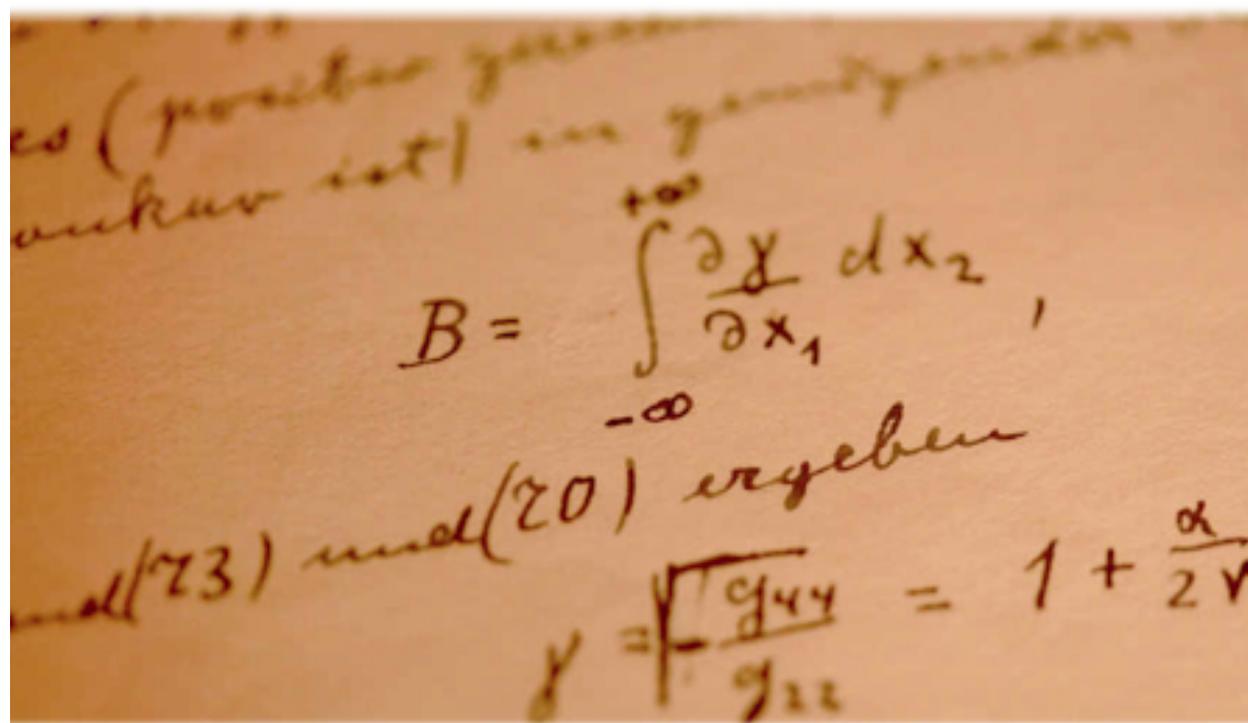


Matemáticas Avanzadas: de los espacios lineales al análisis vectorial



H. Hernández y L.A. Núñez

Matemáticas Avanzadas:

de los espacios lineales al análisis vectorial

H. Hernández

*Departamento de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad de Los Andes, Mérida-Venezuela*

L. A. Núñez

*Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga-Colombia*

24 de septiembre de 2015



*Portada: Detalle de un manuscrito de Albert Einstein, Universidad Hebrea de Jerusalén

Índice general

| | |
|--|----------|
| 1. Los vectores de siempre | 9 |
| 1.1. Vectores, escalares y álgebra vectorial | 10 |
| 1.1.1. Escalares y vectores | 10 |
| 1.1.2. Álgebra de vectores | 11 |
| 1.2. Independencia lineal y las bases para vectores | 13 |
| 1.3. Productos de vectores | 14 |
| 1.3.1. Producto escalar | 14 |
| 1.3.2. Producto vectorial | 16 |
| 1.3.3. Producto triple o mixto | 16 |
| 1.3.4. Una división fallida | 17 |
| 1.4. Componentes, coordenadas y cosenos directores | 18 |
| 1.4.1. Bases, componentes y coordenadas | 18 |
| 1.4.2. Cosenos directores | 19 |
| 1.5. Álgebra vectorial y coordenadas | 19 |
| 1.5.1. Suma y resta de vectores | 19 |
| 1.5.2. Dependencia e independencia lineal | 20 |
| 1.5.3. Producto escalar | 21 |
| 1.5.4. Producto vectorial | 22 |
| 1.5.5. Triple producto mixto | 22 |
| 1.6. Álgebra vectorial con índices | 23 |
| 1.6.1. Convención de Einstein | 23 |
| 1.6.2. Los vectores y los índices | 24 |
| 1.6.3. Un par de cálculos ilustrativos | 25 |
| 1.6.4. Escalares, pseudoescalares, vectores y pseudovectores | 26 |
| 1.7. Aplicaciones del álgebra vectorial | 27 |
| 1.7.1. Rectas y vectores | 27 |
| 1.7.2. Planos y vectores | 28 |
| 1.8. Un comienzo a la derivación e integración de vectores | 30 |
| 1.8.1. Vectores variables | 30 |
| 1.8.2. Derivación | 30 |
| 1.8.3. Velocidades y aceleraciones | 32 |
| 1.8.4. Vectores y funciones | 35 |
| 1.8.5. El vector gradiente | 37 |

| | |
|---|------------|
| 1.8.6. Integración | 40 |
| 1.9. Vectores y números complejos | 44 |
| 1.9.1. Los números complejos y su álgebra | 44 |
| 1.9.2. Vectores y el plano complejo | 45 |
| 1.9.3. Fórmulas de Euler y De Moivre | 46 |
| 1.9.4. Algunas aplicaciones inmediatas | 48 |
| 1.10. Algunos ejemplos resueltos | 52 |
| 1.11. Ejercicios propuestos | 57 |
| 2. Espacios Vectoriales Lineales | 63 |
| 2.1. Grupos, cuerpos y espacios vectoriales | 64 |
| 2.1.1. Grupos | 64 |
| 2.1.2. Cuerpo | 66 |
| 2.1.3. Espacios vectoriales lineales | 66 |
| 2.1.4. Ejemplos espacios vectoriales | 67 |
| 2.1.5. La importancia de la conceptualización y la notación | 68 |
| 2.1.6. Ejercicios | 68 |
| 2.2. Espacios métricos, normados y con producto interno | 70 |
| 2.2.1. Métricas y espacios métricos | 70 |
| 2.2.2. Normas y espacios normados | 71 |
| 2.2.3. Espacios con producto interno | 72 |
| 2.2.4. Ejercicio | 75 |
| 2.3. Variedades lineales | 78 |
| 2.3.1. Dependencia/independencia lineal | 78 |
| 2.3.2. Bases de un espacio vectorial | 79 |
| 2.3.3. El determinante de Gram | 81 |
| 2.3.4. Ortogonalidad y bases ortogonales | 82 |
| 2.3.5. Ortogonalización | 84 |
| 2.3.6. Complementos ortogonales y descomposición ortogonal | 87 |
| 2.3.7. Ejercicio | 89 |
| 2.4. Aproximación de funciones | 90 |
| 2.4.1. Condiciones para la aproximación de funciones | 90 |
| 2.4.2. El Método de mínimos cuadrados | 91 |
| 2.4.3. Interpolación polinomial de puntos experimentales | 94 |
| 2.4.4. Ejercicios | 96 |
| 2.5. Algunos ejemplos resueltos | 97 |
| 3. Vectores Duales y Tensores | 102 |
| 3.1. Funcionales lineales | 103 |
| 3.2. Paréntesis tensorial | 104 |
| 3.2.1. Tensores, una definición funcional | 104 |
| 3.2.2. Producto tensorial | 105 |
| 3.2.3. La tentación del producto interno | 107 |
| 3.2.4. Bases para un producto tensorial | 109 |
| 3.2.5. Tensores, sus componentes y sus contracciones | 109 |
| 3.2.6. Tensor métrico, índices y componentes | 112 |
| 3.3. Un par de tensores | 113 |
| 3.3.1. El tensor de esfuerzos (stress) | 114 |

| | | |
|-----------|--|------------|
| 3.3.2. | El Tensor de inercia | 117 |
| 3.4. | Repensando los vectores nuevamente | 119 |
| 3.4.1. | Vectores, covectores y leyes de transformación | 119 |
| 3.4.2. | Cartesianas y polares, otra vez | 120 |
| 3.4.3. | Repensando las componentes | 121 |
| 3.5. | Transformaciones, vectores y tensores | 124 |
| 3.6. | Un ejemplo detallado | 126 |
| 3.7. | Teorema del cociente | 130 |
| 3.8. | Vectores, tensores y espacios pseudo-euclidianos | 131 |
| 3.8.1. | Espacios minkowskianos | 132 |
| 3.8.2. | Un toque de Relatividad Especial | 133 |
| 3.8.3. | Ejercicios | 136 |
| 3.9. | Bases continuas | 138 |
| 3.9.1. | Bases de ondas planas | 139 |
| 3.9.2. | Las Representaciones $ r\rangle$ y $ p\rangle$ | 140 |
| 3.10. | Ejercicios propuestos | 143 |
| 4. | Matrices, Determinantes y Autovectores | 147 |
| 4.1. | Operadores Lineales | 148 |
| 4.1.1. | Espacio Vectorial de Operadores Lineales | 150 |
| 4.1.2. | Composición de Operadores Lineales | 151 |
| 4.1.3. | Funciones de Operadores | 153 |
| 4.1.4. | Proyectores | 153 |
| 4.1.5. | Espacio Nulo e Imagen | 154 |
| 4.1.6. | Operadores Biyectivos e Inversos | 156 |
| 4.1.7. | Operadores Hermíticos Conjugados | 158 |
| 4.1.8. | Operadores Unitarios | 159 |
| 4.1.9. | Ejercicios | 160 |
| 4.2. | Representación Matricial de Operadores | 161 |
| 4.2.1. | Bases y Representación Matricial de Operadores | 163 |
| 4.2.2. | Algebra de Matrices | 165 |
| 4.2.3. | Representación Diagonal | 165 |
| 4.2.4. | Sistemas de ecuaciones lineales | 166 |
| 4.2.5. | Operadores hermíticos | 167 |
| 4.2.6. | Inversa de una matriz | 167 |
| 4.2.7. | Cambio de bases para vectores | 168 |
| 4.2.8. | Ejercicios | 169 |
| 4.3. | Traza de Operadores | 169 |
| 4.3.1. | Invariancia de la Traza | 170 |
| 4.3.2. | Propiedades de la Traza | 170 |
| 4.4. | Diferenciación de Operadores | 170 |
| 4.4.1. | Reglas de diferenciación de operadores lineales | 171 |
| 4.4.2. | La fórmula de Glauber | 173 |
| 4.4.3. | Ejercicios | 174 |
| 4.5. | Un paréntesis determinante | 174 |
| 4.5.1. | Definición | 174 |
| 4.5.2. | Propiedades determinantes | 175 |
| 4.5.3. | Fórmula de Laplace | 177 |

| | |
|--|------------|
| 4.6. Un zoológico de matrices cuadradas | 177 |
| 4.7. Autovectores y Autovalores | 180 |
| 4.7.1. Definiciones y Teoremas Preliminares | 180 |
| 4.7.2. Algunos comentarios | 180 |
| 4.7.3. Algunos Ejemplos | 181 |
| 4.7.4. Autovalores, autovectores e independencia lineal | 182 |
| 4.8. Autovalores y Autovectores de un operador | 183 |
| 4.8.1. El polinomio característico. | 183 |
| 4.8.2. Primero los autovalores, luego los autovectores | 184 |
| 4.8.3. Ejercicios | 187 |
| 4.9. Autovalores y Autovectores de Matrices Importantes | 188 |
| 4.9.1. Autovalores y Autovectores de Matrices Similares | 188 |
| 4.9.2. Autovalores y Autovectores de matrices Hermíticas | 191 |
| 4.9.3. Autovalores y Autovectores de matrices Unitarias | 193 |
| 4.10. Conjunto completo de observables que conmutan | 197 |
| 4.10.1. Observables que Conmutan | 197 |
| 4.10.2. Ejemplos | 200 |
| 4.10.3. Ejercicios | 202 |
| 4.11. Sistemas de ecuaciones lineales: segunda revisión | 203 |
| 4.12. Algunos ejemplos resueltos | 207 |
| 5. Coordenadas Curvilíneas, Campos y Operadores Diferenciales | 216 |
| 5.1. Discreción derivativa | 217 |
| 5.2. Curvas y parámetros | 217 |
| 5.3. Ejemplo | 218 |
| 5.4. Coordenadas curvilíneas generalizadas | 220 |
| 5.4.1. Coordenadas generalizadas, vectores y formas | 221 |
| 5.4.2. Velocidades y aceleraciones | 222 |
| 5.4.3. Coordenadas cartesianas | 223 |
| 5.4.4. Coordenadas cilíndricas | 223 |
| 5.4.5. Coordenadas esféricas | 225 |
| 5.5. Vectores, Tensores, métrica y transformaciones | 228 |
| 5.5.1. Transformando vectores | 228 |
| 5.5.2. Transformando tensores | 230 |
| 5.6. Campos tensoriales y el concepto de campo | 231 |
| 5.7. Campos escalares y superficies | 234 |
| 5.8. Campos vectoriales y líneas de flujo | 234 |
| 5.8.1. Líneas de flujo o curvas integrales | 235 |
| 5.8.2. Trayectorias ortogonales a las líneas de flujo | 236 |
| 5.9. Flujo de Campos Vectoriales | 237 |
| 5.10. La fauna de los operadores vectoriales | 238 |
| 5.10.1. Derivada direccional, diferencial total y gradiente | 238 |
| 5.10.2. Divergencia y flujo en campos vectoriales | 242 |
| 5.10.3. Rotores, Líneas de torbellino y Circulación | 246 |
| 5.10.4. Formulario del Operador <i>nabla</i> , ∇ | 252 |
| 5.10.5. <i>Nabla</i> dos veces y el Laplaciano | 253 |
| 5.10.6. Derivadas Direccionales de Campos Vectoriales | 254 |
| 5.10.7. La Derivada Covariante | 256 |

| | |
|--|-----|
| 5.11. Integrales y Campos Vectoriales | 261 |
| 5.11.1. Integrales de Campos | 261 |
| 5.11.2. Integrales de línea | 262 |
| 5.11.3. Integrales de Superficie | 263 |
| 5.12. Campos Vectoriales y Teoremas integrales | 263 |
| 5.12.1. Teorema de Gauss | 263 |
| 5.12.2. Teorema de Stokes | 269 |
| 5.13. Teoría de Potencial | 272 |
| 5.13.1. Potenciales escalares | 272 |
| 5.13.2. Potenciales vectoriales y calibres | 273 |
| 5.13.3. Teorema de Green y Potenciales | 274 |
| 5.13.4. Teorema de Helmholtz | 274 |
| 5.14. Algunos ejemplos resueltos | 276 |
| 5.15. Ejercicios propuestos | 297 |

Borrador Preliminar

Introducción

El contenido de este libro no es más que la recopilación de las notas de clases...

Borrador Preliminar

Capítulo **1**

Los vectores de siempre

Borrador Preliminar

1.1. Vectores, escalares y álgebra vectorial

Desde los primeros cursos de Física en educación media, venimos hablando de vectores como cantidades que tienen que ser representadas con más de un número. Son varias las razones que obligan a introducir este (y otro) tipo de cantidades “multidimensionales”. Enumeraremos algunas que, a nuestro criterio personal, son las más representativas.

1. **Necesidad de modelos matemáticos de la naturaleza.** Desde los albores del renacimiento, con Galileo Galilei a la cabeza, nos es imperioso representar cantidades de manera precisa. Las matemáticas nos apoyan en esta necesidad de precisión y desde ese entonces son el lenguaje de la actividad científica.
2. **Los modelos tienen que tener contrastación experimental.** Las ciencias y sus modelos, en última instancia, tienen que ver con la realidad, con la naturaleza y por ello debemos medir y contrastar las hipótesis con esa realidad que modelamos. Necesitamos representar cantidades medibles (observables) y que, por lo tanto, tienen que ser representadas de la forma más compacta, pero a la vez más precisa posible.
3. **Las leyes de los modelos deben ser independiente de los observadores.** Cuando menos a una familia significativa de observadores, el comportamiento de la naturaleza no puede depender de la percepción de un determinado observador, por lo tanto, los modelos que construimos para describirla tampoco pueden depender de los observadores.

Es común que tropecemos con: escalares, vectores, tensores y espinores, dependiendo del número de cantidades que necesitemos para representar determinado objeto matemático. Podremos constatar que las leyes de la Física vienen escritas en forma vectorial (o tensorial) y, por lo tanto, será la misma ley para la familia de observadores equivalentes.

1.1.1. Escalares y vectores

Dejaremos para más adelante caracterizar objetos como tensores y espinores, por ahora nos contentaremos con refrescar nuestros recuerdos con cantidades como:

Escalares: Serán aquellas cantidades las cuales se representan con UN solo número, una magnitud: temperatura, volumen, masa, entre otras. Es costumbre no denotarlas de manera especial, así $T = 5^{\circ}C$ representará una temperatura de 5 grados centígrados.

