left[ \int_{-1}^1 (5t^3 - 3t)(3t^3 - t) dt \right] P_3(x) \\ &= \frac{2}{5}P_1(x) + \frac{3}{5}P_3(x). \end{aligned}$$

Para  $n = 3$

$$xP_3(x) = \frac{3}{7}P_2(x) + \frac{4}{7}P_4(x).$$

Se puede apreciar que

$$\int_{-1}^1 P_n(x)xP_k(x)dx = 0, \text{ para } k < n - 1.$$

Esto implica que sobreviven únicamente tres términos

$$xP_n(x) = AP_{n+1}(x) + BP_{n-1}(x).$$

Desarrollando con la fórmula de Rodrigues

$$\begin{aligned} \frac{x}{n!2^n} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n &= \frac{A}{(n+1)!2^{n+1}} \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} (x^2 - 1)^{n+1} + \frac{B}{(n-1)!2^{n-1}} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (x^2 - 1)^{n-1}, \\ x \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n &= \frac{A}{2(n+1)} \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} (x^2 - 1)^{n+1} + 2nB \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (x^2 - 1)^{n-1}. \end{aligned}$$

Igualando coeficientes resulta

$$A = \frac{n+1}{2n+1}, \quad B = \frac{n}{2n+1}$$

La relación de recurrencia se puede obtener entonces de:

$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x).$$

### 2.16.3. Norma de los Polinomios de Legendre

Conociendo que la ortogonalidad de los polinomios de Legendre y la relación de recurrencia, procedemos encontrar el valor de su norma

$$\int_{-1}^1 P_n^2(x)dx = \frac{2}{2n+1}$$

De la relación de recurrencia cambiando  $n \rightarrow n-1$  se tiene

$$\begin{aligned} nP_n(x) &= (2n-1)xP_{n-1}(x) - (n-1)P_{n-2}(x), \\ (2n+1)P_n(x)nP_n(x) &= (2n+1)P_n(x)[(2n-1)xP_{n-1}(x) - (n-1)P_{n-2}(x)], \end{aligned} \quad (2.52)$$

ahora multiplicamos la relación de recurrencia por  $(2n-1)P_{n-1}(x)$  para obtener

$$(2n-1)P_{n-1}(x)(n+1)P_{n+1}(x) = (2n-1)P_{n-1}(x)[(2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x)], \quad (2.53)$$

restando miembro a miembro (2.52) - (2.53) obtenemos :

$$(2n+1)[nP_n^2(x) + (n-1)P_n(x)P_{n-2}(x)] - (2n-1)[(n+1)P_{n-1}(x)P_{n+1}(x) + nP_{n-1}^2(x)] = 0,$$

lo que es igual a:

$$\begin{aligned} (2n+1)[nP_n^2(x) + (n-1)P_n(x)P_{n-2}(x)] &= (2n-1)[(n+1)P_{n-1}(x)P_{n+1}(x) + nP_{n-1}^2(x)], \\ P_n^2(x) + \frac{(n-1)}{n}P_n(x)P_{n-2}(x) &= \frac{2n-1}{2n+1} \left[ \frac{(n+1)}{n}P_{n-1}(x)P_{n+1}(x) + P_{n-1}^2(x) \right], \end{aligned}$$

integrando y considerando la ortogonalidad

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 P_n^2(x)dx &= \frac{2n-1}{2n+1} \left[ \int_{-1}^1 P_{n-1}^2(x)dx \right] \\ \int_{-1}^1 P_n^2(x)dx &= \left( \frac{2n-1}{2n+1} \right) \left[ \left( \frac{2n-3}{2n-1} \right) \int_{-1}^1 P_{n-2}^2(x)dx \right] \\ \int_{-1}^1 P_n^2(x)dx &= \left( \frac{2n-1}{2n+1} \right) \left[ \left( \frac{2n-3}{2n-1} \right) \left( \frac{2n-5}{2n-3} \right) \int_{-1}^1 P_{n-3}^2(x)dx \right] \end{aligned}$$

continuando con este proceso

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 P_n^2(x)dx &= \frac{3}{2n+1} \left[ \int_{-1}^1 P_1^2(x)dx \right] = \frac{3}{2n+1} \left[ \frac{2}{3} \right] \\ \int_{-1}^1 P_n^2(x)dx &= \frac{2}{2n+1}. \end{aligned}$$

### 2.16.4. Función Generatriz de los Polinomios de Legendre

Se puede encontrar una función generatriz  $\mathcal{P}(t, x)$  de los polinomios de Legendre, es decir una función que tenga la forma:

$$\mathcal{P}(t, x) = \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = P_0(x) + P_1(x)t + P_2(x)t^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n, \quad |t| < 1, |x| \leq 1,$$

para la cual los  $P_n(x)$  son los coeficientes de su desarrollo en series de potencias. Esta serie converge para  $|2xt + t^2| < 1$ . Para demostrar que el desarrollo en serie de la función  $\mathcal{G}(t, x)$  tiene como coeficientes a los  $P_n(x)$  partimos de que:

$$\mathcal{P}(t, x) = \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{P}(t, x)}{\partial t} = \frac{t-x}{(1-2xt+t^2)^{3/2}}$$

combinando estas dos expresiones, resulta

$$(t-x)\mathcal{P}(t, x) + (1-2xt+t^2)\frac{\partial \mathcal{P}(t, x)}{\partial t} = 0$$

y, consecuentemente

$$(t-x)\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n + (1-2xt+t^2)\sum_{n=1}^{\infty} nP_n(x)t^{n-1} = 0.$$

Multiplicando y acomodando queda

$$(t-x)P_0(x) + (t-x)\sum_{n=1}^{\infty} P_n(x)t^n + \sum_{n=1}^{\infty} nP_n(x)t^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} 2xnP_n(x)t^n + \sum_{n=1}^{\infty} nP_n(x)t^{n+1} = 0,$$

$$\begin{aligned} (t-x)P_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} P_n(x)t^{n+1} - \sum_{n=1}^{\infty} xP_n(x)t^n + \sum_{n=1}^{\infty} nP_n(x)t^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} 2xnP_n(x)t^n \\ + \sum_{n=1}^{\infty} nP_n(x)t^{n+1} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (t-x)P_0(x) + \sum_{n=2}^{\infty} P_{n-1}(x)t^n - \sum_{n=1}^{\infty} xP_n(x)t^n + \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)P_{n+1}(x)t^n - \sum_{n=1}^{\infty} 2xnP_n(x)t^n \\ + \sum_{n=2}^{\infty} (n-1)P_{n-1}(x)t^n = 0, \end{aligned}$$

$$(t-x)P_0(x) + \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)P_{n+1}(x)t^n - \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1)xP_n(x)t^n + \sum_{n=2}^{\infty} nP_{n-1}(x)t^n = 0,$$

$$\begin{aligned} tP_0(x) - xP_0(x) + P_1(x) + 2P_2(x)t + \sum_{n=2}^{\infty} (n+1)P_{n+1}(x)t^n - 3xP_1(x)t - \sum_{n=2}^{\infty} (2n+1)xP_n(x)t^n \\ + \sum_{n=2}^{\infty} nP_{n-1}(x)t^n = 0 \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} & \left[ \underbrace{P_1(x) - x P_0(x)}_{=0} \right] + \left[ \underbrace{2P_2(x) - 3xP_1(x) + P_0(x)}_{=0} \right] t \\ & + \sum_{n=2}^{\infty} \left[ \underbrace{(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x)}_{=0} \right] t^n = 0 \end{aligned}$$

El primero de los términos se cumple siempre por cuanto  $P_0(x) = 1$  y  $P_1(x) = x$ . El tercer término conforma la relación de recurrencia para los polinomios de Legendre. Con esto queda demostrado que el desarrollo en series de potencias de la función generatriz, tiene como coeficientes a los polinomios de Legendre.

La función generatriz muestra su utilidad en la expansión de

$$f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{2}},$$

recordemos que por la definición del producto interno se tiene

$$\int_{-1}^1 f(x)P_k(x)dx = \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-x}{2}}P_k(x)dx.$$

Al formar el producto

$$\sqrt{\frac{1-x}{2}} \left[ \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} \right] = \sqrt{\frac{1-x}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} t^n P_n(x),$$

e integrando, se obtiene

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-x}{2}} \left[ \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} \right] dx = \sum_{n=0}^{\infty} t^n \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-x}{2}} P_n(x) dx \\ & \frac{1}{2t} \left[ 1+t - \frac{(1-t)^2}{2\sqrt{t}} \ln \left( \frac{1+\sqrt{t}}{1-\sqrt{t}} \right) \right] = \sum_{n=0}^{\infty} t^n \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-x}{2}} P_n(x) dx. \end{aligned}$$

Expandiendo el lado izquierdo en series de potencias de  $t$

$$\frac{4}{3} - 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{(4n^2-1)(2n+3)} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-x}{2}} P_n(x) dx$$

lo cual nos conduce, al igualar coeficientes a

$$\frac{4}{3} = \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-x}{2}} P_0(x) dx \quad \text{y} \quad \frac{-4}{(4n^2-1)(2n+3)} = \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-x}{2}} P_n(x) dx$$

y finalmente a la forma de la expansión en series

$$\sqrt{\frac{1-x}{2}} = \frac{2}{3} P_0(x) - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_n(x)}{(2n-1)(2n+3)}$$

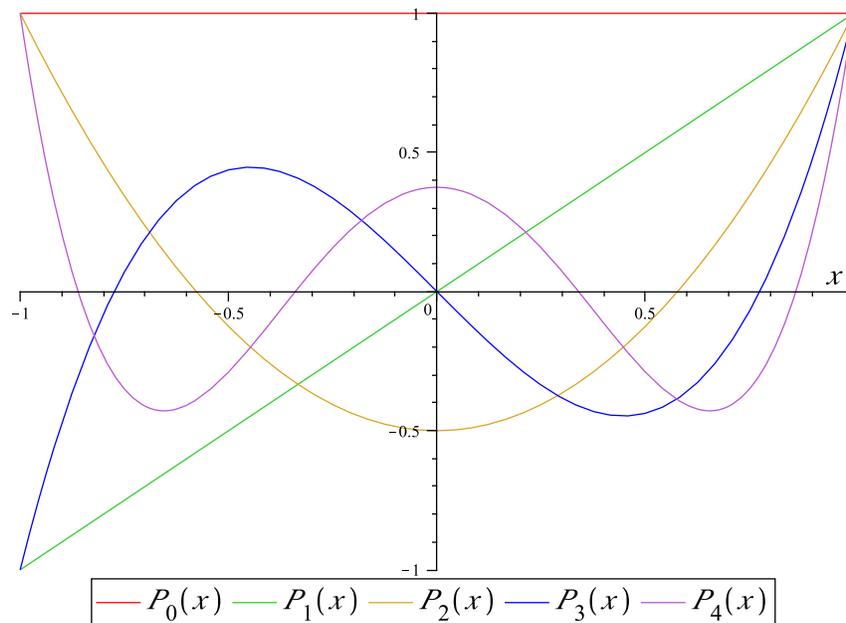


Figura 2.9: Polinomios de Legendre

### 2.16.5. Otras propiedades de los polinomios de Legendre

- $P_n(1) = 1$  y  $P_n(-1) = (-1)^n$ . Entonces se tiene lo que se conoce como la relación de paridad:  $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$  para todo  $n$ .
- $P_n(x)$  tiene  $n$  raíces en el intervalo  $(-1, 1)$ . Esta propiedad puede apreciarse para los primeros 5 polinomios en la figura 2.9.
- Tienen una representación integral de la forma

$$P_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi [x + \sqrt{x^2 - 1} \cos \varphi]^n d\varphi$$

- Cambios de variables inmediatos conllevan a ecuaciones diferenciales equivalentes
  - Forma autoadjunta

$$[(1 - x^2) y']' + \lambda(\lambda + 1) y = 0$$

- En coordenadas esféricas con  $u = P_n(\cos(\theta))$

$$\frac{1}{\text{sen}(\theta)} \frac{d}{d\theta} \left( \text{sen}(\theta) \frac{du}{d\theta} \right) + \lambda(\lambda + 1) u = 0$$

- En coordenadas esféricas con  $u = \sqrt{\text{sen} \theta} P_n(\cos \theta)$

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + \left[ \left( \lambda + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{4 \text{sen}^2(\theta)} \right] u = 0$$

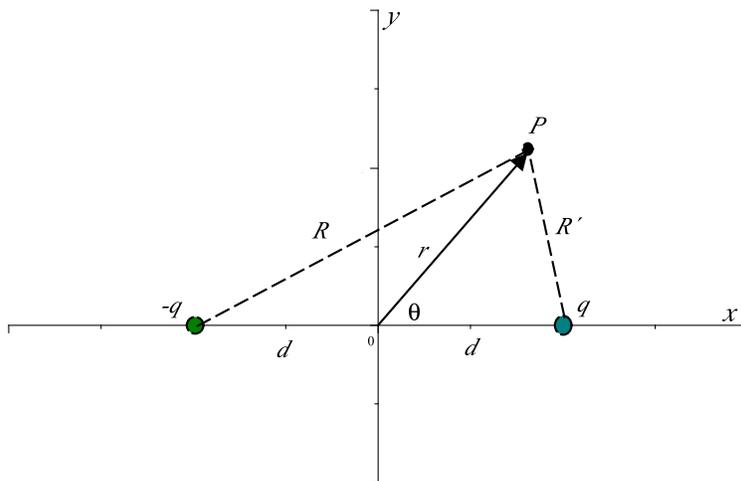


Figura 2.10: Potencial electrostático de un dipolo eléctrico

### 2.16.6. Potencial Electrostático de un Dipolo Eléctrico

En Física el ejemplo claro es el cálculo del potencial electrostático producido por dos cargas  $q_1 = +q$  y  $q_2 = -q$  separadas por una distancia  $2d$  en un punto  $P$  cualquiera de un plano  $(x, y)$ . El potencial en ese punto genérico viene dado por

$$V = q \left( \frac{1}{R'} - \frac{1}{R} \right)$$

Tal y como puede apreciarse de la figura 2.10

$$(R')^2 = r^2 + d^2 - 2r d \cos(\theta) \quad \text{y} \quad R^2 = r^2 + d^2 - 2r d \cos(\pi - \theta),$$

por lo cual

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{r} \left[ 1 - 2 \cos(\theta) \left( \frac{d}{r} \right) + \left( \frac{d}{r} \right)^2 \right]^{-1/2}$$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r} \left[ 1 - 2 \cos(\pi - \theta) \left( \frac{d}{r} \right) + \left( \frac{d}{r} \right)^2 \right]^{-1/2}$$

y consecuentemente

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos(\theta)) \left( \frac{d}{r} \right)^n$$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} P_n[\cos(\pi - \theta)] \left( \frac{d}{r} \right)^n = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(-\cos(\theta)) \left( \frac{d}{r} \right)^n$$

El potencial será

$$V = \frac{q}{r} \sum_{n=0}^{\infty} [P_n(\cos(\theta)) - P_n(-\cos(\theta))] \left( \frac{d}{r} \right)^n$$

donde todos los términos pares de  $P_n(\cos(\theta))$  se anulan y finalmente tendremos la expresión del potencial para cualquier punto del plano

$$V = \frac{2q}{r} \sum_{n=0}^{\infty} P_{2n+1}(\cos(\theta)) \left(\frac{d}{r}\right)^{2n+1}$$

Nos quedamos con el primer término de la serie, si

$$\frac{d}{r} \ll 1 \Rightarrow V \approx \frac{q}{r^2} 2d \cos(\theta).$$

### 2.16.7. Resumen de Propiedades Polinomios Legendre

Definición:	$P_n(x) = \frac{1}{n!2^n} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$
Ejemplos:	$P_0 \equiv 1; \quad P_1 = x; \quad P_2 = \frac{1}{2}(3x^2 - 1); \quad P_3 = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$
Relación de Recurrencia:	$(n + 1) P_{n+1}(x) = (2n + 1) x P_n(x) - n P_{n-1}(x)$
Ecuaciones Diferenciales:	$(1 - x^2) y'' - 2x y' + \lambda(\lambda + 1) y = 0$
	$\frac{1}{\sin(\theta)} \frac{d}{d\theta} \left( \sin(\theta) \frac{du}{d\theta} \right) + n(n + 1)u = 0; \quad u = P_n(\cos(\theta))$
Función Generatriz:	$\mathcal{P}(t, x) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2xt + t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n$
Representación Integral:	$P_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi [x + \sqrt{x^2 - 1} \cos \varphi]^n d\varphi$
Ortogonalidad:	$\int_{-1}^1 P_\alpha(x) P_\beta(x) dx = \delta_{\alpha\beta} \frac{2}{2\alpha + 1}$

```
Practicando con Maple:
> restart;
> plot([LegendreP(0,x),LegendreP(1,x),LegendreP(2,x),LegendreP(3,x),
LegendreP(4,x)],x=-1..1);
```

### 2.17. Polinomios de Hermite

Los polinomios de Hermite a diferencia de los de Legendre (y Tchevychev), vienen definidos en toda la recta real, vale decir,  $x \in (-\infty, \infty)$ , por lo cual la función peso  $w(x)$  en el producto interno deberá decrecer más rápido que  $|x|^n$ , para garantizar que la norma de los vectores en este espacio vectorial sea finita. La función más simple que cumple estos requisitos es  $w(x) = e^{-x^2}$  (también algunos autores utilizan  $w(x) = e^{-x^2/2}$ ) Esto es, el producto interno entre los polinomios de Hermite vendrá definido como

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx w(x) f(x) g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} f(x) g(x).$$

Otra vez, para este producto interno, si ortogonalizamos con Gram-Schmidt se obtienen los polinomios de Hermite. Al igual que el resto de los polinomios ortogonales, existe una fórmula de Rodrigues para los polinomios de Hermite

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2},$$

los cinco primeros polinomios de Hermite son los siguientes:

$$\begin{aligned} H_0(x) &= 1, & H_1(x) &= 2x \\ H_2(x) &= 4x^2 - 2, & H_3(x) &= 8x^3 - 12x, \\ H_4(x) &= 16x^4 - 48x^2 + 12, & H_5(x) &= 32x^5 - 160x^3 + 120x \end{aligned}$$

### 2.17.1. Generalidades de los Polinomios de Hermite

Los polinomios de Hermite serán ortogonales, pero no normales

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_\beta(x) H_\alpha(x) dx = 2^\alpha \alpha! \sqrt{\pi} \delta_{\alpha\beta},$$

por lo tanto:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_\alpha^2(x) dx = 2^\alpha \alpha! \sqrt{\pi}.$$

Donde la función delta de Kronecker es  $\delta_{\alpha\beta} = 0$  si  $\alpha \neq \beta$ ; y  $\delta_{\beta\beta} = 1$ .

Antes de desarrollar funciones en términos de los polinomios de Hermite, expondremos un par de teoremas sin demostración.

**Teorema 1:** Sean  $f$  y  $g$  dos funciones arbitrarias, cuando menos continuas a trozos en  $(-\infty, \infty)$  y que cumplen con

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f^2(x) dx < \infty \quad \wedge \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} g^2(x) dx < \infty$$

Entonces el conjunto de estas funciones forman un espacio vectorial euclideo  $\mathcal{I}_2^w$  con un producto interno definido por

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x)g(x) dx$$

Las funciones  $f(x)$  y  $g(x)$  se denominan cuadrado-integrables respecto al peso  $w$ . Es por ello que denotamos el espacio de funciones como  $\mathcal{I}_2^w$ .

**Teorema 2:** Si  $f(x)$  es una función continua arbitraria en  $\mathcal{I}_2^w$  entonces puede ser aproximada por un polinomio en ese mismo espacio. Es decir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |f(x) - p_n(x)| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} [f(x) - p_n(x)]^2 dx \right)^{1/2} = 0$$

Así, la expresión de una función arbitraria en la base de los polinomios de Hermite se reduce a

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k k! \sqrt{\pi}} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} f(t) H_k(t) dx \right] H_k(x),$$

donde

$$a_k = \frac{1}{2^k k! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} f(t) H_k(t) dx.$$

**Ejemplo:** Si  $f(x) = x^2$

$$f(x) = x^2 = \sum_{k=0}^2 b_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k H_k(x)$$

$$\begin{aligned} f(x) = x^2 &= a_0 H_0(x) + a_1 H_1(x) + a_2 H_2(x) \\ &= a_0 + a_1(2x) + a_2(4x^2 - 1) \\ &= (a_0 - a_2) + 2a_1x + 4a_2x^2 \Rightarrow a_0 = \frac{1}{4}, a_1 = 0, a_2 = \frac{1}{4}. \\ &= \frac{1}{4} H_0(x) + \frac{1}{4} H_2(x) \end{aligned}$$

Si generalizamos para funciones del tipo  $f(x) = x^{2p}$  con  $p = 1, 2, 3, \dots$ , entonces

$$f(x) = x^{2p} = \sum_{k=0}^{2p} b_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} H_{2k}(x),$$

por lo tanto

$$a_{2k} = \frac{1}{2^{2k} (2k)! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} x^{2p} H_{2k}(x) dx = \frac{1}{2^{2k} (2k)! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^{2p} \frac{d^{2k}}{dx^{2k}} e^{-x^2} dx.$$

Una integración por partes estratégica muestra que:

$$a_{2k} = \frac{1}{2^{2k} (2k)! \sqrt{\pi}} \left\{ x^{2p} \frac{d^{2k-1}}{dx^{2k-1}} e^{-x^2} \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} 2px^{2p-1} \frac{d^{2k-1}}{dx^{2k-1}} e^{-x^2} dx \right\}.$$

El primer término de la resta se anula debido a la definición de los polinomios de Hermite

$$x^{2p} \frac{d^{2k-1}}{dx^{2k-1}} e^{-x^2} \Big|_{-\infty}^{\infty} = x^{2p} (-1)^{2k-1} e^{-x^2} H_{2k-1}(x) \Big|_{-\infty}^{\infty}.$$

Repetiendo el proceso  $2k$  veces, tendremos

$$a_{2k} = \frac{1}{2^{2k} (2k)! \sqrt{\pi}} \frac{(2p)!}{(2p-2k)!} \int_{-\infty}^{\infty} x^{2p-2k} e^{-x^2} dx$$

si en la integral hacemos  $x = \sqrt{t}$  obtenemos

$$\begin{aligned} a_{2k} &= \frac{1}{2^{2k} (2k)! \sqrt{\pi}} \frac{(2p)!}{(2p-2k)!} \int_{-\infty}^{\infty} t^{p-k} e^{-t} \frac{dt}{2\sqrt{t}} \\ &= \frac{1}{2^{2k+1} (2k)! \sqrt{\pi}} \frac{(2p)!}{(2p-2k)!} \int_{-\infty}^{\infty} t^{p-k-\frac{1}{2}} e^{-t} dt \end{aligned}$$

y utilizando la definición  $\Gamma(z) \equiv \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \equiv (z-1)!$ , queda como

$$a_{2k} = \frac{1}{2^{2k+1} (2k)! \sqrt{\pi}} \frac{(2p)!}{(2p-2k)!} \Gamma\left(p-k+\frac{1}{2}\right).$$

Ahora, recurrimos a la propiedad de “duplicación” de la Función Gamma, i.e.

$$2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}\Gamma(2z)$$

tenemos que

$$2^{2p-2k}\Gamma\left(p-k+\frac{1}{2}\right)(p-k)!=\sqrt{\pi}(2p-2k)!$$

quedan entonces los coeficientes determinados como

$$a_{2k}=\frac{(2p)!}{2^{2p+1}(2k)!(p-k)!}$$

y, por lo tanto el desarrollo en la base de los polinomios de Hermite

$$f(x)=x^{2p}=\frac{(2p)!}{2^{2p+1}}\sum_{k=0}^p\frac{H_{2k}(x)}{(2k)!(p-k)!}\quad -\infty < x < \infty.$$

Muestre que del mismo modo se puede encontrar

$$f(x)=x^{2p+1}=\frac{(2p-1)!}{2^{2p-1}}\sum_{k=0}^p\frac{H_{2k+1}(x)}{(2k+1)!(p-k)!}\quad -\infty < x < \infty.$$

Si  $f(x)=e^{-a^2x^2}$  con  $\operatorname{Re} a^2 > -1$ . Otra vez

$$f(x)=e^{-a^2x^2}=\sum_{k=0}^{\infty}a_{2k}H_{2k}(x)$$

entonces

$$a_{2k}=\frac{1}{2^{2k}(2k)!\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(a^2+1)x^2}H_{2k}(x)dx$$

Sustituyendo  $H_{2k}(x)$  por su expresión integral tendremos

$$\begin{aligned} a_{2k} &= \frac{1}{2^{2k}(2k)!\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(a^2+1)x^2}\left[\frac{2^{2k+1}(-1)^k e^{x^2}}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}e^{-t^2}t^{2k}\cos 2xt\,dt\right]dx \\ &= \frac{2(-1)^k}{\pi(2k)!}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-a^2x^2}\left[\int_0^{\infty}e^{-t^2}t^{2k}\cos 2xt\,dt\right]dx \\ &\equiv \frac{2(-1)^k}{\pi(2k)!}\int_0^{\infty}e^{-t^2}t^{2k}\left[\int_{-\infty}^{\infty}e^{-a^2x^2}\cos 2xt\,dx\right]dt \\ &= \frac{2(-1)^k}{\pi(2k)!}\int_0^{\infty}e^{-t^2}t^{2k}\left[\sqrt{\frac{\pi}{a^2}}e^{-t^2/a^2}\right]dt = \\ &= \frac{2(-1)^k}{\sqrt{\pi}(2k)!a}\int_0^{\infty}e^{-t^2(1+a^{-2})}t^{2k}\,dt \\ &= \frac{(-1)^k}{\sqrt{\pi}(2k)!}\frac{a^{2k}}{(1+a^2)^{k+1/2}}\int_0^{\infty}e^{-s}s^{k-\frac{1}{2}}\,ds \quad \leftarrow t^2(1+a^{-2})=s \\ &= \frac{(-1)^k}{\sqrt{\pi}(2k)!}\frac{a^{2k}}{(1+a^2)^{k+1/2}}\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

y ahora usando, otra vez la propiedad de “duplicación” de la función gamma,

$$2^{2k} \Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right) k! = \sqrt{\pi} (2k)!$$

obtenemos

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k a^{2k}}{2^{2k} k! (1 + a^2)^{k+1/2}}$$

por lo tanto

$$f(x) = e^{-a^2 x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k a^{2k}}{2^{2k} k! (1 + a^2)^{k+1/2}} H_{2k}(x)$$

Al igual que los polinomios de Legendre, los de Hermite, surgen también en sus orígenes como soluciones a la ecuación diferencial ordinaria del tipo

$$\frac{d^2 H_n(x)}{dx^2} - 2x \frac{dH_n(x)}{dx} + nH_n(x) = 0$$

Vale decir:

$n$	Ecuación de Hermite	Solución
0	$\frac{d^2 H_0(x)}{dx^2} - 2x \frac{dH_0(x)}{dx} = 0$	$H_0(x) = 1$
1	$\frac{d^2 H_1(x)}{dx^2} - 2x \frac{dH_1(x)}{dx} + 2H_1(x) = 0$	$H_1(x) = 2x$
2	$\frac{d^2 H_2(x)}{dx^2} - 2x \frac{dH_2(x)}{dx} + 4H_2(x) = 0$	$H_2(x) = 4x^2 - 2$
3	$\frac{d^2 H_3(x)}{dx^2} - 2x \frac{dH_3(x)}{dx} + 6H_3(x) = 0$	$H_3(x) = 8x^3 - 12x$
4	$\frac{d^2 H_4(x)}{dx^2} - 2x \frac{dH_4(x)}{dx} + 8H_4(x) = 0$	$H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12$

### 2.17.2. Función Generatriz de los Polinomios de Hermite

Se puede encontrar una función generatriz  $\mathcal{H}(t, x)$  de los polinomios de Hermite:

$$\mathcal{H}(t, x) = e^{2xt-t^2} = H_0(x) + H_1(x)t + \frac{H_2(x)}{2} t^2 + \frac{H_3(x)}{3!} t^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n$$

para la cual los  $H_n(x)$  son los coeficientes de su desarrollo en series de potencias. Es fácil darse cuenta que esta expresión proviene del desarrollo en Serie de Taylor

$$\mathcal{H}(t, x) = e^{2xt-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[ \frac{\partial^n \mathcal{H}(t, x)}{\partial t^n} \right]_{t=0} t^n \quad \|t\| < \infty$$

para lo cual

$$\left[ \frac{\partial^n \mathcal{H}(t, x)}{\partial t^n} \right]_{t=0} = e^{x^2} \left[ \frac{\partial^n}{\partial t^n} e^{-(x-t)^2} \right]_{t=0} = (-1)^n e^{x^2} \left[ \frac{d^n}{du^n} e^{-(u)^2} \right]_{u=x} = H_n(x)$$

### 2.17.3. Relación de Recurrencia

A partir de la función generatriz se puede construir la siguiente identidad

$$\frac{\partial \mathcal{H}(t, x)}{\partial t} = (2x - 2t) \mathcal{H}$$

y utilizando el desarrollo en series de potencias en  $t$  tendremos,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} n t^{n-1} &= 2x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^{n+1}, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} n t^{n-1} - 2x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^{n+1} &= 0, \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_{n+1}(x)}{(n+1)!} (n+1) t^n - 2x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_{n-1}(x)}{(n-1)!} t^n &= 0, \\ H_1(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_{n+1}(x)}{(n+1)!} (n+1) t^n - 2x H_0(x) - 2x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_{n-1}(x)}{(n-1)!} t^n &= 0, \\ \underbrace{H_1(x) - 2x H_0(x)}_{=0} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{H_{n+1}(x)}{(n+1)!} (n+1) - 2x \frac{H_n(x)}{n!} + \frac{H_{n-1}(x)}{(n-1)!} \right] t^n &= 0, \end{aligned}$$

es decir:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[ \underbrace{\frac{H_{n+1}(x)}{(n+1)!} (n+1) - 2x \frac{H_n(x)}{n!} + \frac{H_{n-1}(x)}{(n-1)!}}_{=0} \right] t^n = 0.$$

Por lo tanto:

$$\frac{H_{n+1}(x)}{n!} - 2x \frac{H_n(x)}{n!} + \frac{H_{n-1}(x)}{(n-1)!} = 0$$

Así la relación de recurrencia será

$$H_{n+1}(x) - 2x H_n(x) + 2n H_{n-1}(x) = 0$$

De igual modo, podemos partir de otra identidad

$$\frac{\partial \mathcal{H}(t, x)}{\partial x} = 2t \mathcal{H} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H'_n(x)}{n!} t^n = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^{n+1},$$

es decir:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H'_n(x)}{n!} t^n = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_{n-1}(x)}{(n-1)!} t^n \Rightarrow \frac{H'_n(x)}{n!} = 2 \frac{H_{n-1}(x)}{(n-1)!}$$

y encontrar una relación para generar las derivadas de los polinomios de Hermite en término de ellos mismos:

$$H'_n(x) = 2n H_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Finalmente, utilizando la ecuación anterior en la relación de recurrencia y derivando esa expresión una vez más, queda como:

$$\begin{aligned} H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + H'_n(x) &= 0 \\ H''_n(x) - 2xH'_n(x) + 2nH_n(x) &= 0 \end{aligned}$$

con lo cual queda demostrado que los polinomios de Hermite son una solución particular de esa ecuación diferencial.