Vectores: Serán cantidades las cuales, para ser representadas por un objeto matemáticos requieren más de una cantidad: requieren de UN número, UNA dirección y UN sentido. Entre las cantidades que típicamente reconocemos como vectores están: la velocidad, la aceleración, la fuerza. En términos gráficos podremos decir que un vector será un segmento orientado, en el cual la dimensión del segmento representará su módulo y su orientación la dirección y el sentido. Para diferenciarlos de las cantidades escalares hay una variedad de representaciones, entre ellas: en negrita \mathbf{a} ; con una flecha arriba de la cantidad \vec{a} ; con una tilde arriba o abajo \tilde{a} ; o explicitando el origen del segmento orientado \vec{OP} . El módulo del vector lo representaremos dentro de la función valor absoluto, o sencillamente sin la flecha arriba $a = |\mathbf{a}| = |\vec{a}|$.

Los vectores son independientes del sistema de coordenadas. Sus características (módulo, dirección y sentido) se preservarán en todos los sistemas de coordenadas. Más aún, habrá vectores que podremos desplazarlos (conservando su módulo dirección y sentido) paralelos a ellos mismos, en el espacio y seguirán siendo los mismos, por ello encontraremos el término de *vectores deslizantes*. Un ejemplo son las fuerzas que actúan en un determinado cuerpo, como se muestra el cuadrante I en la Figura 1.1. También habrá vectores

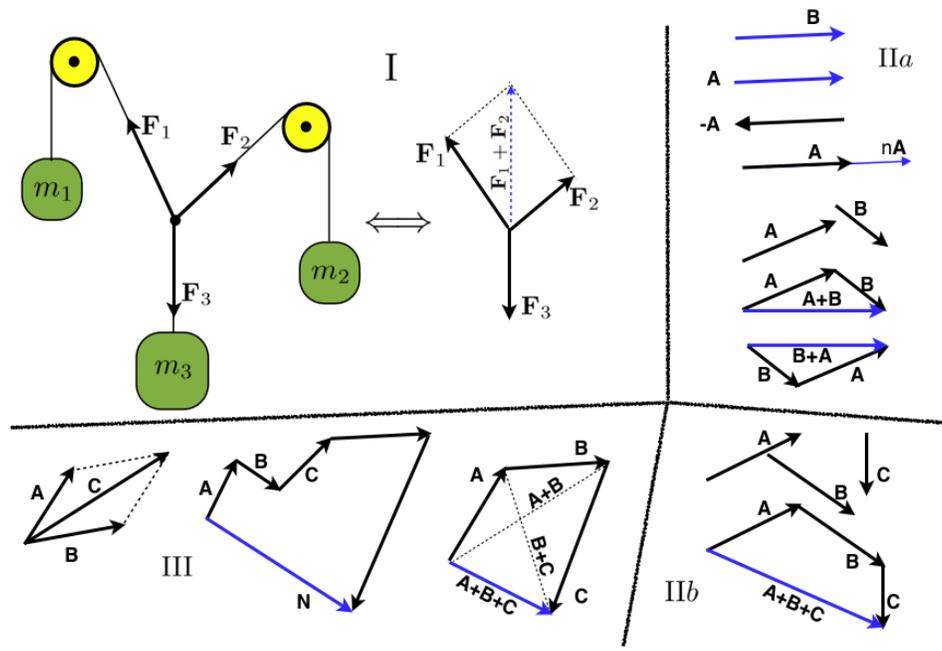


Figura 1.1: Vectores y sus operaciones

atados a un punto en el espacio, por cuanto representan una de sus propiedades: la velocidad del viento, el campo eléctrico, o sus variaciones son algunos ejemplos de estos *vectores atados* (observe la Figura 1.2 como ejemplos ilustrativos).

1.1.2. Álgebra de vectores

Enumeraremos rápidamente el álgebra de vectores sin hacer referencia a un sistema de coordenadas. Desde cursos anteriores nos enseñaron a representar gráficamente este álgebra, así tenemos que:

Vector nulo. Es aquel que tiene por módulo cero y no se le puede asignar dirección ni sentido. Podremos comparar vectores si tienen la misma dirección y sentido. El frecuente representar al vector nulo por $\mathbf{0}$.

Vector unitario. Es aquel que tiene por módulo la unidad, es muy útil por cuanto, para efectos algebraicos, “contiene” únicamente dirección y sentido. Lo denotaremos con un acento circunflejo, comúnmente llamado “sombrero” $\hat{\mathbf{u}}_a = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}$, con lo cual todo vector se podrá expresar por un módulo en la dirección y sentido de un vector unitario: $\mathbf{a} = |\mathbf{a}| \hat{\mathbf{u}}_a$.

Comparación de vectores. Al comparar sus módulos diremos que pueden ser mayores, menores o iguales. Por lo tanto, tal y como mostramos en el cuadrante IIa de la Figura 1.1, dos vectores serán iguales, $\mathbf{a} = \mathbf{b}$, si tienen la misma dirección y sentido.

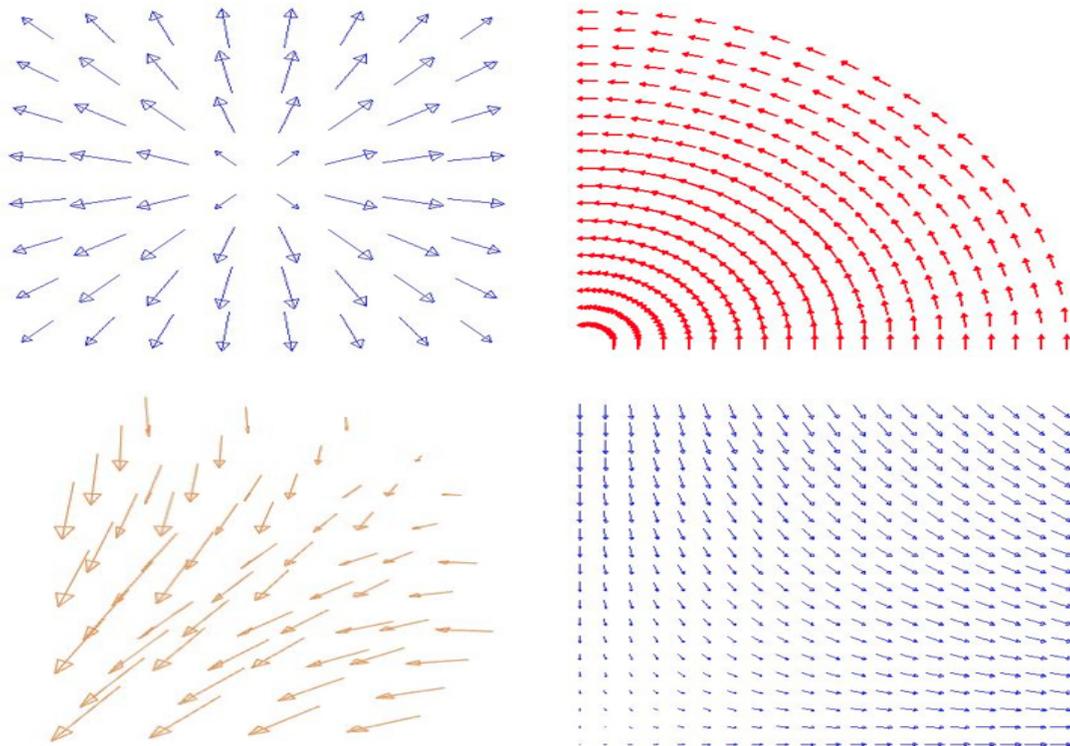


Figura 1.2: Ejemplos de *vectores atados*

Multiplicación por un escalar. Un vector multiplicado por un escalar, α , cambiará su módulo si $\alpha > 0$ y cambiará su sentido, y eventualmente su módulo, si $\alpha < 0$. Tal y como puede apreciarse en el cuadrante IIa de la Figura 1.1. Claramente dos vectores proporcionales serán colineales. Diremos además, que el inverso del vector \mathbf{a} será la multiplicación de \mathbf{a} por (-1) . Esto es $\mathbf{c} = (-1)\mathbf{a} = -\mathbf{a}$.

Suma de vectores. Aprendimos que para sumar vectores utilizamos la regla del paralelogramo, es decir, desplazamos paralelamente uno de los vectores y lo colocamos a continuación del otro, de tal forma que la diagonal del paralelogramo, que tiene por lados los vectores sumandos, constituye el vector suma (ver cuadrantes IIa y IIb de la Figura 1.1). Este esquema se puede generalizar para varios vectores tal y como lo mostramos en el cuadrante III de la Figura 1.1. Allí construimos un polígono cuyos lados los constituyen los vectores sumandos \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} , \mathbf{d} y \mathbf{n} con $\mathbf{n} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d}$.

Nótese que aún en el caso tridimensional, el vector suma siempre será coplanar (estará en el mismo plano) a los sumandos que lo generaron.

Igualmente, podemos definir la resta de vectores al sumar el inverso. Esto es

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} \equiv \mathbf{a} + (-\mathbf{b}) \Rightarrow \mathbf{0} = \mathbf{a} - \mathbf{a} \equiv \mathbf{a} + (-\mathbf{a}) .$$

En términos gráficos la resta de dos vectores se representa colocando los vectores (minuyendo y sustraendo) con el mismo origen y uniendo las cabezas de flecha. Dependiendo de cual vector es el minuyendo y cual sustraendo el vector resta apuntará del sustraendo hacia el minuyendo, esto es, $(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) - \mathbf{a} = \mathbf{b} + \mathbf{c}$.

Claramente, el módulo del vector resta representa la distancia entre los dos extremos de los vectores minuendo y el sustraendo

Un resumen de propiedades. Podemos resumir las propiedades del álgebra de vectores como sigue:

- La suma de vectores:
 - tiene un único elemento neutro $\mathbf{0} + \mathbf{a} = \mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}, \forall \mathbf{a}$,
 - existe un elemento simétrico $-\mathbf{a}$ (uno para cada vector) tal que $\mathbf{0} = \mathbf{a} - \mathbf{a} \equiv \mathbf{a} + (-\mathbf{a})$,
 - es conmutativa $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$,
 - es asociativa $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$,
 - es distributiva respecto a la multiplicación por escalares: $\alpha(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \alpha\mathbf{a} + \alpha\mathbf{b}$;
- La multiplicación de escalares por vectores:
 - es conmutativa $\mathbf{a}\alpha = \alpha\mathbf{a}$,
 - es asociativa $\alpha(\beta\mathbf{a}) = (\alpha\beta)\mathbf{a}$,
 - es distributiva $(\alpha + \beta)\mathbf{a} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{a}$.

1.2. Independencia lineal y las bases para vectores

Armados con el álgebra y explicitando sus propiedades podemos construir la primera aproximación a uno de los conceptos fundamentales del álgebra lineal. La noción de *independencia* o *dependencia lineal*.

Diremos que tres vectores $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ son *linealmente independientes* si se cumple que

$$\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b} + \gamma \mathbf{c} = \mathbf{0} \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$$

es decir, que la única manera que al sumar cualquier múltiplo de \mathbf{a}, \mathbf{b} y \mathbf{c} de manera que la suma se anule es obligando a que los escalares sean **necesariamente** nulos. Si no se cumple lo anterior entonces diremos que uno de los vectores será *linealmente dependiente* y por lo tanto se podrá expresar como combinación lineal de los otros dos

$$\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b} + \gamma \mathbf{c} = \mathbf{0} \quad \text{alguno de } \left\{ \begin{array}{l} \alpha \neq 0 \\ \beta \neq 0 \\ \gamma \neq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \mathbf{c} = \bar{\alpha} \mathbf{a} + \bar{\beta} \mathbf{b}$$

Los vectores linealmente independientes formarán una *base* para el espacio donde estos vectores “viven” y el número máximo de vectores linealmente independientes será la dimensión de ese espacio de “residencia”. Tratemos de concretar algunas de estas afirmaciones.

Dos vectores linealmente dependientes son colineales. Es claro que

$$\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad \text{con alguno de } \left\{ \begin{array}{l} \alpha \neq 0 \\ \beta \neq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{a} = -\frac{\beta}{\alpha} \mathbf{b} \\ \mathbf{b} = -\frac{\alpha}{\beta} \mathbf{a} \end{array} \right.$$

el contrario también será cierto: *si dos vectores son colineales ellos serán linealmente dependientes.*

$$\mathbf{a} = \lambda \mathbf{b} \Rightarrow \alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b} = \mathbf{0} \Rightarrow \alpha \lambda \mathbf{b} + \beta \mathbf{b} = \mathbf{0} \Rightarrow (\alpha \lambda + \beta) \mathbf{b} = \mathbf{0} \Rightarrow \lambda = -\frac{\beta}{\alpha},$$

con lo cual podremos afirmar que *si dos vectores son linealmente independientes ellos **no** son colineales.*

Tres vectores linealmente dependientes son coplanares. Es claro que por ser los tres vectores *linealmente dependientes* al menos uno de los escalares tiene que ser distinto de cero, digamos γ , esto es

$$\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b} + \gamma \mathbf{c} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{c} = -\frac{\alpha}{\gamma} \mathbf{a} - \frac{\beta}{\gamma} \mathbf{b} = \xi^1 \mathbf{a} + \xi^2 \mathbf{b},$$

pero como $\xi^1 \mathbf{a} \propto \mathbf{a}$ y $\xi^2 \mathbf{b} \propto \mathbf{b}$, esto significa que $\xi^1 \mathbf{a}$ y \mathbf{a} son colineales, de la misma manera que $\xi^2 \mathbf{b}$ y \mathbf{b} , y por lo tanto, la suma estará en el mismo plano.

Dos vectores linealmente independientes expanden todos los vectores coplanares. Dado dos vectores \mathbf{a} y \mathbf{b} linealmente independientes, entonces cualquier vector \mathbf{c} , coplanar con \mathbf{a} y \mathbf{b} , podrá expresarse como una combinación lineal de éstos. Diremos que \mathbf{c} se expresa en términos de \mathbf{a} y \mathbf{b} como $\mathbf{c} = \xi^1 \mathbf{a} + \xi^2 \mathbf{b}$ y esa expresión es única.

La primera de las afirmaciones es directa por cuanto hemos visto que si \mathbf{a} y \mathbf{b} son linealmente independientes y \mathbf{c} es coplanar con \mathbf{a} y \mathbf{b} , entonces, necesariamente \mathbf{a} , \mathbf{b} y \mathbf{c} son linealmente dependientes. Esto es:

$$\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b} + \gamma \mathbf{c} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{c} = -\frac{\alpha}{\gamma} \mathbf{a} - \frac{\beta}{\gamma} \mathbf{b} = \xi^1 \mathbf{a} + \xi^2 \mathbf{b}$$

La demostración de que la expansión es única viene de suponer que existen dos maneras distintas de representar al vector \mathbf{c}

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{c} = \xi^1 \mathbf{a} + \xi^2 \mathbf{b} \\ \mathbf{c} = \zeta^1 \mathbf{a} + \zeta^2 \mathbf{b} \end{array} \right\} \Rightarrow \mathbf{0} = (\xi^1 - \zeta^1) \mathbf{a} + (\xi^2 - \zeta^2) \mathbf{b} \Rightarrow \begin{cases} \xi^1 - \zeta^1 = 0 & \Rightarrow \xi^1 = \zeta^1 \\ \xi^2 - \zeta^2 = 0 & \Rightarrow \xi^2 = \zeta^2 \end{cases}$$

debido a que \mathbf{a} y \mathbf{b} son linealmente independiente.

La demostración para el caso tridimensional es equivalente. Es decir tres vectores linealmente independientes \mathbf{a} , \mathbf{b} y \mathbf{c} expanden, de manera unívoca, todos los vectores del espacio. Esta demostración queda para el lector.

Cuando un vector \mathbf{c} se pueda expresar en términos de dos vectores linealmente independientes, \mathbf{a} y \mathbf{b} diremos que \mathbf{a} y \mathbf{b} forman una base para todos los vectores coplanares a éstos. Igualmente para el caso tridimensional: tres vectores linealmente independientes \mathbf{a} , \mathbf{b} y \mathbf{c} conformarán una base para los vectores del espacio. Los números ξ^1 y ξ^2 para el caso bidimensional se denominan las componentes de \mathbf{c} a lo largo de \mathbf{a} y \mathbf{b} , respectivamente. Equivalentemente, ξ^1, ξ^2, ξ^3 serán las componentes de cualquier vector para el caso 3D a lo largo de \mathbf{a} , \mathbf{b} y \mathbf{c} , respectivamente. Esta nomenclatura será más evidente luego de la próxima sección.

1.3. Productos de vectores

1.3.1. Producto escalar

Denominaremos producto escalar de dos vectores \mathbf{a} y \mathbf{b} a un escalar cuyo valor será igual al producto de los módulos multiplicado por el coseno del ángulo que ellos forman

$$\zeta = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos(\theta)_{(\mathbf{a}, \mathbf{b})}$$

El significado geométrico del producto escalar es evidente, cuadrante I de la Figura 1.3. El producto escalar representa la proyección de \mathbf{a} sobre \mathbf{b} y equivalentemente la proyección de \mathbf{b} sobre \mathbf{a} .