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0,$$

Donde hemos hecho  $y = H_n(x)$  Adicionalmente, podremos demostrar que  $y = e^{-x^2/2}H_n(x)$  es solución de la ecuación diferencial autoadjunta

$$y'' + (2n + 1 - x^2)y = 0.$$

#### 2.17.4. Ortogonalidad y Norma de los Polinomios de Hermite

En general estos polinomios cumplen con

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_\beta(x)H_\alpha(x)dx = 2^\alpha \alpha! \sqrt{\pi} \delta_{\alpha\beta}.$$

Donde la función delta de Kronecker es  $\delta_{\alpha\beta} = 0$  si  $\alpha \neq \beta$ ; y  $\delta_{\beta\beta} = 1$ . Para demostrar el caso  $\alpha \neq \beta$  partimos de

$$\begin{aligned} u_\beta [u''_\alpha + (2\alpha + 1 - x^2)u_\alpha] &= 0 \\ u_\alpha [u''_\beta + (2\beta + 1 - x^2)u_\beta] &= 0 \end{aligned}$$

restando miembro a miembro e integrando se tiene que:

$$\begin{aligned} [u'_\alpha u_\beta - u'_\beta u_\alpha]' + 2(\alpha - \beta)u_\alpha u_\beta &= 0 \\ (\alpha - \beta) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_\alpha(x)H_\beta(x)dx &= 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_\alpha(x)H_\beta(x)dx &= 0 \quad \alpha \neq \beta; \end{aligned}$$

ya que

$$e^{-x^2/2} \{2\alpha H_{\alpha-1}(x)H_\beta(x) - 2\beta H_{\beta-1}(x)H_\alpha(x)\} \Big|_{-\infty}^{\infty} = 0$$

Para encontrar el valor de la norma, procedemos a partir de la relación de recurrencia

$$\begin{aligned} H_n(x) [H_n(x) - 2xH_{n-1}(x) + 2(n-1)H_{n-2}(x)] &= 0 \\ H_{n-1}(x) [H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x)] &= 0 \end{aligned}$$

restando miembro a miembro, multiplicando por  $e^{-x^2}$  e integrando entre  $(-\infty, \infty)$  se obtiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_\alpha^2(x)dx = 2\alpha \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_{\alpha-1}^2(x)dx$$

repetiendo la operación y recordando que al final queda

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} x^2 dx = 2\sqrt{\pi}$$

Obtenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_\alpha^2(x)dx = 2^\alpha \alpha! \sqrt{\pi}$$

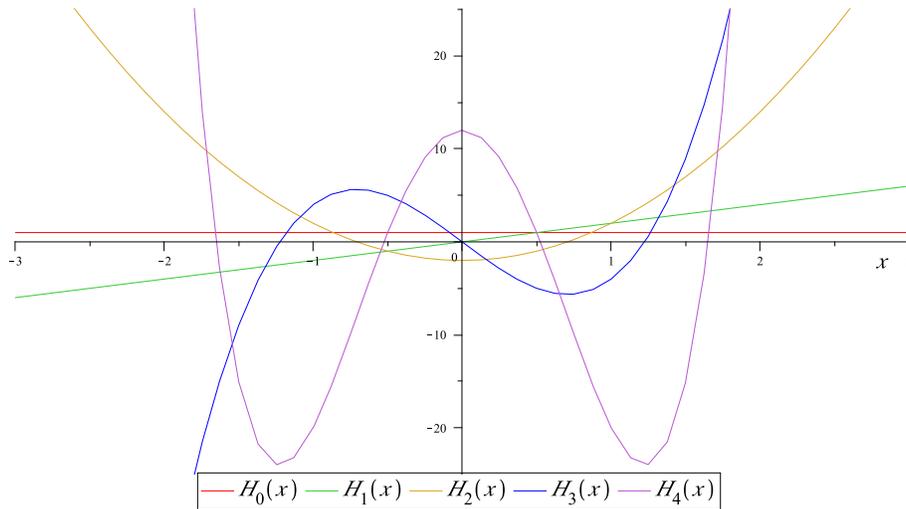


Figura 2.11: Polinomios de Hermite

### 2.17.5. Representación Integral de los Polinomios de Hermite

Los polinomios de Hermite pueden ser representados como

$$H_n(x) = \frac{2^n (-i)^n e^{x^2}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2 + 2itx} t^n dt$$

que puede ser separada como

$$H_{2n}(x) = \frac{2^{2n+1} (-1)^n e^{x^2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-t^2} t^{2n} \cos(2xt) dt, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

y para los términos impares

$$H_{2n+1}(x) = \frac{2^{2n+2} (-1)^n e^{x^2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-t^2} t^{2n+1} \operatorname{sen}(2xt) dt, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

La forma de llegar a cualquiera de estas últimas fórmulas se parte de las conocidas integrales desarrolladas en el plano complejo

$$e^{-x^2} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} \cos(2xt) dt$$

se deriva  $2n$  veces a ambos miembros se utiliza la definición de los polinomios de Hermite.

### 2.17.6. El Oscilador armónico, independiente del tiempo, en Mecánica Cuántica.

La Ecuación de Schrödinger independiente del tiempo y en una dimensión es

$$\frac{d^2}{dx^2} \psi(x) + \frac{2\mu}{\hbar^2} [E - \mathcal{U}(x)] \psi(x) = 0,$$

con  $\mu$  la “masa” de la partícula;  $E$  los niveles de energía y  $\mathcal{U}(x)$  el potencial al cual está sometida la partícula. En el caso que estudiemos un potencial del tipo  $\mathcal{U}(x) = \frac{1}{2}\mu\omega^2 x^2$  en el cual la frecuencia angular del oscilador viene representada por  $\omega$ . La ecuación de Schrödinger se convierte en

$$\frac{d^2}{dx^2}\psi(x) + \frac{2\mu}{\hbar^2} \left[ E - \frac{1}{2}\mu\omega^2 x^2 \right] \psi(x) = 0,$$

haciendo un cambio de variable  $\xi = x\sqrt{\mu\omega/\hbar}$  para adimensionalizar la ecuación de Schrödinger, se obtiene

$$\psi''(\xi) + \left[ \frac{2E}{\hbar\omega} - \xi^2 \right] \psi(\xi) = 0,$$

la cual corresponde a la forma autoadjunta de la Ecuación de Hermite:

$$\psi''(\xi) + [2n + 1 - \xi^2] \psi(\xi) = 0,$$

y por lo tanto identificamos

$$\frac{2E}{\hbar\omega} = 2n + 1 \quad \Rightarrow \quad E = \left( n + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega,$$

con lo cual comprobamos la forma como viene cuantizada la energía en este sistema y la energía del estado fundamental. Por su parte, la función de onda se podrá expresar en la base de soluciones de esa ecuación

$$\psi(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \psi_n(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{-\xi^2/2} H_n(\xi).$$

Si mantenemos la normalización

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^2(\xi) d\xi = 1 \quad \text{con } c_n = \left( \frac{\mu\omega}{\pi\hbar} \right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}}.$$

### 2.17.7. Resumen de Propiedades Polinomios Hermite

Definición:	$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$
	$H_n(x) = \sum_{k=0}^{n/2} \frac{(-1)^k n!}{k! (n-2k)!} (2x)^{n-2k}$
Ejemplos:	$H_0(x) = 1; H_1(x) = 2x; H_2(x) = 4x^2 - 2; H_3(x) = 8x^3 - 12x$
Relaciones de Recurrencia:	$H_0(x) = 1; \quad H_1(x) = 2x; \quad H_2(x) = 4x^2 - 2$ $H'_n(x) = 2n H_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, 3, \dots$
Ecuaciones Diferenciales:	$y'' - 2xy' + 2ny = 0$ $u'' + (2n + 1 - x^2)u = 0; \quad u(x) = e^{-x^2/2} H_n(x)$
Función Generatriz:	$\mathcal{H}(t, x) = e^{2xt-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n$
Representación Integral:	$H_{2n}(x) = \frac{2^{2n+1} (-1)^n e^{x^2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-t^2} t^{2n} \cos(2xt) dt$ $H_{2n+1}(x) = \frac{2^{2n+2} (-1)^n e^{x^2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-t^2} t^{2n+1} \sin(2xt) dt$
Ortogonalidad:	$2^\alpha \alpha! \sqrt{\pi} \delta_{\alpha\beta} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_\beta(x) H_\alpha(x) dx$

Practicando con Maple:

```
> restart: with(orthopoly):
> plot([H(0,x), H(1,x), H(2,x), H(3,x), H(4,x)], x=-3..3,y=-25..25);
```

## 2.18. Planteamiento General para Polinomios Ortogonales

Hemos considerado un par de ejemplos de Polinomios Ortogonales. En ambos podemos identificar algunas características comunes. En base a estas características comunes definiremos otras familias de polinomios ortogonales.

† En el caso de los polinomios de Jacobi, la norma es

$$h_n = \frac{2^{\alpha+\beta+1}}{2n + \alpha + \beta + 1} \frac{\Gamma(n + \alpha + 1)\Gamma(n + \beta + 1)}{n!\Gamma(n + \alpha + \beta + 1)} \quad \text{con } \alpha > -1 \quad \text{y } \beta > -1.$$

Nomenclatura	Nombre	$a$	$b$	$w(x)$	$h_n$	$h_0$
$P_n(x)$	Legendre	-1	1	1	$\frac{2}{2n+1}$	
$T_n(x)$	Tchebychev 1E	-1	1	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$
$U_n(x)$	Tchebychev 2E	-1	1	$\sqrt{1-x^2}$	$\frac{\pi}{2}$	
$H_n(x)$	Hermite	$-\infty$	$\infty$	$e^{-x^2}$	$2^n n! \sqrt{\pi}$	
$L_n(x)$	Laguerre	0	$\infty$	$e^{-x}$	1	
$L_n^\alpha(x)$	Laguerre G	0	$\infty$	$x^\alpha e^{-x}$ con $\alpha > -1$	$\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!}$	
$P_n^{\alpha\beta}(x)$	Jacobi	-1	1	$(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$	$\dagger$	

Cuadro 2.1: Propiedades genéricas de los Polinomios Ortogonales,  $N_n$  indica la norma del polinomio de grado  $n$ .

### 2.18.1. Producto interno genérico, norma y ortogonalidad

Los polinomios ortogonales se definen como un conjunto de polinomios  $\{p_n(x)\}$  de orden  $n$  definidos en un determinado intervalo  $a \leq x \leq b$ , los cuales son ortogonales respecto a una definición de producto interno

$$\int_a^b w(x)p_m(x)p_n(x)dx = h_n\delta_{nm} \quad \text{con } w(x) > 0 \text{ una función peso en } a \leq x \leq b$$

que garantiza que la norma sea finita en ese intervalo. Dado que el Teorema de Weierstrass garantiza que el conjunto de polinomios  $\{1, x, x^2, \dots, x^n, \dots\}$  es una base completa para un espacio vectorial  $\mathbb{E}^\infty$ , se procede a ortogonalizar esa base con la definición de producto interno y el intervalo que corresponda. Para cada caso tendremos una base ortogonal de polinomios.

Polinomio	$\mu_n$	$w(x)$	$q(x)$
$P_n$	$2^n n!$	1	$1-x^2$
$T_n$	$\frac{(-1)^n}{\sqrt{\pi}} 2^{n+1} \Gamma(n + \frac{1}{2})$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$1-x^2$
$U_n$	$\frac{(-1)^n}{(n+1)\sqrt{\pi}} 2^{n+1} \Gamma(n + \frac{3}{2})$	$\sqrt{1-x^2}$	$1-x^2$
$H_n$	$(-1)^n$	$e^{-x^2}$	1
$L_n$	$n!$	$e^{-x}$	$x$
$L_n^\alpha$	$n!$	$x^\alpha e^{-x}$	$x$

Cuadro 2.2: Funciones para determinar la Fórmula de Rodrigues generalizada

En el cuadro 2.1 resumimos las propiedades más resaltantes, con lo son: la función peso en el producto interno, el intervalo en el cual están definidas estas funciones y su norma.

### 2.18.2. Fórmula de Rodrigues generalizada

En general todos los polinomios ortogonales  $\{p_n(x)\}$  vienen definidos por la fórmula de Rodrigues generalizada

$$p_n(x) = \frac{1}{w(x)\mu_n} \frac{d^n}{dx^n} (w(x)q(x)^n)$$

donde  $w(x), q(x)$  y  $\mu_n$  vienen especificados en el cuadro 2.2 para cada conjunto de polinomios ortogonales

### 2.18.3. Ejemplos de Polinomios Ortogonales

Utilizando la fórmula de Rodrigues generalizada, podemos construir algunos polinomios generalizados. El cuadro 2.3 muestra algunos de ejemplos de estos polinomios ortogonales

Polinomio	$n = 0$	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$
$P_n$	1	$x$	$\frac{1}{2}(3x^2 - 1)$	$\frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$	$\frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$
$T_n$	1	$x$	$2x^2 - 1$	$4x^3 - 3x$	$8x^4 - 8x^2 + 1$
$U_n$	1	$2x$	$4x^2 - 1$	$8x^3 - 4x$	$16x^4 - 12x^2 + 1$
$H_n$	1	$2x$	$4x^2 - 2$	$8x^3 - 12x$	$16x^4 - 48x^2 + 12$
$L_n$	1	$1 - x$	$\frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$	$-\frac{1}{6}(x^3 - 9x^2 + 18x - 6)$	$\frac{1}{24}(x^4 - 16x^3 + 72x^2 - 96x + 24)$

Cuadro 2.3: Ejemplos de Polinomios Ortogonales

### 2.18.4. Relaciones de Recurrencia

También se pueden formular, de manera genérica las relaciones de recurrencia. Obviamente, las relaciones de recurrencia también constituyen una forma alternativa de ir construyendo los polinomios ortogonales. Así, un polinomio ortogonal genérico,  $p_n(x)$ , cumplirá

$$p_{n+1}(x) = (a_n + xb_n)p_n(x) - c_n p_{n-1}(x)$$

El cuadro 2.4 contiene las expresiones de los coeficientes para construir las relaciones de recurrencia generalizadas para cada uno de los polinomios

Polinomio	$a_n$	$b_n$	$c_n$
$P_n$	0	$\frac{2n+1}{n+1}$	$\frac{n}{n+1}$
$T_n$	0	2	1
$U_n$	0	2	1
$H_n$	0	2	$2n$
$L_n$	$\frac{2n+1}{n+1}$	$-\frac{1}{n+1}$	$\frac{n}{n+1}$
$L_n^\alpha$	$\frac{2n+1+\alpha}{n+1}$	$-\frac{1}{n+1}$	$\frac{n+\alpha}{n+1}$

Cuadro 2.4: Funciones para determinar la Relación de Recurrencia Generalizada

### 2.18.5. Función generatriz generalizada

Para todos los polinomios ortogonales podemos definir una función generatriz  $\mathcal{G}(x, t)$ , de tal manera que cada uno de los polinomios ortogonales  $\{p_n(x)\}$  será proporcional al coeficiente de  $t^n$  del desarrollo en

series de Taylor, en potencias de  $t$  alrededor del punto  $x = 0$ . Esta función generatriz que constituye una forma alternativa de definir los polinomios ortogonales viene expresada por la serie

$$\mathcal{G}(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n p_n(x) t^n \quad \text{con } a_n \text{ constante}$$

Las funciones generatrices no son exclusivas de los polinomios ortogonales. Como veremos más adelante, existen funciones generatrices para las funciones de Bessel.

Polinomio	$C_n$	$\mathcal{G}(x, t)$
$P_n$	1	$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}$
$T_n$	2	$\frac{1-t^2}{1-2xt+t^2} + 1$
$U_n$	1	$\frac{1}{1-2xt+t^2}$
$H_n$	$1/n!$	$e^{2xt-x^2}$
$H_{2n}$	$1^n/(2n)!$	$\cos(2xt)e^{t^2}$
$H_{2n+1}$	$1^n/(2n+1)!$	$\text{sen}(2xt)e^{t^2}$
$L_n$	1	$\frac{1}{1-t} e^{-\frac{xt}{1-t}}$
$L_n^\alpha$	1	$\frac{1}{(1-t)^\alpha} e^{-\frac{xt}{1-t}}$

Cuadro 2.5: Funciones para determinar la función generatriz generalizada

### 2.18.6. Ecuación diferencial para los Polinomios Ortogonales

Cada uno de los polinomios ortogonales habrá de ser solución de una ecuación diferencial ordinaria de la forma

$$g_2(x) \frac{d^2 p_n(x)}{dx^2} + g_1(x) \frac{dp_n(x)}{dx} + \alpha_n p_n(x) = 0$$

En el cuadro 2.6 mostramos las expresiones para los coeficientes de las ecuaciones correspondientes a las ecuaciones diferenciales para las cuales cada uno de los polinomio ortogonales es solución

### 2.18.7. Aplicaciones para los polinomios ortogonales

#### Interpolación polinomial de puntos experimentales

Muchas veces nos encontramos con la situación en la cual tenemos un conjunto de  $n$  medidas o puntos experimentales  $\{(x_1, y_1) = f(x_1), (x_2, y_2) = f(x_2), \dots, (x_n, y_n) = f(x_n)\}$  y para modelar ese experimento quisiéramos una función que ajuste estos puntos. El tener una función nos provee la gran ventaja de poder intuir o aproximar los puntos que no hemos medido. La función candidata más inmediata es un polinomio y debemos definir el grado del polinomio y la estrategia que aproxime esos puntos. Si queremos aproximar esos puntos por una recta el Método de Mínimos Cuadrados es el más utilizado.

Puede ser que el polinomio no sea lineal y sea necesarios ajustar esos puntos a un polinomio tal que éste pase por los puntos experimentales. Queda entonces por decidir la estrategia. Esto es, ajustamos la

Polinomio	$g_2(x)$	$g_1(x)$	$\alpha_n$
$P_n$	$1 - x^2$	$-2x$	$n(n + 1)$
$T_n$	$1 - x^2$	$-x$	$n^2$
$U_n$	$1 - x^2$	$-2x$	$n(n + 1)$
$H_n$	$1$	$-2x$	$2n$
$L_n$	$x$	$1 - x$	$n$
$L_n^\alpha$	$x$	$1 - x + \alpha$	$n$
$P_n^{\alpha\beta}$	$1 - x^2$	$\beta - \alpha - x(2 + \alpha + \beta)$	$n(n + \alpha + \beta + 1)$

Cuadro 2.6: Funciones para determinar la ecuación diferencial para la cual son solución los polinomios ortogonales

función como “trozos” de polinomios que a su vez se ajusten a subconjuntos:  $\{(x_1, y_1) = f(x_1), (x_2, y_2) = f(x_2), \dots, (x_m, y_m) = f(x_m)\}$ , con  $m < n$ , de los puntos experimentales. En este caso tendremos una función de ajuste, para cada conjunto de puntos.

También podemos ajustar la función a todo el conjunto de puntos experimentales y, en ese caso, el máximo grado del polinomio que los ajuste será  $n - 1$ . Para encontrar este polinomio lo expresaremos como una combinación lineal de Polinomios de Legendre. Esto es:

$$\mathcal{P}(x) = f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} C_k P_k(x) \Rightarrow \begin{cases} y_1 = f(x_1) = C_0 P_0(x_1) + C_1 P_1(x_1) + \dots + C_{n-1} P_{n-1}(x_1) \\ y_2 = f(x_2) = C_0 P_0(x_2) + C_1 P_1(x_2) + \dots + C_{n-1} P_{n-1}(x_2) \\ \vdots \\ y_n = f(x_n) = C_0 P_0(x_n) + C_1 P_1(x_n) + \dots + C_{n-1} P_{n-1}(x_n) \end{cases}$$

que no es otra cosa que un sistema de  $n$  ecuaciones con  $n$  incógnitas: los coeficientes  $\{C_0, C_1, \dots, C_{n-1}\}$ . Al resolver el sistema de ecuaciones y obtener los coeficientes, podremos obtener la función polinómica que interpola esos puntos.

Una expansión equivalente se pudo haber logrado con cualquier otro conjunto de polinomios ortogonales, ya que ellos son base del espacio de funciones. Es importante hacer notar que debido a que los polinomios de Legendre están definidos en el intervalo  $[-1, 1]$  los puntos experimentales deberán re-escalarse a ese intervalo para poder encontrar el polinomio de interpolación como combinación lineal de los Polinomios de Legendre. Esto se puede hacer con la ayuda del siguiente cambio de variable:

$$x = \frac{(b - a)t + b + a}{2}, \quad dx = \frac{b - a}{2} dt$$

Consideremos los puntos experimentales representado en la figura 2.12. Al construir el sistema de ecuaciones obtendremos: ( $a = 2$  y  $b = 12$ )

$$(-1, 8) \Rightarrow 8 = C_0 - C_1 + C_2 - C_3 + C_4 - C_5$$

$$\left(-\frac{3}{5}, 10\right) \Rightarrow 10 = C_0 - \frac{3}{5} C_1 + \frac{1}{25} C_2 + \frac{9}{25} C_3 - \frac{51}{125} C_4 + \frac{477}{3125} C_5$$

$$\left(-\frac{1}{5}, 11\right) \Rightarrow 11 = C_0 - \frac{1}{5} C_1 - \frac{11}{25} C_2 + \frac{7}{25} C_3 + \frac{29}{125} C_4 - \frac{961}{3125} C_5$$

$$\left(\frac{1}{5}, 18\right) \Rightarrow 18 = C_0 + \frac{1}{5} C_1 - \frac{11}{25} C_2 - \frac{7}{25} C_3 + \frac{29}{125} C_4 + \frac{961}{3125} C_5$$

$$\left(\frac{3}{5}, 20\right) \Rightarrow 20 = C_0 + \frac{3}{5} C_1 + \frac{1}{25} C_2 - \frac{9}{25} C_3 - \frac{51}{125} C_4 - \frac{477}{3125} C_5$$

$$(1, 34) \Rightarrow 34 = C_0 + C_1 + C_2 + C_3 + C_4 + C_5$$

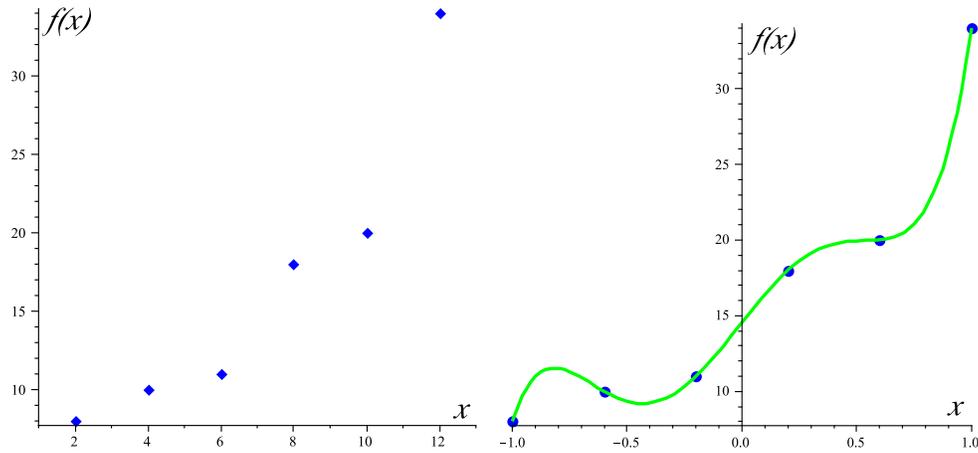


Figura 2.12: En el lado izquierdo se muestran el conjunto de puntos experimentales:  $\{(2, 8), (4, 10), (6, 11), (8, 18), (10, 20), (12, 34)\}$  y a la derecha la función polinómica que los interpola.

y al resolver el sistema obtendremos que

$$C_0 = \frac{2249}{144}, \quad C_1 = \frac{3043}{336}, \quad C_2 = \frac{1775}{504}, \quad C_3 = -\frac{175}{216}, \quad C_4 = \frac{625}{336}, \quad C_5 = \frac{14375}{3024}$$

con lo cual

$$\mathcal{P}(x) = f(x) = \frac{2249}{144} + \frac{3043}{336}x + \frac{1775}{504}P(2, x) - \frac{175}{216}P(3, x) + \frac{625}{336}P(4, x) + \frac{14375}{3024}P(5, x)$$

la interpolación queda representada en al figura 2.12.

Es importante se nalar que mientras más puntos experimentales se incluyan para la interpolación, el polinomio resultante será de mayor grado y, por lo tanto incluirá oscilaciones que distorcionarán una aproximación más razonable. Por ello, la estrategia de hacer la interpolación a trozos, digamos de tres puntos en tres puntos, generará un mejor ajuste, pero será una función (polinomio) continua a trozos.

Practicando con Maple:

```

> restart: with(plots):
> pointplot([2,8],[4,10],[6,11],[8,18],[10,20],[12,34]);
>
> P:=pointplot([-1,8],[-3/5,10],[-1/5,11],[1/5,18],[3/5,20],[1,34]):
> eq1:=C0-C1+C2-C3+C4-C5=8:
> eq2:=C0-3/5*C1+1/25*C2+9/25*C3-51/125*C4+477/3125*C5=10:
> eq3:=C0-1/5*C1-11/25*C2+7/25*C3+29/125*C4-961/3125*C5=11:
> eq4:=C0+1/5*C1-11/25*C2-7/25*C3+29/125*C4+961/3125*C5=18:
> eq5:=C0+3/5*C1+1/25*C2-9/25*C3-51/125*C4-477/3125*C5=20:
> eq6:=C0+C1+C2+C3+C4+C5=34:
> s:=solve(eq1,eq2,eq3,eq4,eq5,eq6,[C0,C1,C2,C3,C4,C5]);assign(s);
> f:=C0 + C1*x + C2*LegendreP(2,x) + C3*LegendreP(3,x) + C4*LegendreP(4,x)+
C5*LegendreP(5,x);
> F:=plot(f,x=-1..1):
> display(F, P);
    
```

### Cuadratura de Gauss-Legendre

Una de los usos más comunes de los polinomios ortogonales es la de aproximar funciones, en particular integrales que requieren ser resueltas numéricamente. La idea es aproximar una integral, para una función  $f(x)$ , definida en el intervalo  $[a, b]$  y suficientemente bien comportada, por una suma finita de términos  $c_k f(x_k)$  y estimar el error que cometemos en esta aproximación. Esto es:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^N c_k f(x_k) + E_N \quad (2.54)$$

Nótese que la intención es utilizar la función a integrar evaluada en un conjunto de puntos estratégicos para los cuales están definidos unos coeficientes, también inteligentemente seleccionados. Es decir se requieren  $2N$  números ( $c_k$  y los  $x_k$  con  $k = 1, 2, \dots, N$ ). Más aún, esas  $2N$  cantidades pueden ser seleccionadas de forma tal que la aproximación es exacta  $E_N = 0$  cuando  $f(x)$  es un polinomio de grado  $\leq 2N - 1$ .

Supongamos, para empezar que la función  $f(x)$  está definida para  $x \in [-1, 1]$ <sup>12</sup> y por lo tanto los polinomios ortogonales que seleccionaremos para aproximar la integral (y la función) serán los del Legendre (igual pudimos haber utilizado los polinomios de Tchebychev), con lo cual

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k P_k(x),$$

donde:

$$a_k = \left(k + \frac{1}{2}\right) \int_{-1}^1 dx f(x) P_k(x) \quad \text{y} \quad a_0 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 dx f(x).$$

Con lo cual

$$\int_{-1}^1 f(x)dx \approx \sum_{k=1}^N c_k f(x_k) = \sum_{k=1}^N c_k \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x_k) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{k=1}^N c_k P_n(x_k).$$

<sup>12</sup>Esta no es una limitación muy severa porque siempre podemos hacer, como ya vimos, un cambio de variable del tipo  $x = \left(\frac{b-a}{2}\right)t + \left(\frac{b+a}{2}\right)$  y convertir cualquier intervalo cerrado  $[a, b]$  en un intervalo cerrado  $[-1, 1]$ .

Quedan todavía por determinar los pesos  $c_k$  y los puntos  $x_k$ . Para ello procedemos de la siguiente forma. Notamos que  $P_N(x)$  tiene  $N$  raíces,  $x = x_j$ , en el intervalo  $-1 \leq x \leq 1$ . Entonces, si seleccionamos esos puntos  $x = x_j$  para evaluar la función  $f(x_k)$  se anulan el coeficiente para el término  $a_N$  y, además podremos encontrar los pesos  $c_k$  resolviendo el sistema de  $N$  ecuaciones de la forma

$$\sum_{j=1}^N c_j P_0(x_j) = \sum_{j=1}^N c_j = 2 \quad \wedge \quad \sum_{j=1}^N c_j P_k(x_j) = 0 \quad \text{para } k = 1, 2, \dots, N-1$$

donde los  $P_k(x_j)$  son los distintos polinomios evaluados en las raíces del polinomio de grado  $N$ , i.e.  $P_N(x_j) = 0$ . Se puede demostrar que la solución de este sistema provee los pesos escritos de la forma

$$c_j = \frac{2}{(1-x_j^2)(P'_N(x_j))^2}, \quad \text{donde: } P'_N(x_j) = \left. \frac{dP_N(x)}{dx} \right|_{x=x_j}$$

Más aún, podremos escribir

$$\int_{-1}^1 f(x)dx \approx \sum_{k=1}^N c_k f(x_k) = 2a_0 + E_N \quad \text{con} \quad E_N = \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n \sum_{k=1}^N c_k P_n(x_k),$$

pero como

$$a_0 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 dx f(x) \quad \Rightarrow \quad \int_{-1}^1 dx f(x) = \sum_{k=1}^N c_k f(x_k) - E_N$$

Es decir, demostramos que es posible aproximar la integral de la función con un promedio pesado de la función evaluada en unos puntos estratégicos. Los puntos estratégicos son los ceros del polinomio de Legendre de grado igual al número de puntos con los cuales se quiere aproximar la función y los pesos vienen de resolver las ecuaciones para los coeficientes de la expansión. En el cuadro 2.7 se ilustran los valores de los puntos de interpolación y sus pesos correspondientes.