De esta definición se derivan varias consecuencias las cuales por obvias no dejan de ser importantes:

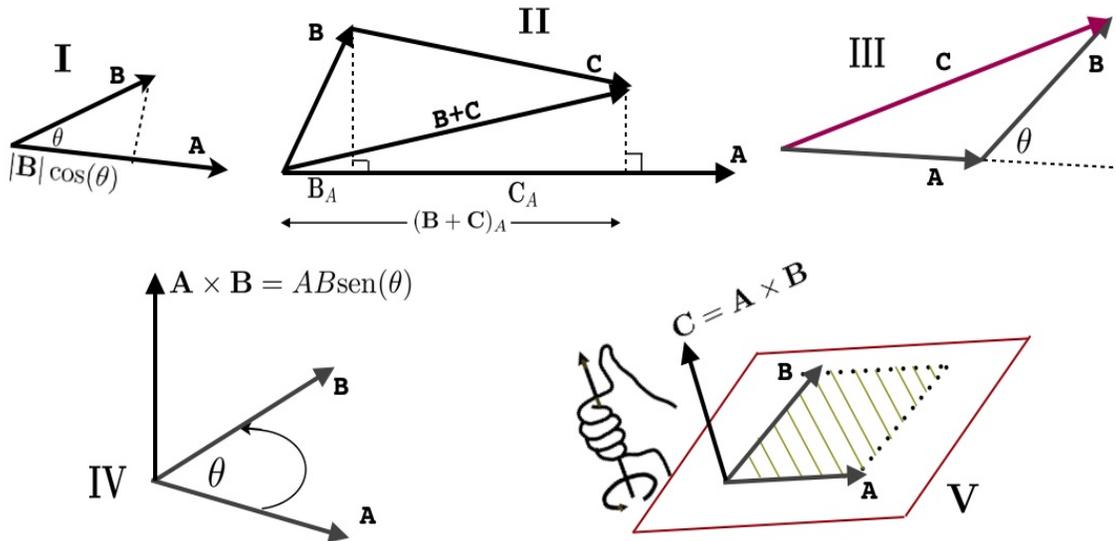


Figura 1.3: Productos de Vectores

- El producto escalar de un vector consigo mismo, siempre es positivo:
 $\zeta = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2 \geq 0$, y sólo será nulo si \mathbf{a} es el vector nulo. Esto es, $\zeta = 0 \Rightarrow \mathbf{a} = \mathbf{0}$. Con esto podemos concluir que $|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} = \sqrt{\zeta}$.
- El producto escalar es conmutativo:
 $\zeta = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$, ya que el ángulo entre los vectores es el mismo y la multiplicación entre escalares es conmutativa.
- El producto escalar es distributivo:
 Esto es, $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$. La demostración (gráfica) puede apreciarse en el cuadrante II de la Figura 1.3.
- La multiplicación por un escalar:
 $\bar{\zeta} = \alpha \zeta = |\alpha| (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = (\alpha \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot (\alpha \mathbf{b}) = |\alpha \mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos(\theta)_{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle} = |\mathbf{a}| |\alpha \mathbf{b}| \cos(\theta)_{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}$.
- Desigualdad de Cauchy-Schwarz.
 A partir de la definición de producto interno es inmediata la comprobación de la siguiente desigualdad:

$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 = (|\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos(\theta)_{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle})^2 \Rightarrow (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 \leq |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 \Leftrightarrow \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \leq |\mathbf{a}| |\mathbf{b}|$$

ya que $0 \leq \cos^2(\theta)_{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle} \leq 1$.

- Del producto escalar surge el Teorema del Coseno.
 Es inmediato calcular el producto escalar de un vector consigo mismo, para ello vamos a suponer que $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$, con lo cual

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{c} \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \Rightarrow |\mathbf{c}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 + 2 |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos(\theta)_{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}$$

que no es otra cosa que el teorema del coseno y está ilustrado en el cuadrante III de la Figura 1.3.

- Diremos que dos vectores no nulos son ortogonales (perpendiculares) si su producto escalar es nulo. Esta afirmación es inmediata

$$\mathbf{a} \perp \mathbf{b} \Rightarrow \theta_{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos(\theta)_{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle} = 0.$$

1.3.2. Producto vectorial

También hemos aprendido que existe otro producto entre vectores: *el producto vectorial*. A diferencia del producto escalar que genera un escalar, el producto vectorial tiene como resultado otro vector: $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ (realmente un pseudovector o vector axial en contraposición a los vectores polares, pero eso lo veremos más adelante en la sección 1.6.4), con las siguientes características:

- El módulo de \mathbf{c} , será $|\mathbf{c}| = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin(\theta)_{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}$. Es claro que el módulo de \mathbf{c} representa el área del paralelogramo cuyos lados están formados por \mathbf{a} y \mathbf{b} (ver el cuadrante V de la Figura 1.3).
- Tal y como muestran los cuadrantes IV y V de la Figura 1.3, \mathbf{c} tendrá como dirección la perpendicular al plano que forman \mathbf{a} y \mathbf{b} , y como sentido la regla del pulgar derecho, regla de la mano derecha, o de manera más elegante, será positiva cuando la multiplicación de $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ corresponda al sentido horario.

Podemos deducir algunas consecuencias de esta definición.

- *El producto vectorial es anticonmutativo.*
 $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$, y se sigue de la definición que expresa el cuadrante IV de la Figura 1.3.
- *El producto vectorial es distributivo respecto a la suma.*
 $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$. La demostración de esto lo dejaremos para más adelante.
- *La multiplicación por un escalar.*

$$|\mathbf{c}| = |\alpha| |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |(\alpha \mathbf{a}) \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a} \times (\alpha \mathbf{b})| = |\alpha \mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin(\theta)_{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle} = |\alpha| |\alpha \mathbf{b}| \sin(\theta)_{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}$$

- *Dos vectores serán colineales si su producto vectorial se anula.*
Como en el caso cuando se anulaba el producto escalar identificábamos a dos vectores ortogonales, cuando se anula el producto vectorial tendremos dos vectores paralelos. Es claro que esto se cumple de inmediato

$$\mathbf{a} \parallel \mathbf{b} \Rightarrow \theta_{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle} = 0 \Rightarrow |\mathbf{c}| = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin(\theta)_{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle} = 0$$

Si el módulo del vector es cero, obvio que es el vector nulo. Ahora bien, también de aquí deducimos que

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{c} \cdot \mathbf{a} = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a} = \mathbf{c} \cdot \mathbf{b} = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{b} = 0.$$

1.3.3. Producto triple o mixto

Analicemos ahora el número (pseudoescalar) que proviene de la multiplicación

$$V = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = |\mathbf{c}| |(\mathbf{a} \times \mathbf{b})| \cos(\theta)_{\langle \mathbf{c}, \mathbf{a} \times \mathbf{b} \rangle}$$

Este producto también cumple con algunas propiedades que enunciaremos ahora y demostraremos más tarde

- *El producto mixto representa el volumen del paralelepípedo cuyos lados son los vectores \mathbf{a} , \mathbf{b} y \mathbf{c} .*
 $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$ representa el área de la base y la altura está representada por la proyección del vector \mathbf{c} sobre la perpendicular al plano de la base que es, precisamente $|\mathbf{c}| \cos(\theta)_{\langle \mathbf{c}, \mathbf{a} \times \mathbf{b} \rangle}$.

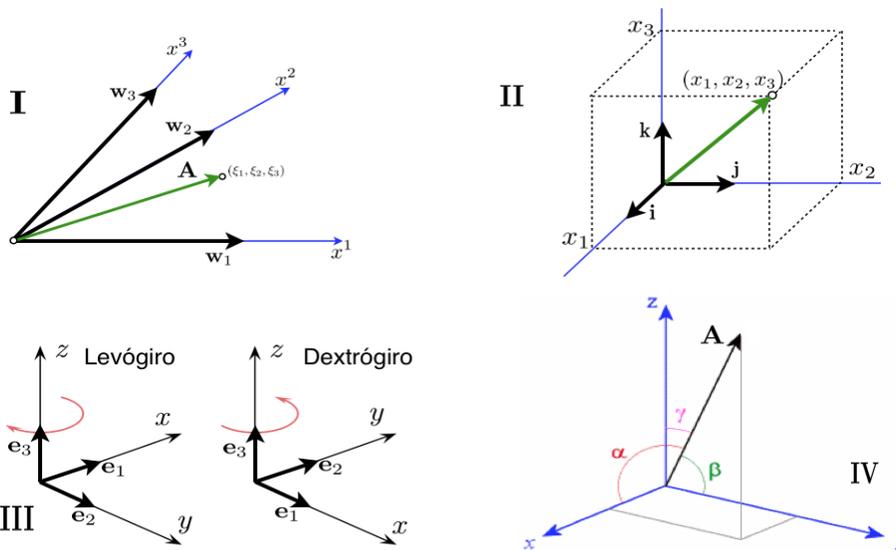


Figura 1.4: Vectores, bases y componentes

- El producto mixto es cíclico respecto a sus factores.

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a}$$

Esta afirmación se verá demostrada más adelante.

- El producto mixto se anula cuando se repite alguno de sus factores.

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a} = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{b} = (\mathbf{a} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{b} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = 0.$$

Claramente, si $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \perp \mathbf{a} \Rightarrow (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a} = 0$.

- Si los tres vectores \mathbf{a} , \mathbf{b} y \mathbf{c} son coplanares (linealmente dependientes) entonces:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = 0,$$

dicho de manera más elegante, útil e impactante: tres vectores que cumplen con:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} \neq 0,$$

forman una base para el espacio tridimensional. Esa base se denominará levógiro (contraria al giro de las manecillas del reloj) si el producto $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} < 0$ y dextrógiro (la convencional base de la mano derecha) si $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} > 0$.

1.3.4. Una división fallida

Uno esperaría que para cada una de las definiciones de productos vectoriales, existiera el vector cociente, es decir, que pudiéramos “despejar” uno de los multiplicados en términos del otro. La situación es que esta operación no está definida unívocamente y lo podemos intuir a partir de una de las definiciones de producto.

Supongamos que tenemos un producto escalar: $\zeta = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ con lo cual, si pudiéramos “despejar”, digamos $\mathbf{b} = \frac{\zeta}{\mathbf{a}}$ ¿Tendríamos entonces definido \mathbf{b} de una manera unívoca? La respuesta es NO, ya que $\zeta = \mathbf{a} \cdot \left(\frac{\zeta}{\mathbf{a}} + \mathbf{d} \right)$ donde $\mathbf{a} \perp \mathbf{d}$, por lo cual existen infinitos $\mathbf{b} = \frac{\zeta}{\mathbf{a}} + \mathbf{d}$ que cumplen $\zeta = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$.

1.4. Componentes, coordenadas y cosenos directores

La formulación de las leyes físicas debe hacerse en término de cantidades vectoriales (tensoriales). Esto independiza su formulación de un sistema particular de coordenadas, pero llegado el momento de calcular valores y utilizar estas leyes, es mucho más conveniente referirla a un sistema de coordenadas particularmente adaptado a la geometría del problema. En ese caso la ecuación vectorial se convertirá en tantas ecuaciones como componentes (referidas al sistema de coordenadas utilizado) tengan los vectores en ese sistema de coordenadas.

1.4.1. Bases, componentes y coordenadas

Tal y como mencionamos anteriormente, tres vectores **no coplanares** cualesquiera son linealmente independientes y constituyen una base para el espacio tridimensional. Denominaremos, de ahora en adelante a estos vectores base $\{\mathbf{w}_i\}$, y por ser linealmente independientes podremos expresar cualquier vector \mathbf{a} como una combinación lineal única, tal y como lo mostramos en el cuadrante I de la Figura 1.4.

Con los vectores base $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$ podemos construir un sistema (oblicuo en general) de coordenadas al colocarlos con un mismo origen, esto es

$$\mathbf{a} = \xi^1 \mathbf{w}_1 + \xi^2 \mathbf{w}_2 + \xi^3 \mathbf{w}_3$$

donde las cantidades $\{\xi^1, \xi^2, \xi^3\}$ son números (no son escalares) que representan las componentes del vector \mathbf{a} a lo largo de cada uno de los vectores base $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$. Nótese que por costumbre (la cual será evidente más adelante) etiquetamos estos números con superíndices y la letra que identifica el vector.

Más aún, cada punto P del espacio viene definido por un radiovector $\mathbf{r}(P) \equiv \overrightarrow{OP}$ que une el origen de coordenadas con el punto P y se le asocian tres números $\{x^1, x^2, x^3\}$, los cuales son las proyecciones a lo largo de cada uno de los ejes coordenados $\{\overline{0x^1}, \overline{0x^2}, \overline{0x^3}\}$. Los números $\{x^1, x^2, x^3\}$ se denominarán componentes de $\mathbf{r}(P)$ en el sistema de referencia $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$.

Existe una familia de sistemas de coordenadas en la cual sus vectores base son ortogonales (o mejor ortonormales), es decir los vectores base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ son perpendiculares entre si. Tal y como mostraremos más adelante, siempre se puede construir un sistema ortogonal $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ u ortonormal $\{\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3\}$ a partir de una base genérica de vectores linealmente independientes $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$. Cuando el sistema sea ortogonal sus componentes se denominarán rectangulares. Dependiendo del signo del triple producto mixto el sistema de coordenadas será dextrógiro $((\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2) \cdot \mathbf{e}_3 > 0)$ o levógiro $((\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2) \cdot \mathbf{e}_3 < 0)$, tal y como se muestra en el cuadrante III de la Figura 1.4.

Es costumbre ancestral, por relaciones de dominación de los derechos sobre los izquierdos (en latín e italiano los zurdos son siniestros) utilizar la convención dextrógira donde el producto: $(\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2) \cdot \mathbf{e}_3 > 0$, y en ese caso utilizamos el bien conocido conjunto de vectores unitarios $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ con los que ya hemos estado familiarizados

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k} \quad \text{y} \quad \mathbf{r}(P) = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}.$$

También es costumbre representar este sistema de coordenadas ortonormal como: $\mathbf{i} \equiv \mathbf{i}_1, \mathbf{j} \equiv \mathbf{i}_2$ y $\mathbf{k} \equiv \mathbf{i}_3$ para recordar que estamos en un sistema de coordenadas cartesianas y utilizaremos los superíndices 1, 2, 3

para indicar las componentes del vector.

$$\mathbf{a} = a^1 \mathbf{i}_1 + a^2 \mathbf{i}_2 + a^3 \mathbf{i}_3 \quad \text{y} \quad \mathbf{r}(P) = x^1 \mathbf{i}_1 + x^2 \mathbf{i}_2 + x^3 \mathbf{i}_3.$$

Obviamente el módulo del vector se podrá expresar con la utilización del Teorema de Pitágoras

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{(a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2} \quad \text{y} \quad |\mathbf{r}(P)| = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2}$$

y la multiplicación por un escalar será

$$\alpha \mathbf{a} = \alpha (a^1 \mathbf{i}_1 + a^2 \mathbf{i}_2 + a^3 \mathbf{i}_3) = (\alpha a^1) \mathbf{i}_1 + (\alpha a^2) \mathbf{i}_2 + (\alpha a^3) \mathbf{i}_3 \quad \Rightarrow \quad |\alpha \mathbf{a}| = \alpha \sqrt{(a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2}$$

Igualmente para un vector unitario

$$\hat{\mathbf{u}}_a = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \frac{a^1 \mathbf{i}_1 + a^2 \mathbf{i}_2 + a^3 \mathbf{i}_3}{\sqrt{(a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2}}$$

con lo cual todo vector

$$\mathbf{a} = |\mathbf{a}| \hat{\mathbf{u}}_a = \sqrt{(a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2} \hat{\mathbf{u}}_a.$$

1.4.2. Cosenos directores

Como se puede apreciar en el cuadrante IV de la Figura 1.4, podemos construir tres triángulos rectángulos con el radiovector $\mathbf{A}(P)$ como hipotenusa de cada uno de ellos. Los ángulos que forma el radiovector $\mathbf{A}(P)$ con cada uno de los ejes coordenados $\{x, y, z\}$ son $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ respectivamente, con lo cual

$$A_x = |\mathbf{A}| \cos(\alpha) \quad A_y = |\mathbf{A}| \cos(\beta) \quad \text{y} \quad A_z = |\mathbf{A}| \cos(\gamma) \quad \Rightarrow \quad \cos^2(\alpha) + \cos^2(\beta) + \cos^2(\gamma) = 1$$

pero además

$$\hat{\mathbf{u}}_A = \frac{\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|} = \cos(\alpha) \mathbf{i} + \cos(\beta) \mathbf{j} + \cos(\gamma) \mathbf{k}.$$

1.5. Álgebra vectorial y coordenadas

Es posible reescribir el álgebra vectorial mediante operaciones referidas a las coordenadas, como se muestra a continuación.