Es inmediato comprobar que si  $f(x)$  es un polinomio de grado  $\leq N-1$  la aproximación es exacta y el error es nulo. Pero lo que realmente hace útil a este tipo de aproximaciones es que también será exacta para polinomios de grado  $\leq 2N-1$ . Esto se puede ver si expresamos un polinomio de grado  $2N-1$  como la suma de dos polinomios

$$f(x) = P_N(x)Y_1(x) + Y_2(x)$$

donde  $Y_1$  y  $Y_2$  son polinomios de grado  $N-1$ . Entonces, al integrar miembro a miembro

$$\int_{-1}^1 dx f(x) = \underbrace{\int_{-1}^1 dx P_N(x)Y_1(x)}_{=0} + \int_{-1}^1 dx Y_2(x)$$

el primer término se anula por ser  $P_N(x)$  ortogonal a cualquier polinomio de grado inferior, y el segundo término no es más que el caso que analizamos anteriormente de un polinomio de grado  $\leq N-1$ .

Puede resultar conveniente escribir la ecuación

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 f\left(\frac{(b-a)t+b+a}{2}\right) dt$$

Entonces, para la cuadratura de Gauss-Legendre

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2} \sum_{k=1}^N c_k f\left(\frac{(b-a)t_k+b+a}{2}\right)$$

donde los  $t_k$  son las raíces de  $P_N(t) = 0$ .

$N$	$P_N(x_j) = 0$	$c_j = \frac{2}{(1-x_j^2)(P'_N(x_j))^2}$	$2N-1$
2	$\pm\sqrt{3}/3$	1	3
3	0 $\pm\sqrt{15}/5$	8/9 5/9	5
4	$\pm 0,3399810436$ $\pm 0,8611363116$	0,65214515 0,34785485	7
5	0 $\pm 0,5384693101$ $\pm 0,9061798459$	0,56888889 0,47862867 0,23692689	9
6	$\pm 0,2386191861$ $\pm 0,6612093865$ $\pm 0,9324695142$	0,46791393 0,36076157 0,17132449	11
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Cuadro 2.7: Puntos y pesos para una cuadratura de Gauss-Legendre

**Ejemplo** Utilizar la fórmula de cuadratura de dos puntos de Gauss-Legendre para calcular

$$\int_2^4 (x^2 - 2x + 1)dx$$

Entonces,  $N = 2$ :

$$\begin{aligned} \int_2^4 (x^2 - 2x + 1)dx &= \frac{4-2}{2} \left[ c_1 f\left(\frac{(4-2)t_1 + 4 + 2}{2}\right) + c_2 f\left(\frac{(4-2)t_2 + 4 + 2}{2}\right) \right] \\ &= (1)f\left(\frac{2t_1 + 6}{2}\right) + (1)f\left(\frac{2t_2 + 6}{2}\right) = f\left(\frac{2\sqrt{3}/3 + 6}{2}\right) + f\left(\frac{-2\sqrt{3}/3 + 6}{2}\right) \\ &= \frac{4\sqrt{3}}{3} + \frac{13}{3} - \frac{4\sqrt{3}}{3} + \frac{13}{3} = \frac{26}{3}. \end{aligned}$$

**Estrategia General para cuadraturas de Gauss**

Para el caso general, la aproximación de una integral

$$\int_a^b dx w(x)f(x) \approx \sum_{k=1}^N c_k f(x_k),$$

donde las  $\{x_1, \dots, x_k, \dots, x_N\}$  son los ceros del polinomio ortogonal, de grado  $N$ ,  $p_N(x)$ , elegido para hacer esta aproximación. Los  $N$  pesos  $\{c_1, \dots, c_k, \dots, c_N\}$  surgen de resolver el sistema de ecuaciones

$$\sum_{j=1}^N c_j = \frac{h_0}{p_0^2} \quad \text{con } h_0 = \int_a^b w(x)p_0^2(x)dx \quad \wedge \quad \sum_{j=1}^N c_j p_k(x_j) = 0 \quad \text{para } k = 1, 2, \dots, N-1.$$

Así para aproximar integrales con funciones pesos,  $w(x)$ , utilizaremos cuadraturas adaptadas a los polinomios ortogonales. Esto es

$$\int_0^\infty dx e^{-x} f(x) \Rightarrow \text{Laguerre}, \quad \int_{-\infty}^\infty dx e^{-x^2} f(x) \Rightarrow \text{Hermite}, \quad \int_{-1}^1 dx \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow \text{Tchebychev}.$$

**Ejercicio** Para integrales con funciones peso del tipo

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

los pesos son:  $w_i = \pi/N$ , resultando

$$\int_{-1}^1 dx \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} \simeq \frac{\pi}{N} \sum_{k=1}^N f(x_k), \quad \text{con } x_k = \cos\left(\frac{k-\frac{1}{2}}{N}\right)\pi$$

Muestre que para un intervalo arbitrario  $a \leq x \leq b$ , esta última integral es:

$$\int_a^b dx \frac{f(x)}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} \simeq \frac{\pi}{N} \sum_{k=1}^N f(x_k)$$

donde:

$$x_k = \frac{1}{2}(b+a) + \frac{1}{2}(b-a) \cos\left(\frac{k-\frac{1}{2}}{N}\right)\pi.$$

## 2.19. Series y transformadas de Fourier

Otro de los casos de expansión en una base completa de funciones lo constituyen la base de Fourier. En este caso la serie de Fourier la constituyen funciones continuas, reales de variable real y definidas en  $[0, 2\pi]$ ,  $\mathcal{C}_{[0,2\pi]}^\infty$ , en término de funciones trigonométricas.

Esto es el conjunto de funciones  $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle, \dots, |u_n\rangle, \dots\}$  representadas por

$$|u_0\rangle = 1, \quad |u_{2n}\rangle = \cos(nx) \quad \text{y} \quad |u_{2n-1}\rangle = \text{sen}(nx), \quad \text{con } n = 1, 2, 3, \dots$$

Es claro que  $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle, \dots, |u_n\rangle, \dots\}$  es un conjunto de funciones ortogonales por cuanto

$$\langle u_n | u_m \rangle = \delta_{nm} | |u_n\rangle |^2 \Rightarrow \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ | |u_n\rangle |^2 & \text{si } n = m \end{cases} \begin{cases} \int_0^{2\pi} dx \text{ sen}(nx) \text{ sen}(mx) = 0 \\ \int_0^{2\pi} dx \cos(nx) \text{ sen}(mx) = 0 \\ \int_0^{2\pi} dx \cos(nx) \cos(mx) = 0 \\ \int_0^{2\pi} dx = 2\pi \\ \int_0^{2\pi} dx \cos^2(nx) = \pi \\ \int_0^{2\pi} dx \text{ sen}^2(nx) = \pi \end{cases}$$

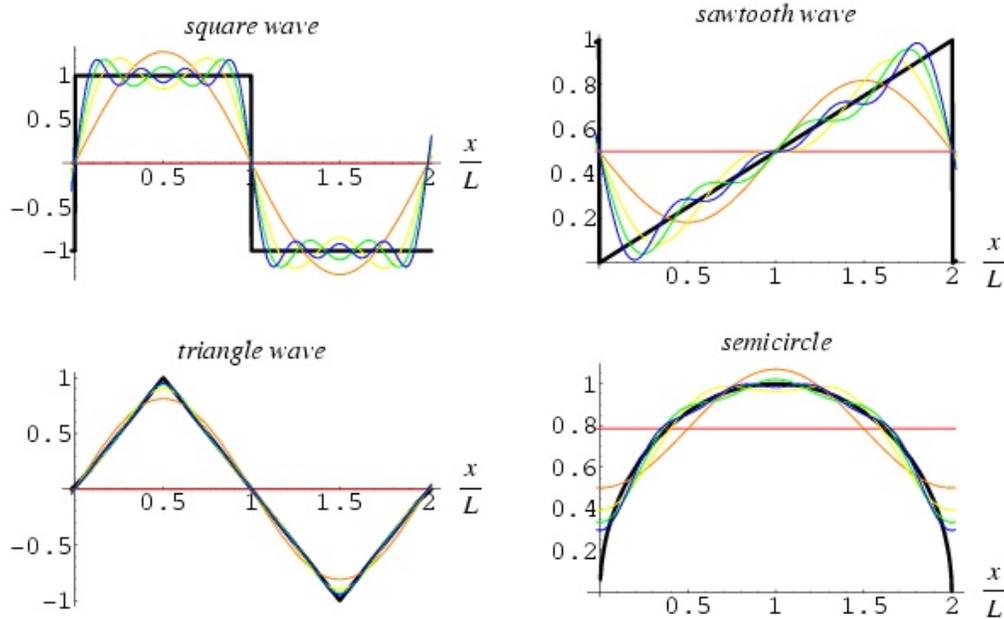


Figura 2.13: Expansiones de Varias funciones en sumas parciales de Series de Fourier. Tomado de Eric W. Weisstein. **Fourier Series**. <http://mathworld.wolfram.com/FourierSeries.html>

Por lo tanto, podremos construir una base ortonormal de funciones  $\{|e_1\rangle, |e_2\rangle, |e_3\rangle, \dots, |e_n\rangle, \dots\}$  de la forma

$$|e_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad |e_{2n}\rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nx) \quad \text{y} \quad |e_{2n-1}\rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(nx)$$

Tal y como se muestra en la figura 2.13 distintas funciones pueden ser expandidas con sumas parciales de Fourier. A diferencia de las series de potencias, que imponen que las funciones a ser expandidas deben ser continuas y continuamente diferenciables en el intervalo, la series de Fourier pueden representar funciones continuas a trozos, siempre y cuando cumplan con algunas condiciones.

Por lo tanto cualquier función definida en el intervalo  $[0, 2\pi]$  puede expresarse en términos de esta base como

$$|f\rangle = \sum_{i=0}^{\infty} c_i |e_i\rangle \Rightarrow c_i = \langle e_i | f \rangle = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} dx f(x) = c_0 \equiv a_0 & \text{si } i = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} dx f(x) \cos(nx) = c_{2n} \equiv a_m & \text{si } i = 2n \\ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} dx f(x) \sin(nx) = c_{2n-1} \equiv b_m & \text{si } i = 2n - 1 \end{cases}$$

donde los  $c_i$  son los coeficientes de Fourier, con lo cual podemos escribir

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)]$$

el término  $a_0$  es colocado fuera de la sumatoria, y multiplicado por  $1/2$ , solo por conveniencia.

De manera equivalente, si el período es  $T$  y para un  $t_0$  genérico

$$F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) + b_n \text{sen}\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) \right] \quad \text{con} \quad \begin{cases} a_0 = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} dt f(t) \\ a_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} dx f(t) \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) \\ b_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} dt f(t) \text{sen}\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) \end{cases}$$

La figura 2.13 muestra la aproximación de las distintas sumas parciales para distintas funciones, a medida que aumentamos el número de términos la aproximación mejora.

Podemos expresar la expansión de una serie de Fourier de manera más compacta atendiendo a las expresiones anteriores. Esta expresión se conoce en algunos ámbitos como la expresión integral para la series de Fourier

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} dt f(t) \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[ \int_0^{2\pi} dt f(t) \cos(nt) \right] \cos(nx) + \left[ \int_0^{2\pi} dt f(t) \text{sen}(nt) \right] \text{sen}(nx) \right\} \\ F(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} dt f(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} dt f(t) \cos(n[t-x]). \end{aligned}$$

También es muy común expresar una serie de Fourier en término de una base compleja. Vale decir  $\{\dots|\tilde{\phi}_k\rangle\dots\} \leftrightarrow \{\dots e^{-ikx}\dots\}$  con  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Con lo cual

$$|f\rangle = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{C}_k |\tilde{\phi}_k\rangle \equiv \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{C}_k e^{-ikx} \quad \text{con} \quad \tilde{C}_k = \frac{\langle \tilde{\phi}_k | f \rangle}{\langle \tilde{\phi}_k | \tilde{\phi}_k \rangle} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx e^{-ikx} f(x).$$

Podremos reescribir (una vez más) la expresión de una suma parcial de la Serie de Fourier, dado que

$$a_n \cos(nx) + b_n \text{sen}(nx) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dt f(t) \cos(n[t-x])$$

tendremos que

$$\begin{aligned} F_n(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n [a_k \cos(kx) + b_k \text{sen}(kx)] = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \left[ \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dt f(t) \cos(n(t-x)) \right] \\ &= \Re \left[ \int_{-\pi}^{\pi} dt f(t) \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \left( e^{-i(t-x)k} \right) \right\} \right] \end{aligned}$$

y al sumar la progresión geométrica que representa una serie de exponenciales llegamos a

$$F_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dt f(t) \left[ \frac{\text{sen}\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)(t-x)\right)}{\text{sen}\left(\frac{1}{2}(t-x)\right)} \right] \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dt f(t) \mathcal{K}(x, n, t)$$

la cual siempre es convergente y el término

$$\mathcal{K}(x, n, t) = \left[ \frac{\text{sen}\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)(t-x)\right)}{\text{sen}\left(\frac{1}{2}(t-x)\right)} \right]$$

se conoce como el núcleo de la transformación de  $F$ , el *Kernel* de Dirichlet.

La pregunta básica que sigue es, en todos estos casos: ¿cómo se relaciona la expansión de Fourier  $\{f\} \Leftrightarrow F(x)$  con la función  $f(t)$  que genera los coeficientes de la expansión? Nótese que es una forma de mirar una relación entre  $F(x) \leftrightarrow f(t)$ . Pasamos de  $f(t)$  a  $F(x)$  mediante una “transformación”

$$F_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dt f(t) \mathcal{K}(x, n, t)$$

Este tipo de relaciones se denomina transformación integral y en particular ésta es una de las expresiones de las llamadas *Transformaciones de Fourier*.

## 2.20. Condiciones de Dirichlet

Las condiciones que una determinada función  $f(x)$  debe cumplir para poder ser representada como una serie de Fourier, se conocen con el nombre de condiciones de Dirichlet<sup>13</sup> las cuales pueden ser esquematizadas en los siguientes puntos:

- la función  $f(x)$  debe ser periódica
- la función  $f(x)$  debe ser univaluada y continua a trozos (continua menos, en un número finito de puntos) con un número finito de máximos y mínimos
- la integral  $\int_{-T/2}^{T/2} dx |f(x)|$  debe ser convergente. Donde  $[-T/2, T/2]$  quiere indicar el intervalo de definición de una función con período  $T$ .

Podemos formalizar un poco más las condiciones de Dirichlet en el llamado Teorema de Fourier.

**Teorema de Fourier** Sea  $f(x)$  una función en el intervalo  $-\pi \leq x \leq \pi$  y definida para el resto de la recta real tal que cumpla con  $f(x + 2\pi) = f(x)$ . Es decir  $f(x)$  es  $2\pi$ -periódica. Supongamos además que existe la integral

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx f(x), \quad \text{y que} \quad C_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx e^{-ikx} f(x) \quad \text{con } k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

y si  $|f(x)|$  está acotada para un intervalo  $[a, b]$  con  $-\pi < a \leq x \leq b < \pi$ , entonces

$$F(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{-ikx} \quad \text{es convergente al valor } F(x) = \frac{1}{2} \left( \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} f(x + \epsilon) + \lim_{\epsilon \rightarrow 0^-} f(x - \epsilon) \right)$$

y si  $f(x)$  es continua en  $x = x_0$  entonces  $F(x_0) \rightarrow f(x_0)$ .