1.5.1. Suma y resta de vectores

La suma será representada por

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a^1 \mathbf{i}_1 + a^2 \mathbf{i}_2 + a^3 \mathbf{i}_3) + (b^1 \mathbf{i}_1 + b^2 \mathbf{i}_2 + b^3 \mathbf{i}_3) = (a^1 + b^1) \mathbf{i}_1 + (a^2 + b^2) \mathbf{i}_2 + (a^3 + b^3) \mathbf{i}_3$$

y obviamente, la resta

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = (a^1 \mathbf{i}_1 + a^2 \mathbf{i}_2 + a^3 \mathbf{i}_3) - (b^1 \mathbf{i}_1 + b^2 \mathbf{i}_2 + b^3 \mathbf{i}_3) = (a^1 - b^1) \mathbf{i}_1 + (a^2 - b^2) \mathbf{i}_2 + (a^3 - b^3) \mathbf{i}_3$$

con lo cual la distancia entre dos puntos P y M será

$$d(P, M) = |(\mathbf{r}(P) = \mathbf{a}) - (\mathbf{r}(M) = \mathbf{b})| = \sqrt{(x^1 - y^1)^2 + (x^2 - y^2)^2 + (x^3 - y^3)^2}.$$

1.5.2. Dependencia e independencia lineal

Ahora es fácil estudiar la dependencia o independencia lineal en coordenadas. Otra vez, tres vectores: $\mathbf{a} = a^1\mathbf{i}_1 + a^2\mathbf{i}_2 + a^3\mathbf{i}_3$, $\mathbf{b} = b^1\mathbf{i}_1 + b^2\mathbf{i}_2 + b^3\mathbf{i}_3$ y $\mathbf{c} = c^1\mathbf{i}_1 + c^2\mathbf{i}_2 + c^3\mathbf{i}_3$, serán *linealmente independientes* si se cumple que

$$\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b} + \gamma \mathbf{c} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \beta = \gamma = 0$$

Antes de proseguir en forma general, veamos algunos casos particulares

- La base canónica: $\mathbf{i}_1 = \mathbf{i} \equiv (1, 0, 0)$, $\mathbf{i}_2 = \mathbf{j} \equiv (0, 1, 0)$, $\mathbf{i}_3 = \mathbf{k} \equiv (0, 0, 1)$. Estos vectores son claramente linealmente independientes y por lo tanto constituyen una base.
- Los vectores: $\mathbf{e}_1 = \mathbf{i} \equiv (1, 0, 0)$, $\mathbf{e}_2 = \mathbf{i} + \mathbf{j} \equiv (1, 1, 0)$, $\mathbf{e}_3 = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k} \equiv (1, 1, 1)$, no son linealmente independientes de manera obvia. Por lo tanto, veamos lo siguiente:

$$\left. \begin{array}{l} \alpha \\ \alpha + \beta \\ \alpha + \beta + \gamma \end{array} \right\} = \left. \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{array} \right.$$

con lo cual demostramos que son linealmente independientes y por lo tanto constituyen una base para los vectores tridimensionales.

En general tendremos que

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \alpha (a^1\mathbf{i}_1 + a^2\mathbf{i}_2 + a^3\mathbf{i}_3) + \beta (b^1\mathbf{i}_1 + b^2\mathbf{i}_2 + b^3\mathbf{i}_3) + \gamma (c^1\mathbf{i}_1 + c^2\mathbf{i}_2 + c^3\mathbf{i}_3) \\ &= (\alpha a^1 + \beta b^1 + \gamma c^1)\mathbf{i}_1 + (\alpha a^2 + \beta b^2 + \gamma c^2)\mathbf{i}_2 + (\alpha a^3 + \beta b^3 + \gamma c^3)\mathbf{i}_3 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha a^1 + \beta b^1 + \gamma c^1 = 0 \\ \alpha a^2 + \beta b^2 + \gamma c^2 = 0 \\ \alpha a^3 + \beta b^3 + \gamma c^3 = 0 \end{array} \right. \end{aligned}$$

Esto no es otra cosa que un sistema de 3 ecuaciones lineales con 3 incógnitas $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ y la solución que estamos buscando $\alpha = \beta = \gamma = 0$ se cumplirá si

$$\left| \begin{array}{ccc} a^1 & b^1 & c^1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{array} \right| = a^1 (b^2 c^3 - b^3 c^2) + a^2 (b^3 c^1 - b^1 c^3) + a^3 (b^1 c^2 - b^2 c^1) \neq 0.$$

Ejercicios

1. Dados los vectores

$$\mathbf{A} = \mathbf{i}_1 + 2\mathbf{i}_2 + 3\mathbf{i}_3, \quad \mathbf{B} = 4\mathbf{i}_1 + 5\mathbf{i}_2 + 6\mathbf{i}_3, \quad \mathbf{C} = 3\mathbf{i}_1 + 2\mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_3, \quad \mathbf{D} = 6\mathbf{i}_1 + 5\mathbf{i}_2 + 4\mathbf{i}_3$$

- a) Encuentre

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C} + \mathbf{D} \quad \mathbf{A} + \mathbf{B} - \mathbf{C} - \mathbf{D} \quad \mathbf{A} - \mathbf{B} + \mathbf{C} - \mathbf{D} \quad -\mathbf{A} + \mathbf{B} - \mathbf{C} + \mathbf{D}$$

- b) El ángulo entre los vectores $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$ y los vectores base $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$.
- c) La magnitud de los vectores $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$.
- d) El ángulo entre \mathbf{A} y \mathbf{B} y entre \mathbf{C} y \mathbf{D} .
- e) La proyección de \mathbf{A} sobre \mathbf{B} .
- f) ¿Son los vectores $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$ coplanares?

1.5.3. Producto escalar

Ahora rephrasearemos, en término de una base de vectores ortogonales, lo expresado en la sección 1.3.1. Representaremos el producto escalar de dos vectores en una base cartesiana $\{\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3\}$, que es una base ortonormal, de la siguiente manera:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (a^1 \mathbf{i}_1 + a^2 \mathbf{i}_2 + a^3 \mathbf{i}_3) \cdot (b^1 \mathbf{i}_1 + b^2 \mathbf{i}_2 + b^3 \mathbf{i}_3) = a^1 b^1 + a^2 b^2 + a^3 b^3$$

ya que por ser ortogonales se tiene que:

$$\mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{i}_1 = \mathbf{i}_2 \cdot \mathbf{i}_2 = \mathbf{i}_3 \cdot \mathbf{i}_3 = 1, \quad \text{y} \quad \begin{cases} \mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{i}_2 = \mathbf{i}_2 \cdot \mathbf{i}_1 = 0 \\ \mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{i}_3 = \mathbf{i}_3 \cdot \mathbf{i}_1 = 0 \\ \mathbf{i}_2 \cdot \mathbf{i}_3 = \mathbf{i}_3 \cdot \mathbf{i}_2 = 0 \end{cases}$$

Las propiedades del producto escalar en coordenadas cartesianas se comprueban fácilmente

- *El producto interno de un vector consigo mismo, siempre es positivo.*

$$\zeta = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2 = (a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2 \geq 0$$

y

$$(a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad a^1 = a^2 = a^3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{a} = \mathbf{0}$$

Adicionalmente $|\mathbf{a}| = \sqrt{\zeta} = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} = \sqrt{(a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2}$

- *El producto escalar es conmutativo*

$$\zeta = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} = a^1 b^1 + a^2 b^2 + a^3 b^3 = b^1 a^1 + b^2 a^2 + b^3 a^3.$$

- *El producto escalar es distributivo:*

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = [a^1 \mathbf{i}_1 + a^2 \mathbf{i}_2 + a^3 \mathbf{i}_3] \cdot [(b^1 + c^1) \mathbf{i}_1 + (b^2 + c^2) \mathbf{i}_2 + (b^3 + c^3) \mathbf{i}_3],$$

por lo tanto:

$$\begin{aligned} a^1 (b^1 + c^1) + a^2 (b^2 + c^2) + a^3 (b^3 + c^3) &= \\ (a^1 b^1 + a^1 c^1) + (a^2 b^2 + a^2 c^2) + (a^3 b^3 + a^3 c^3) &= \\ (a^1 b^1 + a^2 b^2 + a^3 b^3) + (a^1 c^1 + a^2 c^2 + a^3 c^3) &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} \end{aligned}$$

- *La multiplicación por un escalar.*

$$|\alpha| (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = (\alpha \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot (\alpha \mathbf{b}) = (\alpha a^1) b^1 + (\alpha a^2) b^2 + (\alpha a^3) b^3 = a^1 (\alpha b^1) + a^2 (\alpha b^2) + a^3 (\alpha b^3)$$

- *Desigualdad de Cauchy Schwarz.*

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a^1 b^1 + a^2 b^2 + a^3 b^3 \leq \sqrt{(a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2} \sqrt{(b^1)^2 + (b^2)^2 + (b^3)^2} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}|$$

- *Diremos que dos vectores, no nulos son ortogonales (perpendiculares) si su producto escalar es nulo. Esta afirmación es inmediata*

$$\mathbf{a} \perp \mathbf{b} \quad \Rightarrow \quad \theta_{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle} = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos(\theta)_{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle} = 0,$$

por lo cual

$$a^1 b^1 + a^2 b^2 + a^3 b^3 = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos(\theta)_{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle} \Rightarrow \cos(\theta)_{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle} = \frac{a^1 b^1 + a^2 b^2 + a^3 b^3}{\sqrt{(a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2} \sqrt{(b^1)^2 + (b^2)^2 + (b^3)^2}}$$

de donde se deduce que para dos vectores perpendiculares

$$\mathbf{a} \perp \mathbf{b} \Rightarrow 0 = a^1 b^1 + a^2 b^2 + a^3 b^3.$$

- *Del producto escalar surge el Teorema del Coseno.* Es inmediato generalizar el producto escalar de un vector consigo mismo, para ello suponemos que $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$, con lo cual

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{c} \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \Rightarrow |\mathbf{c}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 + 2 |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos(\theta)_{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle},$$

que no es otra cosa que el teorema del coseno y está ilustrado en el cuadrante III de la Figura 1.3.

1.5.4. Producto vectorial

De igual manera, lo que aprendimos en la sección 1.3.2 ahora lo expresamos en términos de las componentes de los vectores en una base ortonormal de la forma

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a^2 b^3 - a^3 b^2) \mathbf{i}_1 + (a^3 b^1 - a^1 b^3) \mathbf{i}_2 + (a^1 b^2 - a^2 b^1) \mathbf{i}_3$$

lo anterior se puede organizar como el determinante de la matriz

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i}_1 & \mathbf{i}_2 & \mathbf{i}_3 \\ a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \end{vmatrix}$$

con lo cual

$$\begin{aligned} |\mathbf{c}| &= \sqrt{(a^2 b^3 - a^3 b^2)^2 + (a^3 b^1 - a^1 b^3)^2 + (a^1 b^2 - a^2 b^1)^2} \\ &= \sqrt{(a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2} \sqrt{(b^1)^2 + (b^2)^2 + (b^3)^2} \sin(\theta)_{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle} \end{aligned}$$

1.5.5. Triple producto mixto

Finalmente, analicemos el número (pseudoescalar) que proviene de la multiplicación

$$V = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = |\mathbf{c}| |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| \cos(\theta)_{\langle \mathbf{c}, \mathbf{a} \times \mathbf{b} \rangle} = \begin{vmatrix} c^1 & c^2 & c^3 \\ a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \end{vmatrix}.$$

Obviamente, este número representa del volumen del paralelepípedo cuyos lados quedan definidos por \mathbf{a} , \mathbf{b} y \mathbf{c} .

Ejercicios

1. Dados los vectores

$$\mathbf{A} = \mathbf{i}_1 + 2\mathbf{i}_2 + 3\mathbf{i}_3, \quad \mathbf{B} = 4\mathbf{i}_1 + 5\mathbf{i}_2 + 6\mathbf{i}_3, \quad \mathbf{C} = 3\mathbf{i}_1 + 2\mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_3, \quad \mathbf{D} = 6\mathbf{i}_1 + 5\mathbf{i}_2 + 4\mathbf{i}_3$$

- a) Encuentre $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} + \mathbf{D})$
 b) Los productos $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$, $\mathbf{B} \times \mathbf{C}$, $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$ y los ángulos que estos forman con \mathbf{D} .
 c) $\mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$.
2. Si $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ es una base ortonormal. Diga si los siguientes vectores forman una base

a)

$$\mathbf{e}_1 = 2\mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2 - 3\mathbf{i}_3, \quad \mathbf{e}_2 = \mathbf{i}_1 - 4\mathbf{i}_3, \quad \mathbf{e}_3 = 4\mathbf{i}_1 + 3\mathbf{i}_2 - \mathbf{i}_3$$

b)

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{i}_1 - 3\mathbf{i}_2 + 2\mathbf{i}_3, \quad \mathbf{e}_2 = 2\mathbf{i}_1 - 4\mathbf{i}_2 - \mathbf{i}_3, \quad \mathbf{e}_3 = 3\mathbf{i}_1 + 2\mathbf{i}_2 - \mathbf{i}_3$$

1.6. Álgebra vectorial con índices

Antes de comenzar con la presentación de este esquema de cálculo cabe aclarar algunas costumbres y convenciones con la notación de índices.

1.6.1. Convención de Einstein

1. Los índices repetidos (arriba y abajo) indicarán suma por los valores que tomen los índices. Las componentes de los vectores tendrán índices arriba y los vectores base abajo:

$$\mathbf{a} = a^1 \mathbf{e}_1 + a^2 \mathbf{e}_2 + a^3 \mathbf{e}_3 = \sum_{m=1}^3 a^m \mathbf{e}_m \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{a} = a^m \mathbf{e}_m = a^i \mathbf{e}_i.$$

2. Los índices repetidos son mudos (no importa la letra que lo etiquete) y representan suma. Así

$$K^j A_j = K^m A_m = K^1 A_1 + K^2 A_2 + K^3 A_3 = B.$$

En este punto del discurso, la posición de los índices (arriba y abajo) solo tiene sentido estético y solo así indican suma. Más adelante veremos que representan cantidades distintas.

3. Llamaremos contracción cuando sumamos respecto a un par de índices, vale decir:

$$\sum_i A_i^i = A_1^1 + A_2^2 + A_3^3 \quad \Rightarrow \quad A_i^i = A_1^1 + A_2^2 + A_3^3$$

Las cantidades con dos o más índices las llamaremos componentes de tensores, son arreglos bidimensionales (tridimensionales, tetradimensionales, según el número de índices) y serán considerados en detalle posteriormente. Por ahora, contentémonos con saber que son cantidades con dos índices. Es claro que la contracción de índices convierte un conjunto de números $(i \times j) \rightarrow 1$, en un sólo número.

4. Los índices libres (aquellos que no están sumados) indican el número de objetos disponibles y deben mantenerse. Por ejemplo:

$$K_i^k A_k = B_i \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} K_1^1 A_1 + K_1^2 A_2 + K_1^3 A_3 = B_1 \\ K_2^1 A_1 + K_2^2 A_2 + K_2^3 A_3 = B_2 \\ K_3^1 A_1 + K_3^2 A_2 + K_3^3 A_3 = B_3 \end{cases}$$

con lo cual $K_i^k A_k = B_i$ representan 3 ecuaciones. La operación $K_i^k A_{kj} = B_{ij}$ representan 9.

5. La delta de Kronecker¹ δ_i^k lleva un índice arriba y uno abajo. Representa $\delta_i^k = 1$ si $i = k$ y es nula en los otros casos. Con esto:

$$K_{ij}^k \delta_k^i = K_{1j}^1 \underbrace{\delta_1^1}_{=1} + K_{2j}^1 \overbrace{\delta_1^2}^{=0} + K_{3j}^1 \overbrace{\delta_1^3}^{=0} + K_{1j}^2 \overbrace{\delta_2^1}^{=0} + K_{2j}^2 \underbrace{\delta_2^2}_{=1} + K_{3j}^2 \overbrace{\delta_2^3}^{=0} + K_{1j}^3 \overbrace{\delta_3^1}^{=0} + K_{2j}^3 \overbrace{\delta_3^2}^{=0} + K_{3j}^3 \underbrace{\delta_3^3}_{=1}$$

es decir

$$K_{ij}^k \delta_k^i = K_{kj}^k = K_{ij}^i = K_{1j}^1 + K_{2j}^2 + K_{3j}^3.$$

6. Además de la delta de Kronecker introduciremos el símbolo de permutación de Levi-Civita² ε^{ijk} para el caso de tres dimensiones, vale decir $i, j, k = 1, 2, 3$

$$\varepsilon_{ijk} = \varepsilon^{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{cuando } \{(1, 2, 3); (3, 1, 2); (2, 3, 1)\} \text{ permutación cíclica} \\ -1 & \text{cuando } \{(1, 3, 2); (3, 2, 1); (2, 1, 3)\} \text{ permutación impar o anticíclica} \\ 0 & \text{cuando } i = j; \quad i = k \quad \wedge \quad j = k \end{cases}$$

y quiere decir que es distinto de cero cuando todos los índices son diferentes: 1 si la permutación de índices es cíclica (o par) y -1 si la permutación es anticíclica (o impar). Con ello, si queremos calcular por ejemplo: $c^i = \varepsilon^{ijk} a_j b_k$, entonces resulta:

$$\begin{aligned} c^1 &= \varepsilon^{111} a_1 b_1 + \varepsilon^{112} a_1 b_2 + \varepsilon^{113} a_1 b_3 + \varepsilon^{121} a_2 b_1 + \varepsilon^{122} a_2 b_2 + \varepsilon^{123} a_2 b_3 + \varepsilon^{131} a_3 b_1 + \varepsilon^{132} a_3 b_2 + \varepsilon^{133} a_3 b_3 \\ c^2 &= \varepsilon^{211} a_1 b_1 + \varepsilon^{212} a_1 b_2 + \varepsilon^{213} a_1 b_3 + \varepsilon^{221} a_2 b_1 + \varepsilon^{222} a_2 b_2 + \varepsilon^{223} a_2 b_3 + \varepsilon^{231} a_3 b_1 + \varepsilon^{232} a_3 b_2 + \varepsilon^{233} a_3 b_3 \\ c^3 &= \varepsilon^{311} a_1 b_1 + \varepsilon^{312} a_1 b_2 + \varepsilon^{313} a_1 b_3 + \varepsilon^{321} a_2 b_1 + \varepsilon^{322} a_2 b_2 + \varepsilon^{323} a_2 b_3 + \varepsilon^{331} a_3 b_1 + \varepsilon^{332} a_3 b_2 + \varepsilon^{333} a_3 b_3 \end{aligned}$$

con lo cual

$$c^i = \varepsilon^{ijk} a_j b_k \Rightarrow \begin{cases} c^1 = \varepsilon^{123} a_2 b_3 + \varepsilon^{132} a_3 b_2 = a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ c^2 = \varepsilon^{231} a_3 b_1 + \varepsilon^{213} a_1 b_3 = a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ c^3 = \varepsilon^{312} a_1 b_2 + \varepsilon^{321} a_2 b_1 = a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{cases}$$

7. A continuación enumeramos algunas propiedades de la delta de Kronecker y del símbolo de permutación de Levi-Civita, dejamos al lector su demostración. Ellas son:

$$\begin{aligned} \delta_j^j &= 3, \\ \varepsilon_{jkm} \varepsilon^{ilm} &= \delta_j^i \delta_k^l - \delta_k^i \delta_j^l = \delta_j^i \delta_k^l - \delta_j^l \delta_k^i, \\ \varepsilon_{jmn} \varepsilon^{imn} &= 2\delta_j^i, \\ \varepsilon_{ijk} \varepsilon^{ijk} &= 6. \end{aligned}$$

1.6.2. Los vectores y los índices

Sumas de vectores

La suma de vectores será expresada de la siguiente manera

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = a^i \mathbf{e}_i + b^i \mathbf{e}_i = (a^i + b^i) \mathbf{e}_i = c^i \mathbf{e}_i \quad \Rightarrow \quad c^i = a^i + b^i \quad \text{con } i = 1, 2, 3$$

¹LEOPOLD KRONECKER (7 diciembre 1823 Legnica, Polonia, 29 diciembre 1891, Berlin, Alemania) Matemático polaco con importantes contribuciones en teoría de números, funciones elípticas y álgebra, así como la interrelación entre estas disciplinas.