En este punto se pueden puntualizar varias cosas:

1. El valor  $F(x) = \frac{1}{2} (\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} f(x + \epsilon) + \lim_{\epsilon \rightarrow 0^-} f(x - \epsilon))$  al cual converge la expansión de Fourier, cobra particular importancia cuando el punto  $x = x_0$  es una discontinuidad. Tal y como veremos más adelante (sección 2.22.1) y expresa este teorema, las series de Fourier son particularmente apropiadas para expandir funciones discontinuas (en un número finito de puntos en el intervalo), sin embargo, por ser una base de funciones continuas no puede reproducir la discontinuidad como tal. La expansión de Fourier alrededor de un punto de discontinuidad  $x \rightarrow x_{\pm 0}$  tenderá al valor  $F(x) \rightarrow F(x_{\pm 0}) \equiv F_m$

<sup>13</sup>Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet 1805 - 1859. Matemático Alemán con importantes contribuciones en Teorías de números Algebraica, Series y aproximaciones de funciones y ecuaciones diferenciales parciales.

donde  $F_m = \frac{F(x_{+0})+F(x_{-0})}{2}$ . Es decir, tenderá al valor medio de los valores de la discontinuidad por la izquierda  $F(x_{-0})$  y por la derecha  $F(x_{+0})$ .

2. Si los coeficientes de Fourier tienen variaciones acotadas en el intervalo y  $|C_k| \rightarrow 0$  con  $k \rightarrow \infty$ . Entonces

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |C_k|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx |f(x)|^2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n^2 + b_n^2| = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx |f(x)|^2$$

que no es otra cosa que la expresión de la completitud de esta base de funciones.

## 2.21. Algunos ejemplos de expansiones en series de Fourier

Para ilustrar esta relación entre la función  $f(x)$  y su expansión en serie de Fourier  $F(x)$  analicemos algunos ejemplos típicos

### 2.21.1. Ondas Cuadradas

Para empezar, el caso de una función muy conocida en el ámbito de los circuitos eléctrico. Una onda cuadrada

$$f(t) = \begin{cases} -1 & \text{si } -\frac{1}{2}T \leq t < 0 \\ +1 & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}T, \end{cases}$$

En este caso se puede integrar entre  $[0, T/2]$  y luego multiplicar todo por 2.

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} dt = 1, \quad a_n = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) dt = \frac{\text{sen}(n\pi)}{n\pi} = 0,$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \text{sen}\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) dt = \frac{1 - \cos(n\pi)}{n\pi} = \frac{1 - (-1)^n}{n\pi},$$

Entonces solo sobreviven los  $b_{2n+1}$  ya que coeficientes pares se anulan:  $b_{2n} = 0$ .

$$f(t) = a_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{sen}\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) = 1 + \frac{4}{\pi} \left( \text{sen}(\omega t) + \frac{\text{sen}(3\omega t)}{3} + \frac{\text{sen}(5\omega t)}{5} + \frac{\text{sen}(7\omega t)}{7} + \dots \right)$$

donde hemos denotado  $\omega = 2\pi/T$ .

Al definir la función  $\omega$  podemos interpretar los coeficientes de Fourier  $a_n, b_n$  como las contribuciones de cada uno de los armónicos  $a_n, b_n \rightarrow \omega_n = \frac{2n\pi}{T}$ . A partir de estas contribuciones se construye el espectro de potencia, el cual está relacionado con la energía que aporta cada uno de estos armónicos. Por ello construimos un cantidad  $E_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$  y graficamos  $E_n$  vs  $n$  tal y como se puede comprobar en la figura 2.14, cuadrantes IV y VII. Se encuentra que se puede asociar un espectro de potencia a cada señal y con lo cual realizar una especie de identificación.

En este punto podemos hacernos algunas preguntas:

- ¿qué hubiera pasado si en vez de considerar el intervalo  $(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$  hubiéramos considerado  $(0, T)$ ?
- ¿tendríamos el mismo desarrollo en serie de Fourier?
- ¿el mismo espectro?

Justifique sus respuestas.

### 2.21.2. Variedades de dientes de sierra

Otra función muy común es la denominada dientes de sierra

$$f(t) = at \quad \text{si } 0 \leq t \leq T, \quad \text{con } a \text{ constante}$$

los coeficientes son los siguientes:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{T} \int_0^T at dt = aT, \\ a_n &= \frac{2}{T} \int_0^T at \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) dt = \frac{aT}{\pi^2 n^2} [n\pi \text{sen}(2n\pi) - \text{sen}^2(n\pi)] = 0, \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_0^T at \text{sen}\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) dt = -\frac{aT}{n\pi}. \end{aligned}$$

Tenemos entonces que

$$f(t) = at = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{sen}\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) = \frac{aT}{2} - \frac{aT}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}(\omega_n t)}{n}, \quad \text{para } 0 \leq t \leq T$$

En el caso particular de hacer  $a = 3$  y  $T = 2 \rightarrow \omega_n = n\pi$ , entonces:

$$f(t) = 3t = 3 - \frac{6}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}(n\pi t)}{n} = 3 - \frac{6\text{sen}(\pi t)}{\pi} - \frac{3\text{sen}(2\pi t)}{\pi} - \frac{2\text{sen}(3\pi t)}{\pi} - \frac{3\text{sen}(4\pi t)}{2\pi} - \frac{6\text{sen}(5\pi t)}{5\pi} + \dots$$

La figura 2.14 (cuadrantes V y VI) muestra la construcción de esta función y su representación en Series de Fourier.

A partir de esta función podemos hacer unas variaciones. Por ejemplo considérese la función

$$f(t) = at \quad \text{si } \frac{-T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2}, \quad \text{con } a \text{ constante} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} at dt & = 0 \\ a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} at \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) dt & = 0 \\ b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} at \text{sen}\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) dt & = -\frac{aT(-1)^n}{n\pi}. \end{cases}$$

Claramente es una función impar  $f(-x) = -f(x)$  y así lo refleja su expansión en series de Fourier. Si hacemos  $a = 3$  y  $T = 2 \rightarrow \omega_n = n\pi$  tendremos que la expresión para de la serie es

$$f(t) = 3t = \frac{6\text{sen}(\pi t)}{\pi} - \frac{3\text{sen}(2\pi t)}{\pi} + \frac{2\text{sen}(3\pi t)}{\pi} - \frac{3\text{sen}(4\pi t)}{2\pi} + \frac{6\text{sen}(5\pi t)}{5\pi} + \dots \quad \text{con } \frac{-T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2}$$

la cual, si bien es parecida no es igual a la anterior, debido que estamos expandiendo otra función.

Otra variación posible de la función “diente de sierra” puede ser la versión completamente par del “diente”,  $f(-x) = f(x)$ . Esta es

$$f(t) = \begin{cases} -at & \text{si } \frac{-T}{2} \leq t \leq 0 \\ at & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{T}{2} \end{cases}$$

El cálculo de los coeficientes resulta en:

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^0 (-at) dt + \frac{2}{T} \int_0^{T/2} at dt = \frac{aT}{2}, \\
 a_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^0 (-at) \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) dt + \frac{2}{T} \int_0^{T/2} at \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) dt = \frac{aT}{\pi^2 n^2} [(-1)^n - 1], \\
 b_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^0 (-at) \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) dt + \frac{2}{T} \int_0^{T/2} at \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) dt = 0.
 \end{aligned}$$

En este caso son los coeficiente  $b_n$  los que se anulan. Adicionalmente, nótese que para  $n$  par, los coeficientes  $a_n$  también se anulan, Otra vez, si hacemos  $a = 3$  y  $T = 2 \rightarrow \omega_n = n\pi$  tendremos la serie:

$$f(t) = \frac{3}{2} - \frac{12 \cos(\pi t)}{\pi^2} - \frac{4 \cos(3\pi t)}{3\pi^2} - \frac{12 \cos(5\pi t)}{25\pi^2} + \dots \quad \text{con } -\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2}$$

### 2.21.3. Función cuadrática

Otro caso, complementario al anterior por sus propiedades de simetría, es la expansión en series de Fourier de la función  $f(x) = x^2$  para  $-\pi < x < \pi$ . Entonces los coeficientes de la expansión serán

$$f(x) = x^2 \Rightarrow \begin{cases} a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx & = \frac{2\pi^2}{3} \\ a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos(nx) dx & = \frac{4(-1)^n}{n^2} \end{cases}$$

ya que los coeficientes correspondientes a los términos impares  $b_n$  se anulan. Con lo cual

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos(nx)}{n^2}$$

Nótese que como un resultado particular, al evaluar en  $x = \pi$ , se tiene la función zeta de Riemann  $\zeta(2)$

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \Rightarrow \zeta(2) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Pero este caso se presta también para considerar funciones no periódicas. Supongamos que queremos desarrollar la expansión de Fourier para  $f(t) = t^2$  pero en este caso con  $0 < t < 2$ . Si este fuera el caso, empezamos por suponer que la función tienen un período, digamos  $T = 4$ . Esto es  $-2 \leq t \leq 2$ . Con lo cual

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{2}{4} \int_{-2}^2 t^2 dt = \frac{4}{4} \int_0^2 t^2 dt = \frac{8}{3} \\
 a_n &= \frac{2}{4} \int_{-2}^2 t^2 \cos\left(\frac{2\pi nt}{4}\right) dt = \frac{4}{4} \int_0^2 t^2 \cos\left(\frac{\pi nt}{2}\right) dt = \frac{16}{\pi^2 n^2} \cos(n\pi) = \frac{16}{\pi^2 n^2} (-1)^n
 \end{aligned}$$

Con lo cual tendremos que

$$t^2 = \frac{4}{3} + 16 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\pi^2 n^2} \cos\left(\frac{\pi nx}{2}\right) \quad \text{para } 0 < t \leq 2$$

## 2.22. Consideraciones de Simetría en series de Fourier

Es de hacer notar que estas propiedades de simetría respecto al período de la función ( $f(x) = f(-x)$  simetría y  $f(x) = -f(-x)$  antisimetría) para un período  $-\frac{T}{2} \leq x \leq \frac{T}{2}$  pueden y deben ser explotadas para simplificar los cálculos. Esto se puede resumir en

$$f(x) = f(-x) \Rightarrow \begin{cases} a_n \neq 0 \\ b_n = 0 \end{cases} \quad \text{y alternativamente} \quad f(x) = -f(-x) \Rightarrow \begin{cases} a_n = 0 \\ b_n \neq 0 \end{cases}$$

Pero más interesante aún es cuando estas propiedades de simetría se presentan en un cuarto del período. Vale decir, que  $f(x)$  será par o impar respecto a  $T/4$  i.e.  $f(\frac{T}{4} + x) = \pm f(\frac{T}{4} - x) \Rightarrow f(-s) = \pm f(s)$  donde  $s = \frac{T}{4} - x$ . Entonces

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{x_0}^{x_0+T} ds f(s) \sin\left(\frac{2\pi ns}{T} + \frac{\pi n}{2}\right)$$

Donde los límites de integración no se han visto alterados porque la función es periódica. Es inmediato comprobar que

$$\sin\left(\frac{2\pi ns}{T} + \frac{\pi n}{2}\right) = \sin\left(\frac{2\pi ns}{T}\right) \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) + \cos\left(\frac{2\pi ns}{T}\right) \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)$$

es decir

$$b_n = \frac{2}{T} \left[ \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) \int_{x_0}^{x_0+T} ds f(s) \sin\left(\frac{2\pi ns}{T}\right) + \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) \int_{x_0}^{x_0+T} ds f(s) \cos\left(\frac{2\pi ns}{T}\right) \right]$$

por lo que si  $n = 2k \Rightarrow \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) = \sin(\pi k) = 0$  y si  $n = 2k - 1 \Rightarrow \cos\left(\frac{2k-1}{2}\pi\right) = 0$ . La misma consideración se puede hacer para los coeficientes  $a_n$  (queda como ejercicio para el lector) y se puede concluir que

- Si  $f(x)$  par en  $T/4$  entonces  $a_{2n-1} = b_{2n} = 0$
- Si  $f(x)$  impar en  $T/4$  entonces  $a_{2n} = b_{2n-1} = 0$

### 2.22.1. Tratamiento de discontinuidades

Tal y como hemos mencionado, a diferencia de las series de potencias, las series de Fourier manejan razonablemente bien las discontinuidades, pero por ser una base de funciones continuas, no puede reproducirlas. Tal y como comentamos en el Teorema de Fourier y muestra la figura 2.15 el valor de las sumas parciales de Fourier en un punto de discontinuidad  $x = x_{\pm 0}$  será el promedio de los valores  $F(x_{-0})$  (por la izquierda) y  $F(x_{+0})$  (por la derecha) en la discontinuidad. Esto es la expansión de Fourier alrededor de un punto de discontinuidad  $x \rightarrow x_{\pm 0}$  tenderá al valor  $F(x) \rightarrow F(x_{\pm 0}) \equiv F_m$  donde  $F_m = \frac{F(x_{+0}) + F(x_{-0})}{2}$ .

## 2.23. El Fenómeno de Gibbs

También se muestra en la figura 2.15 que, tanto por la izquierda como por la derecha de la discontinuidad de la función escalón, las sumas parciales de Fourier oscilan y no convergen a los valores  $x_{\pm 0}$ . El comportamiento oscilante de las sumas parciales de Fourier alrededor de las discontinuidades, que no desaparecen ni en el límite se denominan *fenómeno de Gibbs* en honor a su descubridor Josiah Willard Gibbs.<sup>14</sup>

<sup>14</sup>Josiah Willard Gibbs 1839 - 1903. Algunos lo consideran el primer Físico Norteamericano, de hecho fue el primero en recibir un título de doctorado por una universidad norteamericana (Yale University). Hizo importantes aportes en electromagnetismo y sobre todo en termodinámica y física estadística, sentando las bases matemáticas para estas disciplinas. En matemáticas es conocido su estudio de las oscilaciones de las expansiones de las series de Fourier en los puntos de discontinuidad.

Para entender qué pasa en la discontinuidad consideremos una variación de la onda cuadrada considerada anteriormente (2.21). Entonces sus sumas parciales serán

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t < \pi \\ 0 & \text{si } \pi \leq t < 2\pi \end{cases} \Rightarrow F_{2n}^c(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} \text{sen}((2k-1)x)$$

porque los coeficientes pares ( $a_n$ ) se anulan. Para estudiar el fenómeno de Gibbs reescribimos la suma parcial anterior de una manera ingeniosa

$$F_{2n}^c(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^n \left( \int_0^t \text{ds} \cos(2k-1)s \right) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \int_0^t \text{ds} \left( \sum_{k=1}^n \cos(2k-1)s \right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^t \text{ds} \left( \frac{\text{sen}(2ns)}{\text{sen}(s)} \right)$$

donde, utilizando la fórmula de Moivre y convirtiendo esa serie de cosenos en una de exponenciales la cual, a su vez es una progresión geométrica (y le queda la comprobación al lector), hemos sustituido

$$\sum_{k=1}^n \cos(2k-1)s = \frac{\text{sen}(2ns)}{\text{sen}(s)}$$

Es inmediato convencerse que las sumas parciales  $F_{2n}^c(x)$  siempre tendrán máximos y mínimos

$$\frac{dF_{2n}^c(x)}{dx} = \frac{\text{sen}(2nx)}{\text{sen}(x)} = 0 \Rightarrow \text{para } x = \frac{m\pi}{2n} \text{ con } m = 1, 2, 3, \dots$$

Las Series de Fourier tienden a sobre-estimar el valor de los puntos de discontinuidad en  $\pm 18\%$  esto es un valor de  $\approx 1,1789797$ . La inclusión de más términos en las sumas parciales no mejoran la situación. El fenómeno de Gibbs no se restringe a Series de Fourier sino que también se presenta en las demás series de funciones (ver detalles en la referencia: **Arfken-Weber-2000**).

El fenómeno de Gibbs fue observado ¡experimentalmente! por primera vez por Albert Michelson.<sup>15</sup> Para finales de 1800 Michelson había creado un dispositivo mecánico para medir las componentes de Fourier de señales eléctricas. Al incorporarle una onda cuadrada observó que una oscilación inesperada en los puntos de discontinuidad. Creyó que esa oscilación se debía a defectos del dispositivo. Luego de probar múltiples tipos de señales periódicas y observar un comportamiento similar, decidió comentárselo a su amigo Willard Gibbs, de la Universidad Yale. Al poco tiempo Gibbs volvió con una explicación que dejó intacta la fama de Michelson como instrumentista. El fenómeno es una consecuencia de la teoría de series de Fourier y no del equipo diseñado por Michelson<sup>16</sup>.

### 2.23.1. Corrección al fenómeno de Gibbs: Factor $\sigma$ de Lanczos

Una de las estrategia para corregir las oscilaciones del fenómeno de Gibbs se le debe a Lanczos<sup>17</sup> Considerando el mismo caso de la función onda cuadrada, se puede intentar sustituir la función oscilante  $F_n^c(x)$

<sup>15</sup> **Albert Abraham Michelson** Strelno, Prussia, 1852 - Pasadena EEUU. 1931. Premio Nobel en Física (1907) uno de los físicos experimentales más habilidosos de todos los tiempos. La precisión y lo ingenioso de los instrumentos creados por él son famosos. Con importantes contribuciones en medidas de fenómenos en óptica. Una de sus contribuciones más conocidas son los experimentos para mostrar la inexistencia del Ether como medio de trasmisión para el fenómeno electromagnético. Más detalles <http://nobelprize.org/physics/laureates/1907/michelson-bio.html>

<sup>16</sup> Más detalles [http://en.wikipedia.org/wiki/Gibbs\\_phenomenon](http://en.wikipedia.org/wiki/Gibbs_phenomenon)

<sup>17</sup> **Cornelius Lanczos** 1893 - 1974 Hungría. Matemático húngaro con contribuciones importante en Relatividad y Física Teórica. En matemáticas es conocido inventar la transformada rápida de Fourier. Más detalles en <http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Lanczos.html>

por su promedio  $\bar{F}_n^c(x)$  alrededor del punto  $x$ . Vale decir

$$F_{2n}^c(x) \rightarrow \bar{F}_{2n}^c(x) = \frac{n}{\pi} \int_{x-\frac{\pi}{2n}}^{x+\frac{\pi}{2n}} ds F_{2n}^c(s) = \frac{n}{\pi} \int_{x-\frac{\pi}{2n}}^{x+\frac{\pi}{2n}} ds \left[ \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} \text{sen}((2k-1)s) \right]$$

desarmando tendremos que

$$\begin{aligned} \bar{F}_{2n}^c(x) &= \frac{n}{\pi} \int_{x-\frac{\pi}{2n}}^{x+\frac{\pi}{2n}} ds \left[ \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} \text{sen}((2k-1)s) \right] \\ &= \frac{n}{\pi} \left[ \frac{\pi}{2n} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)^2} \cos((2k-1)s) \right]_{x-\frac{\pi}{2n}}^{x+\frac{\pi}{2n}} \\ \bar{F}_{2n}^c(x) &= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} \underbrace{\left[ \frac{\text{sen}\left(\frac{\pi}{2n}(2k-1)\right)}{\frac{\pi}{2n}(2k-1)} \right]}_{\sigma} \text{sen}((2k-1)x) \end{aligned}$$

Con lo cual hemos identificado el factor  $\sigma$  de Lanczos. Siguiendo este mismo proceso se puede generalizar para cualquier función de tal modo que una serie de Fourier genérica podrá ser corregida con un factor  $\sigma$  para lograr

$$\bar{F}_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \left[ \frac{\text{sen}\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{\left(\frac{k\pi}{n}\right)} \right] (a_k \cos(kx) + b_k \text{sen}(kx)) \equiv \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \sigma_k (a_k \cos(kx) + b_k \text{sen}(kx))$$

## 2.24. Transformadas de Fourier

La transformada de Fourier representa (como combinación lineal de funciones sinusoidales) a funciones definidas en toda la recta real y/o sin una periodicidad definida. Puede ser considerada como la generalización de la representación en serie de Fourier, y es mayormente utilizada para expresar funciones que varían en el tiempo con el único requisito que tengan norma acotada, i.e.  $\int_{-\infty}^{\infty} dt |f(t)|$  finita

Anteriormente hemos visto, que podemos expresar una función en término de series de Fourier complejas

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i\frac{2n\pi}{T}t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i\omega_n t}$$

donde hemos definido  $\omega = \frac{2n\pi}{T}$ .

Ahora bien, podemos hacer  $T \rightarrow \infty$  con lo cual  $[-T/2, T/2] \rightarrow [-\infty, \infty]$  pero también se tiene:

$$T \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{2\pi}{T} = \frac{\omega}{n} = \Delta\omega \rightarrow d\omega \text{ y además } \frac{\int_{-T/2}^{T/2} dt f(t)}{T} \rightarrow 0 \text{ ya que } \int_{-\infty}^{\infty} dt f(t), \text{ existe y es acotada.}$$

Si recordamos la expresión que toman los coeficientes de la expansión

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dx e^{-i\frac{2n\pi x}{T}} f(x) \Rightarrow f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \frac{\Delta\omega}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} dx e^{-inx} f(x) \right) e^{i\omega_n t}$$

con lo cual hacer  $T \rightarrow \infty$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{i\omega t} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-i\omega x} f(x)}_{F(\omega)}$$

De este modo, la transformada de Fourier de una función y su inversa, pueden escribirse como

$$F(\omega) \equiv \mathcal{F}[f(t)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-i\omega t} f(t) \quad \Leftrightarrow \quad f(t) \equiv \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{i\omega t} F(\omega)$$

### 2.24.1. Propiedades

Las transformada de Fourier cumplen con las siguiente propiedades, las cuales de derivan de la definición arriba expuesta

1. Las transformada de la derivada  $\mathcal{F}[f'(t)] = i\omega F(\omega)$  y en general  $\mathcal{F}[f^n(t)] = i^n \omega^n F(\omega)$ . Esta propiedad es más o menos inmediata a partir de la definición integrando por partes

$$\mathcal{F}[f'(t)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} f'(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\omega t} f(t) \Big|_{-\infty}^{\infty} + \frac{i\omega}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} f(t) = i\omega F(\omega)$$

2. La transformada de la integral

$$\mathcal{F} \left[ \int_{-\infty}^t ds f(s) \right] = \frac{1}{i\omega} F(\omega) + 2\pi c \delta(\omega)$$

donde la función (distribución)  $\delta(\omega)$  se denomina delta de Dirac y el término  $2\pi c \delta(\omega)$  representa la transformada de la constante de integración

3. Escalamiento  $\mathcal{F}[f(at)] = \frac{1}{a} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$
4. Traslación  $\mathcal{F}[f(t+a)] = e^{ia\omega} F(\omega)$
5. Multiplicación por un exponencial  $\mathcal{F}[e^{i\alpha t} f(t)] = F(\omega + i\alpha)$

### 2.24.2. Funciones pares e impares

Al igual que en las expansiones de Fourier, la paridad de las función  $f(t)$  es importante. Esto se nota rápidamente a partir de la definición. Supongamos  $f(t) = -f(-t)$ , entonces

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-i\omega t} f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt (\cos(\omega t) - i \operatorname{sen}(\omega t)) f(t) = \frac{-2i}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} dt \operatorname{sen}(\omega t) f(t)$$

con lo cual podremos definir las transformadas de Fourier seno y coseno para funciones impares y pares respectivamente. Esto es para funciones impares  $f(t) = -f(-t)$

$$F(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} dt \cos(\omega t) f(t) \quad \Leftrightarrow \quad f(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} d\omega \cos(\omega t) F(\omega)$$

y para funciones pares  $f(t) = f(-t)$

$$F(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} dt \operatorname{sen}(\omega t) f(t) \quad \Leftrightarrow \quad f(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} d\omega \operatorname{sen}(\omega t) F(\omega)$$

### 2.24.3. Bases discreta y continuas: La base de Ondas Planas

Haremos una digresión para fijar conceptos y extender algunos de los razonamientos que hemos desarrollado hasta aquí. Tal y como hemos visto repetidas veces, la representación de un vector  $|F\rangle$  en un espacio vectorial abstracto  $\mathbf{V}$  puede darse en término de una base ortonormal de vectores (discreta y finita  $B_{DF} = \{|u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle, \dots, |u_n\rangle\}$  o discreta e infinita  $B_{DI} = \{|v_1\rangle, |v_2\rangle, |v_3\rangle \dots |v_n\rangle \dots\}$ ) de la forma:

$$|F\rangle = \begin{cases} \sum_{i=0}^n c_i |u_i\rangle = \sum_{i=0}^n \langle u_i | F \rangle |u_i\rangle & \Leftarrow B_{DF} = \{|u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle \dots |u_n\rangle\} \\ \sum_{i=0}^{\infty} c_i |v_i\rangle = \sum_{i=0}^{\infty} \langle v_i | F \rangle |v_i\rangle & \Leftarrow B_{DI} = \{|v_1\rangle, |v_2\rangle, |v_3\rangle \dots |v_n\rangle \dots\} \end{cases}$$

donde en ambos casos:

$$c_i = \langle u_i | F \rangle = \sum_{j=0}^{\infty} c_j \langle u_i | u_j \rangle = \sum_{j=0}^{\infty} c_j \delta_{ij}$$

la intención ahora será utilizar la transformada de Fourier para construir la generalización de bases discretas a continua  $|w_\alpha\rangle$  de tal forma que transformamos el índice de la sumatoria en la variable de una integral

$$|\Psi\rangle = \int d\alpha c(\alpha) |w_\alpha\rangle$$

donde

$$c(\beta) = \langle w_\beta | \Psi \rangle = \int d\alpha c(\alpha) \langle w_\beta | w_\alpha \rangle = \int d\alpha c(\alpha) \delta(\alpha - \beta)$$

con en la cual  $\delta(\alpha - \beta)$  es una Delta de Dirac.

Así, los dos conceptos expresados hasta ahora tienen una expresión:

Propiedad \ Base	Discreta	Continua
Ortogonalidad	$\langle v_i   v_j \rangle = \delta_{ij}$	$\langle w_\beta   w_\alpha \rangle = \delta(\alpha - \beta)$
Cierre	$1 = \sum_{j=0}^{\infty}  v_j\rangle \langle v_j $	$1 = \int d\alpha  w_\alpha\rangle \langle w_\alpha $
Expansión	$ F\rangle = \sum_{i=0}^{\infty} c_i  u_i\rangle$	$ \Psi\rangle = \int d\alpha c(\alpha)  w_\alpha\rangle$
Componentes	$c_i = \langle u_i   F \rangle$	$c(\beta) = \langle w_\beta   \Psi \rangle$
Producto Interno	$\langle G   F \rangle = \sum_{i=0}^{\infty} g_i^* f_i$	$\langle G   F \rangle = \int d\alpha g^*(\alpha) f(\alpha)$
Norma	$\langle F   F \rangle = \sum_{i=0}^{\infty}  f_i ^2$	$\langle F   F \rangle = \int d\alpha  f(\alpha) ^2$

Ilustraremos esta generalización con la construcción de la base de ondas planas. Hemos visto que la transformada compleja de Fourier compleja para una función, se puede escribir como

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{ist} f(t) \quad \Leftrightarrow \quad f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} ds e^{-ist} F(s)$$

las cuales reescribiremos en términos más familiares a la comunidad de físicos como

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} dp e^{ipx/\hbar} \bar{\psi}(p) \quad \Leftrightarrow \quad \bar{\psi}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ipx/\hbar} \psi(x)$$

Hemos tenido cuidado de incluir los factores de normalización adecuados para el caso de las descripciones en mecánica cuántica. Estas fórmulas pueden ser reinterpretadas en función de los conceptos anteriormente expuestos y podemos definir una base continua de la forma

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} dp \underbrace{\left( \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{i px/\hbar} \right)}_{v_p(x)} \bar{\psi}(p) \quad \Leftrightarrow \quad \bar{\psi}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} dx \underbrace{\left( \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{-i px/\hbar} \right)}_{v_p^*(x)} \psi(x)$$

por lo cual

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dp v_p(x) \bar{\psi}(p) \quad \Leftrightarrow \quad \bar{\psi}(p) = \int_{-\infty}^{\infty} dx v_p^*(x) \psi(x)$$

Diremos que la función  $\psi(x)$  está expresada en la base de ondas planas  $v_p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{i px/\hbar}$

Nótese

- El índice  $p$  de  $v_p(x)$  varía de forma continua entre  $-\infty$  e  $\infty$ .
- Que  $v_p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{i px/\hbar} \notin \mathcal{L}^2$  es decir no pertenece al espacio vectorial de funciones de cuadrado integrable ya que su norma diverge

$$\langle v_p | v_p \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx |v_p(x)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{2\pi\hbar} \rightarrow \infty$$

- Que las proyecciones de  $\psi(x)$  sobre la base de ondas planas es  $\bar{\psi}(p) = \langle v_p | \psi \rangle$
- La relación de cierre para esta base se expresa como

$$1 = \int d\alpha |v_\alpha\rangle \langle v_\alpha| \quad \Leftrightarrow \quad \int_{-\infty}^{\infty} dp v_p^*(x') v_p(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dp \frac{1}{2\pi\hbar} e^{i p(x'-x)/\hbar} = \delta(x' - x)$$

mientras que de la definición de producto interno, uno obtiene

$$\langle v_{p'} | v_p \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx v_{p'}^*(x) v_p(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dp \frac{1}{2\pi\hbar} e^{i x(p'-p)/\hbar} = \delta(p' - p)$$

### 2.24.4. Un par de ejemplos

Un ejemplo inmediato lo tenemos al considerar la función

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } |t| < 1 \\ 0 & \text{el resto} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^1 dt 1 e^{-i\omega t} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left. \frac{e^{-i\omega} - e^{i\omega}}{-i\omega} \right|_{-1}^1 = \frac{2\text{sen } \omega}{\sqrt{2\pi\omega}}$$

el otro ejemplo de uso lo podremos construir a si consideramos la ecuación diferencial inhomogénea y busquemos su solución

$$\frac{d\phi(x)}{dx^2} - K^2\phi(x) = f(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^1 dt \left[ \frac{d\phi(x)}{dx^2} - K^2\phi(x) \right] e^{-i\omega t} = F(\omega)$$

donde  $F(\omega)$  es la transformada de Fourier de la función  $f(x)$ . Utilizando las propiedades de la transformada de Fourier obtenemos que

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^1 dt \left[ \frac{d\phi(x)}{dx^2} \right] e^{-i\omega t} - K^2\tilde{\phi}(\omega) = F(\omega) \quad \Rightarrow \quad -k^2\tilde{\phi}(\omega) - K^2\tilde{\phi}(\omega) = F(\omega) \quad \Rightarrow \quad \tilde{\phi}(\omega) = -\frac{F(\omega)}{k^2 + K^2}$$

donde hemos representado  $\tilde{\phi}(\omega)$  como la transformada de Fourier de la solución  $\phi(x)$ . Con lo cual

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^1 dt \tilde{\phi}(\omega) e^{-i\omega t} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^1 dt \frac{F(\omega)}{k^2 + K^2} e^{-i\omega t}$$

Como solución formal de la ecuación diferencial resulta sencilla y el método también es inmediato. El punto crucial es la solución del la integral que resulta de la transformación inversa. Normalmente este tipo de integrales no son tratables de manera analítica. Pero siempre queda el recurso numérico.