²TULLIO LEVI-CIVITA (1873 Padova, Veneto, 1941 Roma, Italia) Geómetra italiano y uno de los desarrolladores del Cálculo Tensorial que más tarde sería utilizado por Einstein y Weyl como el lenguaje de la Relatividad General.

Producto escalar

A partir de ahora y de forma equivalente, expresaremos el producto escalar en término de los índices. De forma y manera que

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos(\theta)_{\mathbf{ab}} = a^i b_i \quad \text{con } i = 1, 2, 3$$

Producto vectorial

En términos de índices, la componente i del producto vectorial se puede expresar como

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})^i = \varepsilon^{ijk} a_j b_k \quad \text{con } i, j, k = 1, 2, 3$$

todas las particularidades de producto vectorial ahora descansan en las propiedades del símbolo de Levy Civita.

Triple producto mixto

Analicemos ahora el número (pseudoescalar) que proviene de la multiplicación

$$\mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = |\mathbf{c}| |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| \cos(\theta)_{(\mathbf{c}, \mathbf{a} \times \mathbf{b})} = c^i \varepsilon_{ijk} a^j b^k = \varepsilon_{ijk} c^i a^j b^k = \begin{vmatrix} c^1 & c^2 & c^3 \\ a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \end{vmatrix}$$

1.6.3. Un par de cálculos ilustrativos

Mostremos dos casos de identidades vectoriales que pueden ser demostradas mediante la utilización de índices.

1. $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{c} \cdot \mathbf{a}) \mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{c}$

El resultado será un vector, por lo tanto

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}))^i &= \varepsilon^{ijk} a_j (\mathbf{b} \times \mathbf{c})_k \\ &= \varepsilon^{ijk} a_j \varepsilon_{kmn} b^m c^n = \varepsilon^{ijk} \varepsilon_{kmn} a_j b^m c^n = \varepsilon^{ijk} \varepsilon_{mnk} a_j b^m c^n \\ &= (\delta_m^i \delta_n^j - \delta_m^j \delta_n^i) a_j b^m c^n = \delta_m^i \delta_n^j a_j b^m c^n - \delta_m^j \delta_n^i a_j b^m c^n \\ &= \delta_m^i b^m \delta_n^j a_j c^n - \delta_n^i c^n \delta_m^j a_j b^m = \underbrace{b^i a_n c^n}_{(\mathbf{c} \cdot \mathbf{a})} - \underbrace{c^i a_j b^j}_{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})} \end{aligned}$$

$$(\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}))^i = b^i (\mathbf{c} \cdot \mathbf{a}) - c^i (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) .$$

2. $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) (\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d}) (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$

El lado derecho es un escalar, por lo tanto

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) &= (\mathbf{a} \times \mathbf{b})^l (\mathbf{c} \times \mathbf{d})_l \\
 &= \varepsilon^{ljk} a_j b_k \varepsilon_{lmn} c^m d^n = \varepsilon^{ljk} \varepsilon_{lmn} a_j b_k c^m d^n \\
 &= \varepsilon^{jkl} \varepsilon_{mnl} a_j b_k c^m d^n = (\delta_m^j \delta_n^k - \delta_m^k \delta_n^j) a_j b_k c^m d^n \\
 &= \delta_m^j \delta_n^k a_j b_k c^m d^n - \delta_m^k \delta_n^j a_j b_k c^m d^n \\
 &= \underbrace{\delta_m^j a_j c^m}_{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})} \underbrace{\delta_n^k b_k d^n}_{(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d})} - \underbrace{\delta_m^k b_k c^m}_{(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})} \underbrace{\delta_n^j a_j d^n}_{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})} \\
 &= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) (\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d}) .
 \end{aligned}$$

1.6.4. Escalares, pseudoescalares, vectores y pseudovectores

La diferencia entre vectores polares y axiales proviene del siguiente comportamiento bajo transformaciones de coordenadas y bases. Un vector polar (normal, común y corriente) queda invariante bajo la siguiente transformación (reflexión)

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{e}_i \rightarrow -\mathbf{e}_i \\ a^i \rightarrow -a^i \end{array} \right\} \Rightarrow \mathbf{a} = a^i \mathbf{e}_i \rightarrow (-a^i) (-\mathbf{e}_i) = a^i \mathbf{e}_i = \mathbf{a} .$$

Mientras que un pseudovector o vector axial cambia de signo cuando las componentes de los vectores y sus vectores base que lo generan también lo hacen:

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{e}_i \rightarrow -\mathbf{e}_i \\ a^i \rightarrow -a^i \\ b^i \rightarrow -b^i \end{array} \right\} \Rightarrow \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} \rightarrow [\varepsilon^{ijk} (-a_j) (-b_k)] (-\mathbf{e}_i) = -c^i \mathbf{e}_i = -\mathbf{c}$$

es decir

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a^2 b^3 - a^3 b^2) \mathbf{e}_1 + (a^3 b^1 - a^1 b^3) \mathbf{e}_2 + (a^1 b^2 - a_2 b^1) \mathbf{e}_3 ,$$

luego de la reflexión:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= [(-a^2) (-b^3) - (-a^3) (-b^2)] (-\mathbf{e}_1) + [(-a^3) (-b^1) - (-a^1) (-b^3)] (-\mathbf{e}_2) \\
 &\quad + [(-a^1) (-b^2) - (-a^2) (-b^1)] (-\mathbf{e}_3) \\
 &= - [(a^2 b^3 - a^3 b^2) \mathbf{e}_1 + (a^3 b^1 - a^1 b^3) \mathbf{e}_2 + (a^1 b^2 - a^2 b^1) \mathbf{e}_3] = -(\mathbf{a} \times \mathbf{b})
 \end{aligned}$$

Existen varias e importantes cantidades físicas que vienen representadas por pseudovectores, entre ellas mencionamos:

| | |
|---------------------------------|--|
| Velocidad Angular: | $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ |
| Cantidad de Movimiento Angular: | $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ |
| Torque: | $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ |
| Campo de Inducción Magnética: | $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E}$ |

Adicionalmente el volumen, $V = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$, como era de esperarse, no es invariante bajo el cambio del espacio

$$\left. \begin{array}{l} c^i \rightarrow -c^i \\ a^i \rightarrow -a^i \\ b^i \rightarrow -b^i \end{array} \right\} \Rightarrow V = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = c_i \varepsilon^{ijk} a_j b_k \rightarrow (-c_i) [\varepsilon^{ijk} (-a_j) (-b_k)] = -V ,$$

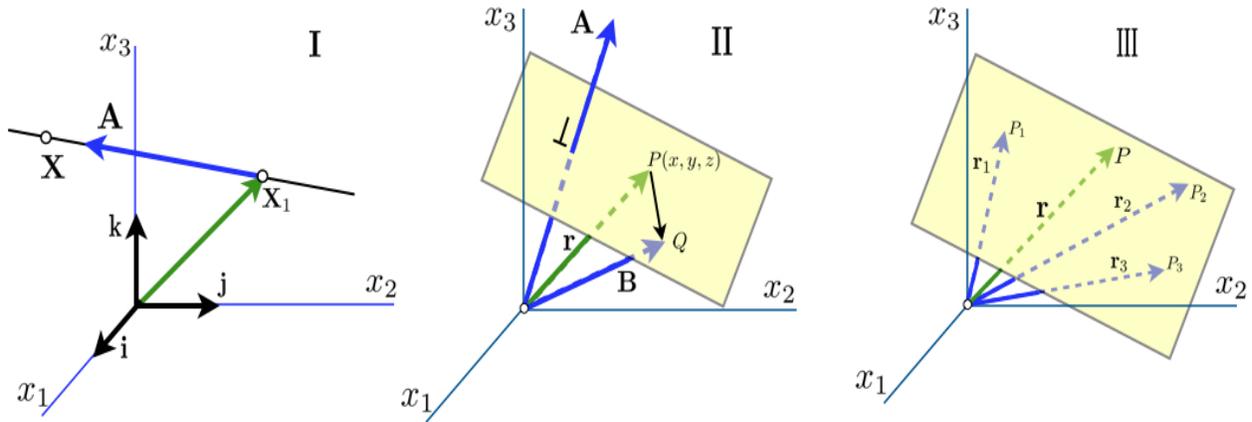


Figura 1.5: Geometría analítica y vectores cartesianos

el volumen es un pseudoescalar.

Mientras que los escalares si son invariantes bajo esta transformación

$$\left. \begin{array}{l} a^i \rightarrow -a^i \\ b^i \rightarrow -b^i \end{array} \right\} \Rightarrow \zeta = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a^i b_i \rightarrow (-a^i)(-b_i) = \zeta.$$

En general también tendremos multiplicación entre algunos de estos objetos, con lo cual construiremos otros objetos. Dejamos al lector demostrar la siguiente tabla de relaciones

| | | | | |
|--------------|---|--------------|---|---------------|
| vector | · | vector | = | escalar |
| vector | · | pseudovector | = | pseudoescalar |
| pseudovector | · | pseudovector | = | escalar |
| vector | × | vector | = | pseudovector |
| vector | × | pseudovector | = | vector |
| pseudovector | × | pseudovector | = | pseudovector |

1.7. Aplicaciones del álgebra vectorial

Uno de los terrenos más exitosos de las aplicaciones del álgebra vectorial es la geometría analítica. Esto se realiza en base a la definición que hicieramos de radio vector, en la cual a cada punto, P , del espacio le asociábamos un radiovector posición tal y como lo mostramos en el cuadrante I de la Figura 1.4 .

$$P \longleftrightarrow (x, y, z) \equiv (x^1, x^2, x^3) \Rightarrow \mathbf{r}(P) = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k} = x^1 \mathbf{i}_1 + x^2 \mathbf{i}_2 + x^3 \mathbf{i}_3 = x^i \mathbf{i}_i$$

A partir de esta definición todas las propiedades geométricas del espacio las podemos construir con vectores.

1.7.1. Rectas y vectores

La ecuación de la recta en término de vectores la definiremos fijando uno de sus puntos, digamos:

$$\mathbf{r}(P_1) \equiv \mathbf{X}(P_1) = \mathbf{X}_1 = x_1 \mathbf{i} + y_1 \mathbf{j} + z_1 \mathbf{k} = x_{(1)}^1 \mathbf{i}_1 + x_{(1)}^2 \mathbf{i}_2 + x_{(1)}^3 \mathbf{i}_3 \longleftrightarrow (x_1, y_1, z_1),$$

y un vector que indique su dirección, digamos $\mathbf{A} = A_1 \mathbf{i} + A_2 \mathbf{j} + A_3 \mathbf{k}$ (ver cuadrante I de la Figura 1.5) con lo cual la ecuación de una recta en lenguaje vectorial será:

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_1 + \lambda \mathbf{A} \Rightarrow x_1 \mathbf{i} + y_1 \mathbf{j} + z_1 \mathbf{k} + \lambda (A_1 \mathbf{i} + A_2 \mathbf{j} + A_3 \mathbf{k}) \Rightarrow \begin{cases} x = x_1 + \lambda A_1 \\ y = y_1 + \lambda A_2 \\ z = z_1 + \lambda A_3 \end{cases}$$

donde $\mathbf{X} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}$ es el conjunto de puntos genéricos que cumple con la ecuación de la recta en 3D. Si utilizamos la notación de índices, las ecuaciones anteriores son más evidentes:

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_1 + \lambda \mathbf{A} \Rightarrow x^i \mathbf{i}_i = x_{(1)}^i \mathbf{i}_i + \lambda A^i \mathbf{i}_i \Rightarrow x^i = x_{(1)}^i + \lambda A^i \quad \text{para } i = 1, 2, 3.$$

Nótese que efectivamente se cumplen tres ecuaciones escalares y cada una de ellas tiene la forma de una recta. Además, tal y como se muestra la Figura 1.5 el punto genérico (x, y, z) lo describe (sobre la recta) la variación del módulo de \mathbf{A} mediante la constante de proporcionalidad λ . Si se requiere describir una recta que pase por dos puntos: (x_1, y_1, z_1) y (x_2, y_2, z_2) entonces una vez seleccionado uno de los puntos (digamos (x_1, y_1, z_1)) seleccionamos el vector $\mathbf{A} = \mathbf{r}(P_2) - \mathbf{r}(P_1)$ como la resta de los dos radiovectores a los puntos P_2 y P_1 . Esto es

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_1 + \lambda (\mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_1) \Rightarrow \mathbf{X} = \frac{\mathbf{X}_1 + \delta \mathbf{X}_2}{1 - \delta}, \quad \text{con } \delta = \frac{\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}}{\mathbf{X}_2 - \mathbf{X}}.$$

Aquí la división entre vectores δ tiene sentido porque no es una división entre vectores genéricos es una división entre vectores que tienen la misma dirección. Nótese además que, lo mismo ocurre cuando “despejamos” λ de la ecuación de la recta

$$\lambda = \frac{\mathbf{X} - \mathbf{X}_1}{\mathbf{A}} \Rightarrow x^i = x_{(1)}^i + \lambda A^i \Rightarrow \lambda = \frac{x^i - x_{(1)}^i}{A^i} = \frac{x - x_1}{A_x} = \frac{y - y_1}{A_y} = \frac{z - z_1}{A_z}$$

y equivalentemente ocurre cuando “despejamos” λ de la ecuación de la recta que pasa por dos puntos.

$$\lambda = \frac{\mathbf{X} - \mathbf{X}_1}{\mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_1} \Rightarrow x^i = x_{(1)}^i + \lambda (x_{(2)}^i - x_{(1)}^i) \Rightarrow \lambda = \frac{x^i - x_{(1)}^i}{x_{(2)}^i - x_{(1)}^i} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

1.7.2. Planos y vectores

Ocurre exactamente lo mismo cuando construimos la ecuación vectorial para un plano. En general una superficie la define su vector normal (perpendicular). En el caso de una superficie plana (un plano) tendrá una única normal que lo define, por lo tanto, un plano vendrá definido por su vector perpendicular en un punto, digamos $P_1 : (x_1, y_1, z_1)$. La ecuación vectorial del plano vendrá definida por todos los vectores \overrightarrow{PQ} tales que sean perpendiculares a un determinado vector \mathbf{A} (ver cuadrante II de la Figura 1.5). Donde el punto P es un punto genérico (x, y, z) que define un radiovector. La ecuación vectorial del plano será simplemente

$$\mathbf{A} \cdot \left[\mathbf{r}(P) - \underbrace{\mathbf{r}(P_1)}_{\mathbf{B}} \right] = 0 \Leftrightarrow \mathbf{A} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{A} \cdot \mathbf{r} = \underbrace{\mathbf{A} \cdot \mathbf{r}_1}_b$$

Esto es, se tiene que cumplir la condición

$$(A_1 \mathbf{i} + A_2 \mathbf{j} + A_3 \mathbf{k}) \cdot [(x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}) - (x_1 \mathbf{i} + y_1 \mathbf{j} + z_1 \mathbf{k})] = 0$$

$$(A_1 \mathbf{i} + A_2 \mathbf{j} + A_3 \mathbf{k}) \cdot [(x - x_1) \mathbf{i} + (y - y_1) \mathbf{j} + (z - z_1) \mathbf{k}] = 0$$

$$A_1(x - x_1) + A_2(y - y_1) + A_3(z - z_1) = 0$$

con lo cual la ecuación del plano queda como siempre la hemos conocido

$$A_1x + A_2y + A_3z - A_1x_1 - A_2y_1 - A_3z_1 = 0 \Rightarrow A_1x + A_2y + A_3z = b = A_1x_1 + A_2y_1 + A_3z_1$$

es decir, de manera más compacta

$$A^i x_i - A_j x_1^j = 0 \Rightarrow A_k x^k = b = A_l x_1^l$$

Es claro que $\mathbf{A} \cdot \mathbf{r}_1 = b$ es la proyección del radiovector $\mathbf{r}(P_1)$ sobre la perpendicular que define al plano. Por lo tanto será la distancia entre el plano y el origen de coordenadas. Si $b = 0$ el plano pasa por el origen de coordenadas.