### 2.24.5. Transformadas Discretas de Fourier

Aquí haremos algo más contemporáneo que será estudiar la versión discreta de esta transformación. En general las integrales, en su mayoría, no se pueden resolver analíticamente por lo que tenemos que proceder a resolverlas de forma numérica. La mayor parte de los métodos numéricos involucra convertir integrales en sumatorias. Es decir en series de funciones.

Hemos visto como las funciones trigonométricas (y las exponenciales de argumento imaginario) son ortogonales bajo integrales evaluadas en un determinado intervalo. En otras palabras con la definición de producto interno en un espacio de funciones. Ahora bien, esas mismas funciones (*Fourier Generalidades, cosenos* y funciones *exponenciales* de argumento imaginario) serán también ortogonales al ser evaluadas en puntos muy particulares.

Consideremos los siguientes  $2N$  puntos  $t_k = \frac{kT}{2N}$  y probaremos que las funciones  $e^{2\pi i p t_k/T}$  y  $e^{2\pi i q t_k/T}$  serán ortogonales  $\propto \delta_{qp}$  en un conjunto esos puntos  $t_k$ . Esto es

$$\sum_{k=0}^{2N-1} \left[ e^{\frac{2\pi i p t_k}{T}} \right]^* e^{\frac{2\pi i q t_k}{T}} = \sum_{k=0}^{2N-1} e^{\frac{2\pi i s t_k}{T}} = \sum_{k=0}^{2N-1} e^{\frac{2\pi i s k}{2N}} = \begin{cases} \frac{1-r^{2N}}{1-r} = 0 & r \neq 1 \\ 2N & r = 1 \end{cases}$$

donde hemos sustituido  $s = q - p$ , y evaluado en los puntos  $t_k = \frac{kT}{2N}$  con  $k = 1, 2, 3, \dots, 2N - 1$ . Nótese que la última de las series es una serie finita y geométrica con razón  $r = e^{(\pi i s)/N}$ , que comienza con 1 y por lo tanto suma (dependiendo del valor de  $r$ ) lo que aparece en la llave. Es inmediato convencerse que, para todo  $N$  se cumple que  $r^{2N} = e^{2\pi i s} = 1$  (con  $s$  entero) con lo cual se cumple la relación de ortogonalidad que buscamos

$$\sum_{k=0}^{2N-1} \left[ e^{\frac{2\pi i p t_k}{T}} \right]^* e^{\frac{2\pi i q t_k}{T}} = 2N \delta_{qp} \quad \text{con } k = 1, 2, 3, \dots, 2N - 1 \quad (2.55)$$

Si hacemos un ligero cambio de notación y llamamos  $\omega_m = \frac{2\pi m}{T}$  tendremos algunos cambios, en apariencia, cosméticos

$$e^{\pm \frac{2\pi i m t_k}{T}} \rightarrow e^{\pm \omega_m t_k} \Rightarrow F(\omega_m) = \frac{1}{2N} \sum_{k=0}^{2N-1} f(t_k) e^{\pm \omega_m t_k} \Leftrightarrow f(t_k) = \frac{1}{2N} \sum_{m=0}^{2N-1} F(\omega_m) e^{\pm \omega_m t_k} \quad (2.56)$$

La función  $F(\omega_m)$  representa la transformada discreta de Fourier de la  $f(t_k)$ . Para despejar la función  $f(t_k)$  hemos utilizado la relación de ortogonalidad 2.55.

Consideremos el siguiente  $f(t_k) = \cos(t_k)$  evaluado en un período  $T = 2\pi$  y dividido, digamos en  $N = 2$  intervalos. Los puntos en los cuales evaluaremos nuestra serie serán  $2N = 4$ , vale decir

$$t_k = \frac{kT}{2N} \equiv \frac{k\pi}{2} \quad \text{con } k = 0, 1, 2, 3 \quad \Leftrightarrow \quad \omega_m = \frac{2\pi m}{T} \equiv m \quad \Rightarrow \quad \frac{e^{i\omega_m t_k}}{2N} \equiv \frac{e^{imk\pi/2}}{2N}$$

nótese que la función  $f(t_k)$  puede ser escrita como un vector  $f(t_k) = (1, 0, -1, 0)$ , con lo cual para encontrar la expresión de su transformada discreta de Fourier,  $F(\omega_m)$ , podemos expresar la suma como una matriz de transformación con índices  $m, k$ . Esto es

$$\frac{e^{imk\pi/2}}{2N} \Leftrightarrow \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

con lo cual

$$F(\omega_m) = \frac{1}{2N} \sum_{k=0}^{2N-1} f(t_k) e^{\pm \omega_m t_k} \Rightarrow \begin{pmatrix} F(\omega_0) \\ F(\omega_1) \\ F(\omega_2) \\ F(\omega_3) \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Respecto a la ecuación 2.56 se deben puntualizar varios elementos

- la frecuencia angular  $\omega_m = \frac{2\pi m}{T}$  corresponde a lo que en Física se denomina el espacio recíproco (al temporal), espacio de frecuencias u  $\omega$ -espacio. Por ello la función  $F(\omega_m)$  está expresada en este espacio de frecuencias, mientras que la función  $f(t_k)$  en el de tiempos.
- La elección de uno de los signos  $+$  y  $-$  en la expresión  $e^{\pm \omega_m t_k}$  es arbitraria.

Con lo cual si “reconstruimos” la función original a partir de la transformada discreta nos sorprende el resultado, por cuanto no coincide

$$f(t_k) = \frac{1}{2} e^{-it_k} + \frac{1}{2} e^{-3it_k} \Rightarrow \Re[f(t_k)] = \frac{1}{2} \cos t_k + \frac{1}{2} \cos 3t_k$$

Ahora bien, para los puntos  $t_k = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \text{ y } \frac{3\pi}{2}$  si se cumple que los valores  $\cos t_k = \frac{1}{2} \cos t_k + \frac{1}{2} \cos 3t_k$ . En los pocos puntos seleccionados  $\cos t_k$  y  $\cos 3t_k$  se asemejan. En la medida que seleccionemos más puntos en esa medida se dejan de parecer y la reconstrucción de la función será más fidedigna.

**Programa para generar cuadraturas de Gauss – Legendre para n puntos**

```
[> restart: Digits:=20:
> n := 3:
> L := LegendreP(n,z): p:=expand(%);
      p :=  $\frac{5}{2}z^3 - \frac{3}{2}z$  (1)
```

Las raíces de los polinomios de Legendre representan las abscisas del problema

```
> x := [fsolve(p)];
      x := [-0.77459666924148337704, 0., 0.77459666924148337704] (2)
```

Se puede construir una procedimiento que tome como entrada una función  $f(x)$  y genere los valores aproximados

```
> proced := f -> sum(c['i']*f(x['i']), 'i'=1..n):
Se calculan los pesos a partir de resolver el siguiente sistema lineal de ecuaciones:
> ecs := []:
> for i from 1 to n do
>   ecs := [op(ecs), proced(z->z^(i-1)) = int(z^(i-1), z=-1..1)]:
> end do:
> ecs;
```

$$\left[ \begin{array}{l} c_1 + c_2 + c_3 = 2, -0.77459666924148337704 c_1 + 0.77459666924148337704 c_3 = 0, \\ 0.60000000000000000001 c_1 + 0.60000000000000000001 c_3 = \frac{2}{3} \end{array} \right]$$

```
> sys := {op(ecs)}: var := {seq(c[k], k=1..n)}:
> pesos := solve(sys, var); assign(pesos):
pesos := {c1 = 0.55555555555555555555, c2 = 0.88888888888888888891, c3
= 0.55555555555555555555}
```

Para probar el método, generemos aleatoriamente un polinomio de grado  $2n - 1$

```
> q := randpoly(z, degree=2*n-1);
      q :=  $-56 - 7z^5 + 22z^4 - 55z^3 - 94z^2 + 87z$  (3)
```

con el polinomio anterior construyamos una función  $g(x)$

```
> g := unapply(q, z);
      g :=  $z \rightarrow -56 - 7z^5 + 22z^4 - 55z^3 - 94z^2 + 87z$  (4)
```

apliquemos la regla definida anteriormente

```
> calculado := proced(g);
      calculado := -165.86666666666666667 (5)
```

Calculemos el resultado exacto

```
> exacto := int(q, z=-1..1);
      exacto :=  $-\frac{2488}{15}$  (6)
```

Ahora podemos comparar el resultado exacto con el aproximado

```
> evalf(exacto - calculado);
      0. (7)
```

FIN

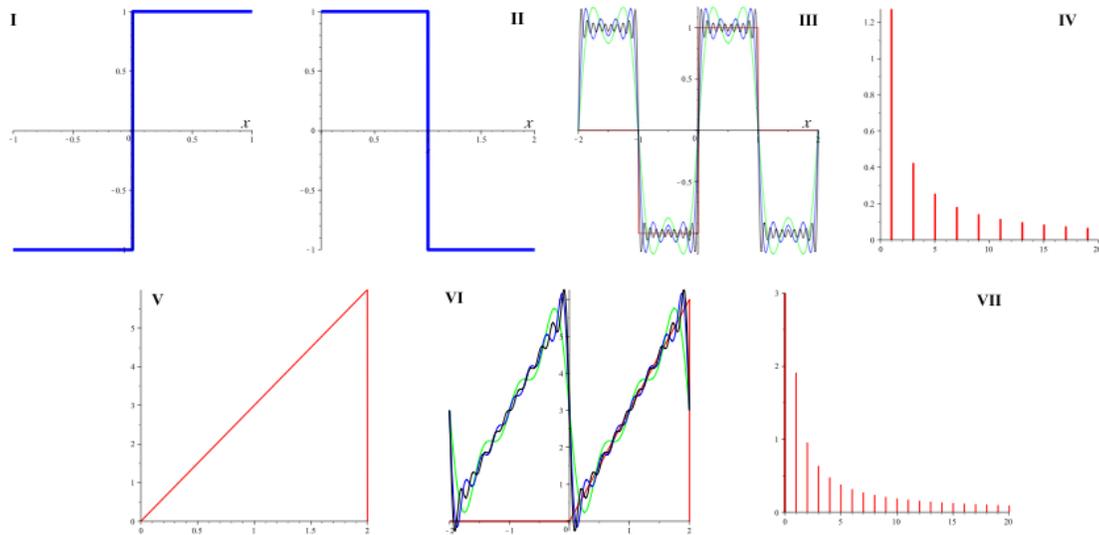


Figura 2.14: Un par de funciones, definidas con un período  $T$ , a ser expresadas en como expansiones en Series de Fourier. En los cuadrantes I y II, encontramos una onda cuadrada. La primera (cuadrante I) definida en un intervalo  $(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$  y en el cuadrante II la misma función definida en un intervalo  $(0, T)$ . El cuadrante III ilustra las aproximaciones de la serie de Fourier para  $n = 3, 7, 20$ , mientras que el espectro de potencia se presenta en el cuadrante IV. La onda “diente de sierra”, definida en un intervalo  $(0, T)$ , se presenta en el cuadrante V. Sus aproximaciones en series de Fourier para  $n = 3, 7, 10$  se pueden observar en el cuadrante VI, mientras que el espectro de potencia en el cuadrante VII.

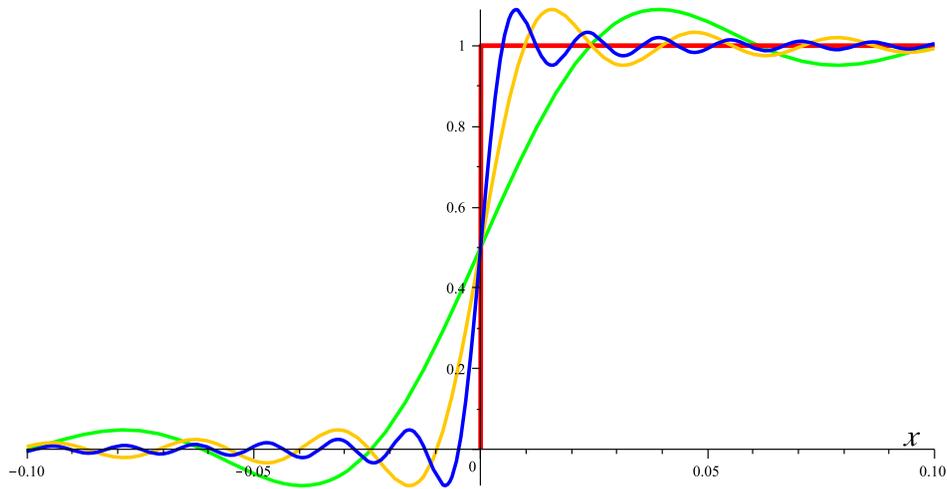


Figura 2.15: Aproximaciones por series de Fourier para la función escalón, línea roja. Las curvas corresponden a sumas parciales de Fourier:  $F_{40}(x), F_{100}(x), F_{200}(x)$ ,

# Bibliografía

- [Aleksandrov Kolmogorov y Lavrentiev 1999] A. D. Aleksandrov, A. N. Kolmogorov y M. A. Lavrentiev (1999) **Mathematics: Its Content, Methods and Meaning**. (*Dover Publications, New York*) Existe traducción por Editorial Alianza Universidad.
- [Arfken, Weber y Weber 2000] Arfken, G. B., Weber, H., y Weber, H.J. (2000) **Mathematical Methods for Physicists** 5ta Edición (*Academic Press, Nueva York*)
- [1] Byron, F.W. y Fuller W.F. (1970) **Mathematics of Classical and Quantum Physics** (*Dover Publications, New York*)
- [Cushing 1975] Cushing, J. (1975) **Applied Analytical Mathematics for Physical Sciences** (*John Wiley & Sons, New York*)
- [Hamming 1973] Hamming R.W. (1973) **Numerical Methods For Scientist and Engineers, 2nd ed.** (Dover, New York.)
- [Hassani 1991] Hassani, S. (1991) **Foundations of Mathematical Physics** (*Prentice Hall, International Edition, London:*)
- [Lebedev 1972] Lebedev, N.N. (1972) **Special Functions & Their Applications** (*Dover Publications, New York*)
- [math-atlas.org URL] **The Mathematical Atlas** <http://www.math-atlas.org/welcome.html>
- [Richards 2002] Richards, D. (2002) **Advanced Mathematical Methods with MAPLE** (*Cambridge University Press Cambridge*)
- [Riley Hobson y Bence 2002] Riley, K.F., Hobson, M.P. y Bence, S.J. (2002) **Mathematical Methods for Physics and Engineering** (*Cambridge University Press Cambridge*)
- [Weisstein URL] Weisstein, E. W., **MathWorld** <http://mathworld.wolfram.com/>