Consideremos ahora el cuadrante III de la Figura 1.5. Allí están especificados tres puntos en el espacio caracterizados por sus correspondientes radiovectores posición: $\mathbf{r}(P_1) = \mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}(P_2) = \mathbf{r}_2$ y $\mathbf{r}(P_3) = \mathbf{r}_3$. Estos tres puntos serán coplanares si

$$(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \cdot [(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3) \times (\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1)] = 0 \Leftrightarrow \varepsilon_{mnl} (x_1^m - x_2^m)(x_2^n - x_3^n)(x_3^l - x_1^l) = 0$$

y la ecuación del plano vendrá dada por

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \cdot [(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \times (\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1)] = 0.$$

Ejercicios

1. Verifique las siguientes identidades

a)

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) + \mathbf{B} \times (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) + \mathbf{C} \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = 0$$

b)

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = \begin{vmatrix} \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} & \mathbf{A} \cdot \mathbf{D} \\ \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} & \mathbf{B} \cdot \mathbf{D} \end{vmatrix}$$

c)

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = \mathbf{B}[\mathbf{A} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D})] - \mathbf{A}[\mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D})]$$

d)

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) + (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{D}) + (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{D}) = 0$$

2. Dada la siguiente base

$$\mathbf{e}_1 = -4\mathbf{i}_1 + 2\mathbf{i}_2, \quad \mathbf{e}_2 = 3\mathbf{i}_1 + 3\mathbf{i}_2, \quad \mathbf{e}_3 = 2\mathbf{i}_3$$

Encuentre las componentes covariantes y contravariantes de un vector que va del origen al punto $P = (1, 1, 1)$.

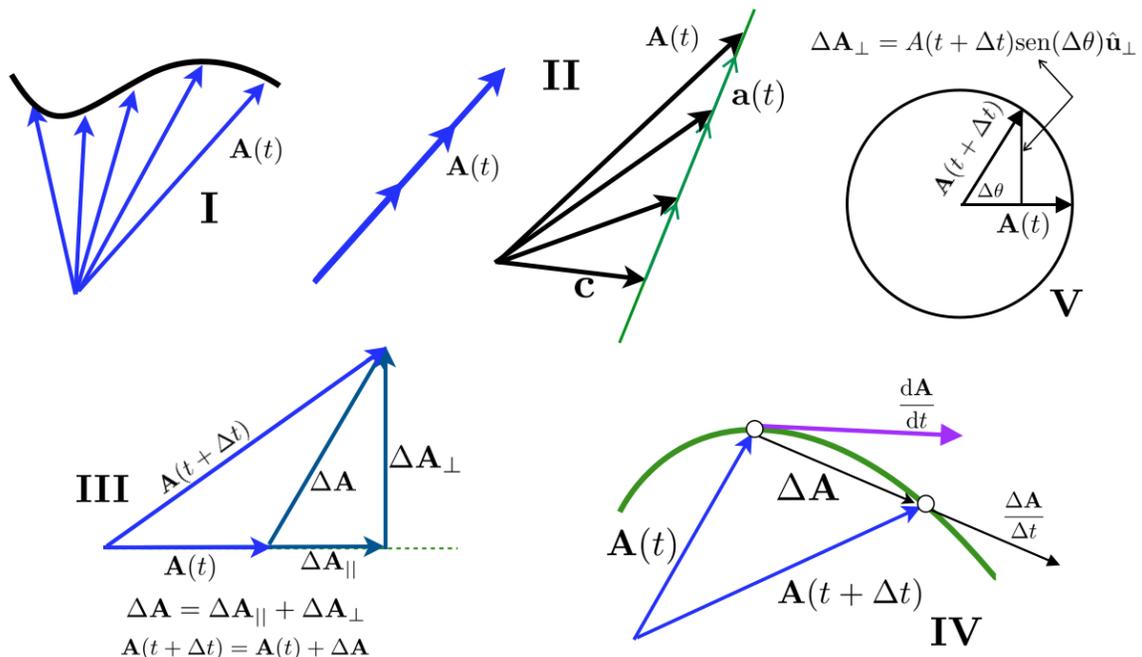


Figura 1.6: Vectores variables

1.8. Un comienzo a la derivación e integración de vectores

1.8.1. Vectores variables

Los vectores podrán ser constantes o variables. Ahora bien, esta característica se verificará tanto en las componentes como en la base. Esto quiere decir que cuando un vector es variable podrán variar su módulo, su dirección, su sentido, o todo junto o por separado. Obviamente esta variabilidad del vector dependerá de la base en la cual se exprese, por lo cual un vector podrá tener una componente constante en una base y no constante en otra, vale decir

$$\mathbf{A}(t) = A^k(t) \mathbf{e}_k(t) = A^{k'} \mathbf{e}_{k'}(t).$$

Nótese que hemos utilizado una base $\{\mathbf{e}_k(t)\}$ de vectores variables a diferencia de la tradicional base de vectores cartesianos, los cuales **son constantes** en módulo, dirección y sentido (ver los cuadrantes I y II de la Figura 1.6). Más aún, tal y como se muestra en cuadrante II de la Figura 1.6, todo vector variable podrá ser expresado como la suma de uno variable, $\mathbf{a}(t)$, mas otro constante \mathbf{c}

$$\mathbf{A}(t) = \mathbf{a}(t) + \mathbf{c}.$$

1.8.2. Derivación

De esta manera, cuando uno piensa en un vector variable $\mathbf{A}(t)$ uno rápidamente intenta establecer un cociente incremental:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{A}(t + \Delta t) - \mathbf{A}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{A}(t)}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{A}(t)}{dt}$$

el cuadrante IV de la Figura 1.6 ilustra gráficamente este cociente incremental.

Como siempre, las propiedades de esta operación derivación serán

$$\frac{d}{dt} [\mathbf{A}(t) + \mathbf{B}(t)] = \frac{d}{dt} \mathbf{A}(t) + \frac{d}{dt} \mathbf{B}(t), \quad (1.1)$$

$$\frac{d}{dt} [\alpha(t) \mathbf{A}(t)] = \left[\frac{d}{dt} \alpha(t) \right] \mathbf{A} + \alpha(t) \left[\frac{d}{dt} \mathbf{A}(t) \right], \quad (1.2)$$

$$\frac{d}{dt} [\mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{B}(t)] = \left[\frac{d}{dt} \mathbf{A}(t) \right] \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A}(t) \cdot \left[\frac{d}{dt} \mathbf{B}(t) \right], \quad (1.3)$$

$$\frac{d}{dt} [\mathbf{A}(t) \times \mathbf{B}(t)] = \left[\frac{d}{dt} \mathbf{A}(t) \right] \times \mathbf{B} + \mathbf{A}(t) \times \left[\frac{d}{dt} \mathbf{B}(t) \right]. \quad (1.4)$$

Ahora bien, esto implica que

$$\mathbf{A}(t) = A^k(t) \mathbf{e}_k(t) \Rightarrow \frac{d\mathbf{A}(t)}{dt} = \frac{d[A^k(t) \mathbf{e}_k(t)]}{dt} = \frac{dA^k(t)}{dt} \mathbf{e}_k(t) + A^k(t) \frac{d\mathbf{e}_k(t)}{dt}$$

con lo cual hay que tener cuidado al derivar vectores y cerciorarse de la dependencia funcional de la base y componentes. Habrá sistemas de coordenadas (bases de vectores) que serán constantes y otros en los cuales sus vectores bases cambiarán en su dirección. El primer término de la última ecuación representa la variación del módulo, y el segundo muestra la contribución de los cambios en dirección del vector. Más aún, mostraremos apoyándonos en la ilustración de el cuadrante III de la Figura 1.6 que, independientemente del sistema de coordenada, el cambio en el módulo apunta en la dirección del vector, mientras que las contribuciones en dirección apuntan en la dirección perpendicular al vector. Esto es:

$$\frac{d\mathbf{A}(t)}{dt} = \frac{d|\mathbf{A}(t)|}{dt} \hat{\mathbf{u}}_{\parallel} + |\mathbf{A}(t)| \hat{\mathbf{u}}_{\perp}, \quad \text{con } \hat{\mathbf{u}}_{\parallel} \cdot \hat{\mathbf{u}}_{\perp} = 0.$$

Es fácil convencernos de la forma del primer término. Siempre podemos representar un vector como su módulo y un vector unitario en la dirección apropiada. Esto es

$$\mathbf{A}(t) = |\mathbf{A}(t)| \hat{\mathbf{u}}(t) \Rightarrow \frac{d\mathbf{A}(t)}{dt} = \frac{d[|\mathbf{A}(t)| \hat{\mathbf{u}}(t)]}{dt} = \frac{d|\mathbf{A}(t)|}{dt} \hat{\mathbf{u}}(t) + |\mathbf{A}(t)| \frac{d\hat{\mathbf{u}}(t)}{dt},$$

adicionalmente: $|\mathbf{A}(t)|^2 = \mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{A}(t)$, por lo tanto

$$\frac{d[|\mathbf{A}(t)|^2]}{dt} \equiv \frac{d[\mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{A}(t)]}{dt} = 2|\mathbf{A}(t)| \frac{d|\mathbf{A}(t)|}{dt} \equiv 2\mathbf{A}(t) \cdot \frac{d\mathbf{A}(t)}{dt},$$

con lo cual, al despejar de esta última ecuación

$$\frac{d|\mathbf{A}(t)|}{dt} \equiv \underbrace{\frac{\mathbf{A}(t)}{|\mathbf{A}(t)|}}_{\hat{\mathbf{u}}(t)} \cdot \frac{d\mathbf{A}(t)}{dt} = \hat{\mathbf{u}}(t) \cdot \frac{d\mathbf{A}(t)}{dt},$$

para que finalmente

$$\hat{\mathbf{u}}(t) \cdot \frac{d\mathbf{A}(t)}{dt} = \hat{\mathbf{u}}(t) \cdot \left[\frac{d|\mathbf{A}(t)|}{dt} \hat{\mathbf{u}}(t) + |\mathbf{A}(t)| \frac{d\hat{\mathbf{u}}(t)}{dt} \right] \Rightarrow \begin{cases} \hat{\mathbf{u}}(t) \cdot \frac{d\mathbf{A}(t)}{dt} = \frac{d|\mathbf{A}(t)|}{dt} \\ \hat{\mathbf{u}}(t) \cdot \frac{d\hat{\mathbf{u}}(t)}{dt} = 0 \end{cases}$$

Es decir que el cambio en el módulo de un vector se manifiesta en la dirección del mismo vector, tal y como era intuitivo suponer. Adicionalmente, vemos que el vector siempre será perpendicular a su derivada. Gráficamente podemos apreciarlo en el cuadrante IV de la Figura 1.6, pero también surge analíticamente si derivamos el vector unitario en la dirección de $\mathbf{A}(t)$

$$\frac{d[\hat{\mathbf{u}}(t) \cdot \hat{\mathbf{u}}(t)]}{dt} \equiv \frac{d(|\hat{\mathbf{u}}(t)|^2)}{dt} = \frac{d(1)}{dt} \equiv 0 = \hat{\mathbf{u}}(t) \cdot \frac{d\hat{\mathbf{u}}(t)}{dt} \Rightarrow \hat{\mathbf{u}}(t) \perp \frac{d\hat{\mathbf{u}}(t)}{dt},$$

es decir

$$\frac{d\mathbf{A}(t)}{dt} = \frac{d[|\mathbf{A}(t)|\hat{\mathbf{u}}(t)]}{dt} = \frac{d|\mathbf{A}(t)|}{dt}\hat{\mathbf{u}}(t) + |\mathbf{A}(t)|\frac{d\hat{\mathbf{u}}(t)}{dt} = \frac{d|\mathbf{A}(t)|}{dt}\hat{\mathbf{u}}_{\parallel} + |\mathbf{A}(t)|\hat{\mathbf{u}}_{\perp}.$$

Supongamos que ahora definimos un vector

$$\Delta\theta = \Delta\theta \hat{\mathbf{v}} \quad \text{con} \quad \left\{ \begin{array}{l} \hat{\mathbf{v}} \perp \hat{\mathbf{u}}_{\parallel} \\ \hat{\mathbf{v}} \perp \hat{\mathbf{u}}_{\perp} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \hat{\mathbf{v}} \times \hat{\mathbf{u}}_{\parallel} = \hat{\mathbf{u}}_{\perp} \\ \hat{\mathbf{u}}_{\perp} \times \hat{\mathbf{v}} = \hat{\mathbf{u}}_{\parallel} \\ \hat{\mathbf{u}}_{\parallel} \times \hat{\mathbf{u}}_{\perp} = \hat{\mathbf{v}} \end{array} \right\}$$

donde $\Delta\theta$ es el ángulo de rotación del vector $\mathbf{A}(t)$ (ver cuadrante V de la Figura 1.6). Claramente

$$\Delta\mathbf{A}_{\perp} = [A(t + \Delta t) \text{sen}(\Delta\theta)] \hat{\mathbf{u}}_{\perp} \approx [A(t + \Delta t) \Delta\theta] \hat{\mathbf{u}}_{\perp} \Rightarrow \Delta\mathbf{A}_{\perp} = \Delta\theta \times \mathbf{A}(t),$$

entonces

$$\frac{\Delta\mathbf{A}_{\perp}}{\Delta t} \equiv \left[\frac{\Delta\mathbf{A}}{\Delta t} \cdot \mathbf{A}_{\perp} \right] \mathbf{A}_{\perp} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \times \mathbf{A}(t) \Rightarrow \left[\frac{d\mathbf{A}(t)}{dt} \cdot \hat{\mathbf{u}}_{\perp} \right] \hat{\mathbf{u}}_{\perp} = \frac{d\theta(t)}{dt} \hat{\mathbf{v}} \times \mathbf{A}(t) = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A}(t),$$

donde hemos identificado $\boldsymbol{\omega} = \frac{d\theta(t)}{dt} \hat{\mathbf{v}}$. Podemos ir más allá observando el cuadrante V de la Figura 1.6, vemos que si suponemos que el módulo del vector es constante, entonces

$$\frac{d|\mathbf{A}(t)|}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{d\mathbf{A}(t)}{dt} = |\mathbf{A}(t)|\hat{\mathbf{u}}_{\perp} \Rightarrow \left[\frac{d\mathbf{A}(t)}{dt} \cdot \hat{\mathbf{u}}_{\perp} \right] \hat{\mathbf{u}}_{\perp} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A}(t).$$

1.8.3. Velocidades y aceleraciones

El radio vector posición de una partícula genera los vectores velocidad y aceleración

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) \Rightarrow \mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} \Rightarrow \mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}(t)}{dt^2},$$

ahora bien

$$\mathbf{r} = r\hat{\mathbf{u}}_r = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, \quad \text{con} \quad \hat{\mathbf{u}}_r = \cos(\theta)\mathbf{i} + \text{sen}(\theta)\mathbf{j}.$$

Si suponemos que la partícula describe una trayectoria entonces

$$\left. \begin{array}{l} r = r(t) \\ \theta = \theta(t) \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{array} \right. ; \quad \hat{\mathbf{u}}_r = \hat{\mathbf{u}}_r(t); \quad \begin{array}{l} \mathbf{i} = \text{const} \\ \mathbf{j} = \text{const} \\ \mathbf{k} = \text{const} \end{array}$$

Es muy común denotar a la derivada temporal sobre funciones de una variable con un punto, es decir, podemos utilizar la siguiente notación

$$\dot{g}(t) \equiv \frac{dg(t)}{dt},$$

con lo cual

$$\frac{d\hat{\mathbf{u}}_r}{dt} = \frac{d[\cos(\theta(t))\mathbf{i} + \text{sen}(\theta(t))\mathbf{j}]}{dt} = -\text{sen}(\theta(t))\dot{\theta}(t)\mathbf{i} + \cos(\theta(t))\dot{\theta}(t)\mathbf{j}$$

$$\frac{d\hat{\mathbf{u}}_r}{dt} = \dot{\theta}(t)\underbrace{[-\text{sen}(\theta(t))\mathbf{i} + \cos(\theta(t))\mathbf{j}]}_{\hat{\mathbf{u}}_\theta} = \dot{\theta}(t)\hat{\mathbf{u}}_\theta,$$

ya que

$$|\hat{\mathbf{u}}_r| = \sqrt{\hat{\mathbf{u}}_r \cdot \hat{\mathbf{u}}_r} = \sqrt{[\cos(\theta(t))\mathbf{i} + \text{sen}(\theta(t))\mathbf{j}] \cdot [\cos(\theta(t))\mathbf{i} + \text{sen}(\theta(t))\mathbf{j}]} = 1$$

$$|\hat{\mathbf{u}}_\theta| = \sqrt{\hat{\mathbf{u}}_\theta \cdot \hat{\mathbf{u}}_\theta} = \sqrt{[-\text{sen}(\theta(t))\mathbf{i} + \cos(\theta(t))\mathbf{j}] \cdot [-\text{sen}(\theta(t))\mathbf{i} + \cos(\theta(t))\mathbf{j}]} = 1,$$

y

$$\hat{\mathbf{u}}_\theta \cdot \hat{\mathbf{u}}_r = \hat{\mathbf{u}}_r \cdot \hat{\mathbf{u}}_\theta = [-\text{sen}(\theta(t))\mathbf{i} + \cos(\theta(t))\mathbf{j}] \cdot [\cos(\theta(t))\mathbf{i} + \text{sen}(\theta(t))\mathbf{j}] = 0.$$

Más aún

$$\frac{d\hat{\mathbf{u}}_\theta}{dt} = \frac{d[-\text{sen}(\theta(t))\mathbf{i} + \cos(\theta(t))\mathbf{j}]}{dt} = -\cos(\theta(t))\dot{\theta}(t)\mathbf{i} - \text{sen}(\theta(t))\dot{\theta}(t)\mathbf{j} = -\dot{\theta}(t)\hat{\mathbf{u}}_r.$$

Para una partícula que sigue un movimiento genérico, su trayectoria vendrá descrita en coordenadas cartesianas por:

$$\mathbf{r} = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k},$$

su velocidad será

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \frac{d[x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}]}{dt} = \dot{x}(t)\mathbf{i} + \dot{y}(t)\mathbf{j} + \dot{z}(t)\mathbf{k} = v_x(t)\mathbf{i} + v_y(t)\mathbf{j} + v_z(t)\mathbf{k},$$

y la aceleración

$$\mathbf{a}(t) = \dot{v}_x(t)\mathbf{i} + \dot{v}_y(t)\mathbf{j} + \dot{v}_z(t)\mathbf{k} = a_x(t)\mathbf{i} + a_y(t)\mathbf{j} + a_z(t)\mathbf{k}.$$

Mientras que en coordenadas polares será

$$\mathbf{r}(t) = r(t)\hat{\mathbf{u}}_r(t) \Rightarrow \mathbf{v}(t) = \frac{d[r(t)\hat{\mathbf{u}}_r(t)]}{dt} = \dot{r}(t)\hat{\mathbf{u}}_r(t) + r(t)\frac{d\hat{\mathbf{u}}_r(t)}{dt},$$

con lo cual la velocidad vendrá dada por

$$\mathbf{v}(t) = v_r(t)\hat{\mathbf{u}}_r(t) + r(t)\dot{\theta}(t)\hat{\mathbf{u}}_\theta(t),$$

y la aceleración

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(t) &= \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = \frac{d\left[v_r(t)\hat{\mathbf{u}}_r(t) + r(t)\dot{\theta}(t)\hat{\mathbf{u}}_\theta(t)\right]}{dt} = \frac{d[v_r(t)\hat{\mathbf{u}}_r(t)]}{dt} + \frac{d\left[r(t)\dot{\theta}(t)\hat{\mathbf{u}}_\theta(t)\right]}{dt} \\ &= \ddot{r}(t)\hat{\mathbf{u}}_r(t) + \dot{r}(t)\frac{d\hat{\mathbf{u}}_r(t)}{dt} + \dot{r}(t)\dot{\theta}(t)\hat{\mathbf{u}}_\theta(t) + r(t)\ddot{\theta}(t)\hat{\mathbf{u}}_\theta(t) + r(t)\dot{\theta}(t)\frac{d\hat{\mathbf{u}}_\theta(t)}{dt} \\ &= \left\{\ddot{r}(t) - r(t)\left(\dot{\theta}(t)\right)^2\right\}\hat{\mathbf{u}}_r(t) + \left\{2\dot{r}(t)\dot{\theta}(t) + r(t)\ddot{\theta}(t)\right\}\hat{\mathbf{u}}_\theta(t). \end{aligned}$$

Claramente para el caso de un movimiento circular

$$r = R = \text{const} \Rightarrow \frac{dR}{dt} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{r}(t) = R\hat{\mathbf{u}}_r(t) \\ \mathbf{v}(t) = R\dot{\theta}(t)\hat{\mathbf{u}}_\theta \\ \mathbf{a}(t) = -R\dot{\theta}(t)^2\hat{\mathbf{u}}_r(t) + R\ddot{\theta}(t)\hat{\mathbf{u}}_\theta(t) \end{cases}$$

De aquí podemos ver claramente que el vector velocidad $\mathbf{v}(t)$ y el vector posición $\mathbf{r}(t)$ son ortogonales. La velocidad, $\mathbf{v}(t)$, siempre es tangente a la trayectoria $\mathbf{r}(t)$ y en este caso la trayectoria es una circunferencia.

En general el vector

$$\mathbf{r}_{\text{med}} = \sum_i \Delta \mathbf{r}(t_i) = \sum_i (\mathbf{r}(t_i + \Delta t_i) - \mathbf{r}(t_i)) \Rightarrow \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_i \Delta \mathbf{r}(t_i) = \int d\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t),$$

es decir $d\mathbf{r}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_i \Delta \mathbf{r}(t_i)$ es tangente a la trayectoria. Es claro que

$$d\mathbf{r}(t) = d[x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}] \equiv \frac{dx(t)}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy(t)}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz(t)}{dt}\mathbf{k}.$$

Tal y como mencionamos arriba, para el sistema de coordenadas cartesiano podemos definir un vector (en este caso) velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ tal que:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\boldsymbol{\omega}}{|\boldsymbol{\omega}|} \times \hat{\mathbf{u}}_r &= \hat{\mathbf{u}}_v \\ \hat{\mathbf{u}}_v \times \frac{\boldsymbol{\omega}}{|\boldsymbol{\omega}|} &= \hat{\mathbf{u}}_r \\ \hat{\mathbf{u}}_r \times \hat{\mathbf{u}}_v &= \frac{\boldsymbol{\omega}}{|\boldsymbol{\omega}|} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \mathbf{v}(t) = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}(t)$$

Supongamos por simplicidad que elegimos el sistema de coordenadas cartesiano, donde \mathbf{r} está en el plano x, y . En este caso es inmediato comprobar que $v^i = \varepsilon^{ijk}\omega_j x_k$, y dado que \mathbf{r} y \mathbf{v} tienen únicamente componentes 1 y 2 entonces, necesariamente $\boldsymbol{\omega}$ tiene únicamente componente 3, Es decir

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{r} &= r^i \mathbf{e}_i \\ \mathbf{v} &= v^i \mathbf{e}_i \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} v^1 &= \varepsilon^{1j2}\omega_j x_2 \\ v^2 &= \varepsilon^{2j1}\omega_j x_1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boldsymbol{\omega} = |\boldsymbol{\omega}| \mathbf{e}_3 = \boldsymbol{\omega} \mathbf{k},$$

como

$$\mathbf{r} = x(t) \mathbf{i} + y(t) \mathbf{j},$$

entonces

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = v_x(t) \mathbf{i} + v_y(t) \mathbf{j} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}(t) = \dot{\theta}(t) \mathbf{k} \times [x(t) \mathbf{i} + y(t) \mathbf{j}],$$

se verá más claro en coordenadas polares, esto es

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(t) &= \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = r(t) \dot{\theta}(t) \hat{\mathbf{u}}_\theta(t) = [|\boldsymbol{\omega}| \hat{\mathbf{u}}_n(t)] \times [r(t) \hat{\mathbf{u}}_r(t)], \quad |\mathbf{r}(t)| = \text{const} \\ &= \underbrace{r(t) \dot{\theta}(t)}_{\mathbf{v}_\perp} \hat{\mathbf{u}}_\theta(t) = |\boldsymbol{\omega}| r(t) \hat{\mathbf{u}}_\theta(t) \Rightarrow \dot{\theta}(t) \equiv |\boldsymbol{\omega}|. \end{aligned}$$

1.8.4. Vectores y funciones

Antes de continuar con la integración repensemos algunas funciones de tipo $\phi(x, y, z)$ y $\mathbf{V}(x, y, z)$. Estas funciones son sin duda funciones de varias variables:

$$\begin{aligned} \phi &= \phi(x, y, z), \\ \mathbf{V} &= \mathbf{V}(x, y, z) = \mathbf{i}V_x(x, y, z) + \mathbf{j}V_y(x, y, z) + \mathbf{k}V_z(x, y, z). \end{aligned}$$

Un par de reflexiones se pueden hacer en este punto, primeramente, dado que hemos relacionado un punto del espacio con un radio vector posición, entonces

$$P_{(x,y,z)} \leftrightarrow (x, y, z) \leftrightarrow \mathbf{r} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k} \Rightarrow \begin{cases} \phi = \phi(x, y, z) \equiv \phi(\mathbf{r}) \\ \mathbf{V} = \mathbf{V}(x, y, z) \equiv \mathbf{V}(\mathbf{r}) \end{cases}$$

La primera función, $\phi(\mathbf{r})$ será una función escalar de argumento vectorial o, simplemente un campo escalar y la segunda se conoce como una función vectorial de argumento vectorial o campo vectorial. Como hemos dicho, este tipo de funciones y las operaciones que pueden ser realizadas con ellas, y su significado, serán analizadas en detalle más adelante durante el desarrollo de este curso.

En segundo lugar, siempre podremos parametrizar las coordenadas y tendremos

$$\begin{aligned} \phi &= \phi(t) = \phi(x(t), y(t), z(t)), \\ \mathbf{V} &= \mathbf{V}(t) = \mathbf{V}(x(t), y(t), z(t)) = V_x(x(t), y(t), z(t)) \mathbf{i} + V_y(x(t), y(t), z(t)) \mathbf{j} + V_z(x(t), y(t), z(t)) \mathbf{k}. \end{aligned}$$

Este caso lo hemos encontrado en montones de situaciones, por ejemplo, el movimiento parabólico viene descrito por vectores velocidad y posición dados por:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(t) &= -gt \mathbf{k} + \mathbf{v}_0 = -gt \mathbf{k} + (v_{0x} \mathbf{i} + v_{0y} \mathbf{j} + v_{0z} \mathbf{k}) \Rightarrow \begin{cases} v_x = v_{0x} \\ v_y = v_{0y} \\ v_z = v_{0z} - gt \end{cases} \\ \mathbf{r}(t) &= -\frac{g}{2} t^2 \mathbf{k} + \mathbf{v}_0 t = -\frac{g}{2} t^2 \mathbf{k} + (v_{0x} \mathbf{i} + v_{0y} \mathbf{j} + v_{0z} \mathbf{k}) t \Rightarrow \begin{cases} x = v_{0x} t \\ y = v_{0y} t \\ z = v_{0z} t - \frac{g}{2} t^2 \end{cases} \end{aligned}$$

Derivada de funciones $\phi(\mathbf{r}(t))$

Al derivar una función de argumento vectorial también se aplica la “regla de la cadena”. Esto es, si

$$\phi(\mathbf{r}(t)) = g(x(t), y(t), z(t))$$

entonces:

$$\begin{aligned} \frac{d\phi(\mathbf{r}(t))}{dt} &= \frac{\partial\phi(x(t), y(t), z(t))}{\partial x} \frac{dx(t)}{dt} + \frac{\partial\phi(x(t), y(t), z(t))}{\partial y} \frac{dy(t)}{dt} + \frac{\partial\phi(x(t), y(t), z(t))}{\partial z} \frac{dz(t)}{dt} \\ &= \left[\frac{\partial\phi(x, y, z)}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial\phi(x, y, z)}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial\phi(x, y, z)}{\partial z} \mathbf{k} \right] \cdot \left[\frac{dx(t)}{dt} \mathbf{i} + \frac{dy(t)}{dt} \mathbf{j} + \frac{dz(t)}{dt} \mathbf{k} \right] \\ &= \nabla\phi(x(t), y(t), z(t)) \cdot \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt}, \end{aligned}$$

donde hemos representado

$$\nabla\phi(\mathbf{r}(t)) = \frac{\partial\phi(x, y, z)}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial\phi(x, y, z)}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial\phi(x, y, z)}{\partial z} \mathbf{k} = \partial^i\phi(x, y, z) \mathbf{e}_i = \phi^{,i}(x, y, z) \mathbf{i}_i,$$

y lo llamaremos el **gradiente** de la función $\phi(\mathbf{r}(t))$.

El gradiente de un campo escalar es uno de los objetos más útiles que encontraremos en el estudio de problemas de física-matemática, el cual lo utilizaremos por ahora de manera operacional. Es bueno recordar que emerge como consecuencia de una derivación contra un parámetro. El gradiente mide el cambio de la función $\phi(x, y, z)$.

La idea de gradiente nos lleva a considerar a ∇ como un operador vectorial que actúa sobre la función escalar de variable vectorial $\phi(\mathbf{r}(t))$. Es decir, y con un poquito de imaginación

$$\begin{aligned} \nabla\phi(\mathbf{r}(t)) &\equiv \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \right) \phi(x, y, z) = (\mathbf{i}_i \partial^i) \phi(x, y, z) \\ &\Downarrow \\ \nabla(\circ) &= \left(\frac{\partial(\circ)}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial(\circ)}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial(\circ)}{\partial z} \mathbf{k} \right) = \mathbf{i}_i \partial^i(\circ). \end{aligned}$$

Derivada de funciones $\mathbf{V}(\mathbf{r}(t))$

De modo que inspirados en la regla de la cadena de una función escalar de variable vectorial podemos comprobar que

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \frac{dV_x(x, y, z)}{dt} \mathbf{i} + \frac{dV_y(x, y, z)}{dt} \mathbf{j} + \frac{dV_z(x, y, z)}{dt} \mathbf{k} = \frac{dV^i(x, y, z)}{dt} \mathbf{i}_i$$

por consiguiente, si \mathbf{V} , tiene por componentes cartesianas (V_x, V_y, V_z) las componentes del vector derivado serán $\left(\frac{dV_x}{dt}, \frac{dV_y}{dt}, \frac{dV_z}{dt} \right)$. Con lo cual cada componente

$$\frac{d(V^i(x(t), y(t), z(t)))}{dt} = \frac{d(V^i(x^j(t)))}{dt} = \frac{\partial(V^i(x^j))}{\partial x^k} \frac{dx^k(t)}{dt} = \left(\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} \cdot \nabla \right) V^i(x, y, z),$$

en términos vectoriales

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \left(\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} \cdot \nabla \right) \mathbf{V} \equiv (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{V} \Rightarrow \frac{d(\circ)}{dt} = (\mathbf{v} \cdot \nabla) (\circ) \equiv v^i \partial_i (\circ),$$

con \mathbf{v} la derivada del radiovector posición $\mathbf{r}(t)$, es decir, la velocidad. Entonces, estamos viendo que el cambio del vector \mathbf{V} respecto al tiempo es el cambio de sus componentes en la dirección de la velocidad.

Si se nos ocurre calcular la derivada del vector velocidad para encontrar la aceleración tendremos que nos quedará expresada como

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \Rightarrow a^i = (\mathbf{v} \cdot \nabla) v^i,$$

donde las componentes cartesianas de los vectores velocidad y aceleración son: $v^i = v^i(x(t), y(t), z(t))$ y $a^i = a^i(x(t), y(t), z(t))$, respectivamente.

1.8.5. El vector gradiente

El operador vectorial $\nabla(\circ)$ merece un poco de atención en este nivel. Tal y como hemos visto

$$\begin{aligned} \nabla\phi(x, y, z) &= \frac{\partial\phi(x, y, z)}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial\phi(x, y, z)}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial\phi(x, y, z)}{\partial z} \mathbf{k}, \\ &= \partial^1\phi(x, y, z) \mathbf{i}_1 + \partial^2\phi(x, y, z) \mathbf{i}_2 + \partial^3\phi(x, y, z) \mathbf{i}_3. \end{aligned}$$

Con el operador nabla $\nabla(\circ)$ realizaremos operaciones igual como con un vector común y corriente. Así en el caso de $\nabla \times \mathbf{E}$, que se denomina **rotor** de \mathbf{E} , este viene definido por

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \right) \times (E_x \mathbf{i} + E_y \mathbf{j} + E_z \mathbf{k}) \\ &= \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \mathbf{k} = \varepsilon^{ijk} \partial_j E_k \mathbf{i}_i. \end{aligned}$$

También podemos hablar del “producto escalar” de nabla por un vector \mathbf{a} . A esta operación la llamaremos **divergencia** de \mathbf{a} :

$$\nabla \cdot \mathbf{a} = \frac{\partial a^i(x^j)}{\partial \tilde{x}^i} \equiv \partial_i a^i(x^j) \equiv \frac{\partial a_x(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial a_y(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial a_z(x, y, z)}{\partial z},$$

pero por ahora consideremos nabla ∇ como un vector.

De este modo habrá una gran cantidad de relaciones vectoriales que involucran a ∇ , las cuales se podrán demostrar. Veamos algunos ejemplos.

1. $\nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{b} + (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{a} + \mathbf{a} \times (\nabla \times \mathbf{b}) + \mathbf{b} \times (\nabla \times \mathbf{a})$

El resultado es un gradiente, es decir un vector. El lado izquierdo será

$$(\nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}))^i = \partial^i(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \partial^i(a_j b^j) = (\partial^i a_j) b^j + (\partial^i b_j) a^j$$

mientras que el lado derecho

$$\begin{aligned}
(\nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}))^i &= (a_j \partial^j) b^i + (b_j \partial^j) a^i + \varepsilon^{ijk} a_j (\vec{\nabla} \times \mathbf{b})_k + \varepsilon^{ijk} b_j (\nabla \times \mathbf{a})_k \\
&= (a_j \partial^j) b^i + (b_j \partial^j) a^i + \varepsilon^{ijk} a_j \varepsilon_{kmn} \partial^m b^n + \varepsilon^{ijk} b_j \varepsilon_{kmn} \partial^m a^n \\
&= (a_j \partial^j) b^i + (b_j \partial^j) a^i + \varepsilon^{ijk} \varepsilon_{mnk} a_j \partial^m b^n + \varepsilon^{ijk} \varepsilon_{mnk} b_j \partial^m a^n \\
&= (a_j \partial^j) b^i + (b_j \partial^j) a^i + (\delta_m^i \delta_n^j - \delta_m^j \delta_n^i) a_j \partial^m b^n + (\delta_m^i \delta_n^j - \delta_m^j \delta_n^i) b_j \partial^m a^n \\
&= a_j \partial^j b^i + b_j \partial^j a^i + \delta_m^i \delta_n^j a_j \partial^m b^n - \delta_m^j \delta_n^i a_j \partial^m b^n + \delta_m^i \delta_n^j b_j \partial^m a^n - \delta_m^j \delta_n^i b_j \partial^m a^n \\
&= a_j \partial^j b^i + b_j \partial^j a^i + a_n \partial^i b^n - a_m \partial^m b^i + b_n \partial^i a^n - b_m \partial^m a^i \\
&= \underbrace{a_j \partial^j b^i - a_m \partial^m b^i}_{=0} + \underbrace{b_j \partial^j a^i - b_m \partial^m a^i}_{=0} + a_n \partial^i b^n + b_n \partial^i a^n \\
&= a_n \partial^i b^n + b_n \partial^i a^n = \partial^i (a_j b^j) = \partial^i (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) .
\end{aligned}$$

2. $\nabla \times (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{a} = (\nabla \cdot \mathbf{a}) (\nabla \times \mathbf{a}) - [\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{a})] \mathbf{a} + (\mathbf{a} \cdot \nabla) (\nabla \times \mathbf{a}) - [(\nabla \times \mathbf{a}) \cdot \nabla] \mathbf{a}$

Iniciamos la traducción a índices por el lado izquierdo de la ecuación, así

$$\begin{aligned}
\nabla \times (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{a} &= \varepsilon^{ijk} \partial_j (a_m \partial^m) a_k = \varepsilon^{ijk} (\partial_j a_m) \partial^m a_k + \varepsilon^{ijk} a_m \partial_j \partial^m a_k \\
&= \varepsilon^{ijk} (\partial_j a_m) \partial^m a_k + a_m \partial^m (\varepsilon^{ijk} \partial_j a_k) ,
\end{aligned}$$

el lado derecho lo traduciremos término por término

$$\begin{aligned}
(\nabla \cdot \mathbf{a}) (\nabla \times \mathbf{a}) &= (\partial^m a_m) (\varepsilon^{ijk} \partial_j a_k) \\
- [\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{a})] \mathbf{a} &= - [\partial_m \varepsilon^{mjk} \partial_j a_k] a^i = - [\varepsilon^{mjk} \partial_m \partial_j a_k] a^i = 0 \\
(\mathbf{a} \cdot \nabla) (\nabla \times \mathbf{a}) &= a_m \partial^m (\varepsilon^{ijk} \partial_j a_k) \\
- [(\nabla \times \mathbf{a}) \cdot \nabla] \mathbf{a} &= - [(\varepsilon^{mjk} \partial_j a_k) \partial_m] a^i .
\end{aligned}$$

El segundo término se anula por cuanto ε^{mjk} es antisimétrico respecto a los índices m, j mientras que $\partial_m \partial_j$ es simétrico. El tercer término del desarrollo del lado derecho corresponde con el segundo del desarrollo del lado izquierdo. Por lo tanto, llegamos a la siguiente igualdad

$$\varepsilon^{ijk} (\partial_j a_m) \partial^m a_k = (\partial^m a_m) (\varepsilon^{ijk} \partial_j a_k) - [(\varepsilon^{mjk} \partial_j a_k) \partial_m] a^i$$

Para verificar la igualdad tendremos que evaluar componente a componente. Esto es, para el lado izquierdo:

$$\begin{aligned}
\varepsilon^{1jk} (\partial_j a_m) \partial^m a_k &= \varepsilon^{123} (\partial_2 a_m) \partial^m a_3 + \varepsilon^{132} (\partial_3 a_m) \partial^m a_2 \\
&= (\partial_2 a_m) \partial^m a_3 - (\partial_3 a_m) \partial^m a_2 \\
&= (\partial_2 a_1) \partial^1 a_3 + (\partial_2 a_2) \partial^2 a_3 + (\partial_2 a_3) \partial^3 a_3 - (\partial_3 a_1) \partial^1 a_2 - (\partial_3 a_2) \partial^2 a_2 - (\partial_3 a_3) \partial^3 a_2 ,
\end{aligned}$$

mientras que para el primer término del lado derecho

$$\begin{aligned}
(\partial^m a_m) (\varepsilon^{1jk} \partial_j a_k) &= (\partial^m a_m) (\varepsilon^{123} \partial_2 a_3) + (\partial^m a_m) (\varepsilon^{132} \partial_3 a_2) \\
&= \underbrace{\partial_2 a_3 \partial^1 a_1}_{\alpha} + \partial_2 a_3 \partial^2 a_2 + \partial_2 a_3 \partial^3 a_3 - \underbrace{\partial_3 a_2 \partial^1 a_1}_{\beta} - \partial_3 a_2 \partial^2 a_2 - \partial_3 a_2 \partial^3 a_3 ,
\end{aligned}$$

y el segundo término se escribe como

$$\begin{aligned}
 - [(\epsilon^{mjk} \partial_j a_k) \partial_m] a^i &= - (\epsilon^{1jk} \partial_j a_k) \partial_1 a^1 - (\epsilon^{2jk} \partial_j a_k) \partial_2 a^1 - (\epsilon^{3jk} \partial_j a_k) \partial_3 a^1 \\
 &= - (\partial_2 a_3 - \partial_3 a_2) \partial_1 a^1 - (\partial_3 a_1 - \partial_1 a_3) \partial_2 a^1 - (\partial_1 a_2 - \partial_2 a_1) \partial_3 a^1 \\
 &= \underbrace{\partial_3 a_2 \partial_1 a^1}_{\beta} - \underbrace{\partial_2 a_3 \partial_1 a^1}_{\alpha} + \partial_1 a_3 \partial_2 a^1 - \underbrace{\partial_3 a_1 \partial_2 a^1}_{\gamma} + \underbrace{\partial_2 a_1 \partial_3 a^1}_{\gamma} - \partial_1 a_2 \partial_3 a^1.
 \end{aligned}$$

Al sumar ambos términos se eliminan los sumandos indicados con letras griegas, y queda como

$$\begin{aligned}
 (\partial^m a_m) (\epsilon^{1jk} \partial_j a_k) - [(\epsilon^{mjk} \partial_j a_k) \partial_m] a^i &= \partial_2 a_3 \partial_2 a_2 + \partial_2 a_3 \partial_3 a_3 \\
 &\quad - \partial_3 a_2 \partial_2 a_2 - \partial_2 a_2 \partial_3 a_3 + \partial_1 a_3 \partial_2 a_1 - \partial_1 a_2 \partial_3 a_1,
 \end{aligned}$$

y al compararlo con el desarrollo del lado derecho e identificar término a término queda demostrada la igualdad

$$\begin{aligned}
 \epsilon^{1jk} (\partial_j a_m) \partial^m a_k &= (\partial_2 a_1) \partial_1 a_3 + (\partial_2 a_2) \partial_2 a_3 + (\partial_2 a_3) \partial_3 a_3 \\
 &\quad - (\partial_3 a_1) \partial_1 a_2 - (\partial_3 a_2) \partial_2 a_2 - (\partial_3 a_3) \partial_3 a_2.
 \end{aligned}$$

De igual manera se procede con $i = 2$ e $i = 3$.

Ejercicios

1. Demuestre

$$\frac{d}{dt} [\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})] = \frac{d\mathbf{A}}{dt} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) + \mathbf{A} \cdot \left(\frac{d\mathbf{B}}{dt} \times \mathbf{C} \right) + \mathbf{A} \cdot \left(\mathbf{B} \times \frac{d\mathbf{C}}{dt} \right)$$

2. Demuestre

$$\frac{d}{dt} \left[\mathbf{A} \cdot \left(\frac{d\mathbf{A}}{dt} \times \frac{d^2\mathbf{A}}{dt^2} \right) \right] = \mathbf{A} \cdot \left(\frac{d\mathbf{A}}{dt} \times \frac{d^3\mathbf{A}}{dt^3} \right)$$

3. Demuestre que

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla \nabla \cdot \mathbf{A} - \nabla \cdot \nabla \mathbf{A}$$

4. Demuestre que

$$\nabla \times (\phi \nabla \phi) = 0$$

5. Muestre que

$$\nabla \times [\mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{A})] = 0$$

si $\mathbf{A} = (y, z)\mathbf{i}$.

1.8.6. Integración

Después de haber diferenciado campos escalares y vectoriales, el siguiente paso es integrarlos. Encontraremos algunos objetos vectoriales a integrar y serán:

$$\int \mathbf{V}(u) \, du \quad \rightarrow \quad \text{integración de un vector por un escalar}$$

$$\int_c \phi(x, y, z) \, d\mathbf{r} \quad \rightarrow \quad \text{integración de un escalar a lo largo de un vector}$$

$$\int_c \mathbf{V}(x, y, z) \cdot d\mathbf{r} \quad \rightarrow \quad \text{integración de un vector a lo largo de otro vector}$$

$$\int_c \mathbf{V}(x, y, z) \times d\mathbf{r} \quad \rightarrow \quad \text{integración de un vector por otro vector.}$$

El primero de los casos es el tipo de integral que siempre hemos utilizado para encontrar la posición a partir de la velocidad. Los siguientes tres casos se conocen con el nombre de integrales de línea por cuanto es importante la “ruta” o trayectoria que sigamos al integrar. Esto aparece indicado por la letra C en la integral y será evidente más adelante. En general la integral de línea dependerá de la trayectoria.

Un vector por un escalar

El primer caso de este tipo integrales es el trivial que siempre hemos utilizado:

$$\int \mathbf{V}(u) \, du = \mathbf{i} \int V_x(u) \, du + \mathbf{j} \int V_y(u) \, du + \mathbf{k} \int V_z(u) \, du = \left(\int V^i(u) \, du \right) \mathbf{i}_i.$$

La integral de un vector (en un sistema de coordenadas cartesianas) por un escalar se convierte en la suma de tres integrales, cada una a lo largo de las componentes cartesianas del vector.

Así integramos la aceleración de un movimiento parabólico

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{a} = -g \mathbf{k} \Rightarrow \mathbf{v} = \int \mathbf{a} \, dt = \mathbf{k} \int -g \, dt = -\mathbf{k} \, gt + \mathbf{v}_0 = -\mathbf{k} \, gt + \mathbf{i}v_{0x} + \mathbf{j}v_{0y} + \mathbf{k} \cdot v_{0z}$$

Ahora bien, existen sutilezas en este caso que debemos tener en cuenta. Por ejemplo, considere la integral

$$\int dt \left(\mathbf{a} \times \frac{d^2\mathbf{a}}{dt^2} \right) = \int dt \left(\frac{d}{dt} \left(\mathbf{a} \times \frac{d\mathbf{a}}{dt} \right) - \frac{d\mathbf{a}}{dt} \times \frac{d\mathbf{a}}{dt} \right) = \int dt \frac{d}{dt} \left(\mathbf{a} \times \frac{d\mathbf{a}}{dt} \right) = \mathbf{a} \times \frac{d\mathbf{a}}{dt} + \mathbf{c}.$$

Pero en general los casos quedan resueltos integrando componente a componente con la ayuda de la notación de índices

$$\int dt (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \left[\int dt (\varepsilon^{ijk} a_j b_k) \right] \mathbf{i}_i.$$

Tal vez, uno de los problemas que ilustra mejor esta situación es el movimiento bajo fuerzas centrales. La Ley de Gravitación de Newton nos dice que

$$\sum \mathbf{F} = m \mathbf{a} \Rightarrow mG \frac{M}{r_{mM}^2} \hat{\mathbf{u}}_r = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \Rightarrow \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{GM}{r_{mM}^2} \hat{\mathbf{u}}_r.$$

Es costumbre definir la *velocidad aerolar*, \mathbf{v}_a , como el área barrida por el radio vector posición, $\mathbf{r}(t)$ que describe la trayectoria de la partícula

$$2\mathbf{v}_a = \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} = r \hat{\mathbf{u}}_r \times \frac{d(r \hat{\mathbf{u}}_r)}{dt} = r \hat{\mathbf{u}}_r \times \left(\frac{dr}{dt} \hat{\mathbf{u}}_r + r \frac{d\hat{\mathbf{u}}_r}{dt} \right) = r \hat{\mathbf{u}}_r \times r \frac{d\hat{\mathbf{u}}_r}{dt} = r^2 \hat{\mathbf{u}}_r \times \frac{d\hat{\mathbf{u}}_r}{dt}.$$

Nótese que si \mathbf{c} es un vector constante

$$\frac{d}{dt} \left(\hat{\mathbf{u}}_r \times \frac{d\hat{\mathbf{u}}_r}{dt} \right) = 0 \Rightarrow \hat{\mathbf{u}}_r \times \frac{d\hat{\mathbf{u}}_r}{dt} = \mathbf{c} \Rightarrow 2\mathbf{v}_a = r^2 \hat{\mathbf{u}}_r \times \frac{d\hat{\mathbf{u}}_r}{dt} = \text{const},$$

con lo cual

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{v} \times \mathbf{v}_a) = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \times \mathbf{v}_a = \frac{GM}{r_{mM}^2} \hat{\mathbf{u}}_r \times \mathbf{v}_a = \frac{MG}{2} \left\{ \hat{\mathbf{u}}_r \times \left(\hat{\mathbf{u}}_r \times \frac{d\hat{\mathbf{u}}_r}{dt} \right) \right\}$$

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{v} \times \mathbf{v}_a) = \frac{MG}{2} \left\{ \left(\hat{\mathbf{u}}_r \cdot \frac{d\hat{\mathbf{u}}_r}{dt} \right) \hat{\mathbf{u}}_r - (\hat{\mathbf{u}}_r \cdot \hat{\mathbf{u}}_r) \frac{d\hat{\mathbf{u}}_r}{dt} \right\} = \frac{MG}{2} \frac{d\hat{\mathbf{u}}_r}{dt},$$

integrando

$$\mathbf{v} \times \mathbf{v}_a = \frac{MG}{2} \hat{\mathbf{u}}_r + \mathbf{p}$$

donde \mathbf{p} es un vector arbitrario de constante de integración. Finalmente nos damos cuenta que

$$\begin{aligned} \mathbf{r} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{v}_a) &= r \hat{\mathbf{u}}_r \cdot \left(\frac{MG}{2} \hat{\mathbf{u}}_r + \mathbf{p} \right) = \frac{MG}{2} r + rp \cos(\theta) \\ &= \varepsilon^{ijk} r_i v_j v_{ak} \equiv \mathbf{v}_a \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) = \mathbf{v}_a \cdot \mathbf{v}_a = v_a^2 \end{aligned}$$

y entonces

$$v_a^2 = \frac{MG}{2} r + rp \cos \theta \Rightarrow r = \frac{v_a^2}{\frac{MG}{2} + p \cos(\theta)} \equiv \frac{\frac{2v_a^2}{MG}}{1 + \frac{2p}{MG} \cos(\theta)}$$

que constituye la ecuación de una cónica.

Un escalar a lo largo de un vector $\int_C \phi(\mathbf{r}) d\mathbf{r}$

El segundo objeto que “tropezaremos” es la integración de funciones de varias variables a lo largo de una curva determinada. Esto es

$$\int_C \phi(x, y, z) d\mathbf{r} = \int_C \phi(x, y, z) (dx \mathbf{i} + dy \mathbf{j} + dz \mathbf{k}) = \mathbf{i} \int_C \phi(x, y, z) dx + \mathbf{j} \int_C \phi(x, y, z) dy + \mathbf{k} \int_C \phi(x, y, z) dz.$$

La integral se nos ha convertido en tres integrales, las cuales son ahora componentes de un vector. Esto es posible dado que la base $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ es una base constante. Ahora bien, cada una de estas integrales son interdependientes, dado que hay que seguir la misma curva C . Consideremos el caso bidimensional que es más simple y contiene toda la riqueza conceptual del tridimensional.

Por ejemplo:

$$\phi(x, y) = 3x^2 + 2y \Rightarrow \int_{(0,0)}^{(1,2)} (3x^2 + 2y) d\mathbf{r} = \mathbf{i} \int_{(0,0)}^{(1,2)} (3x^2 + 2y) dx + \mathbf{j} \int_{(0,0)}^{(1,2)} (3x^2 + 2y) dy$$

Se requiere especificar la curva C a lo largo de la cual integraremos desde el punto $P_1 \rightarrow (0, 0)$ al punto $P_2 \rightarrow (1, 2)$. Si recorremos la ruta $C_1: (0, 0) \rightarrow (1, 0) \rightarrow (1, 2)$ tendremos que

$$(0, 0) \rightarrow (1, 0) \Rightarrow y = \text{cte} = 0 \Rightarrow \int_{(0,0)}^{(1,0)} (3x^2 + 2y) \, d\mathbf{r} = \mathbf{i} \int_{(0,0)}^{(1,0)} (3x^2 + 2y) \, dx = \mathbf{i} \int_0^1 (3x^2) \, dx = \mathbf{i}$$

$$(1, 0) \rightarrow (1, 2) \Rightarrow x = \text{cte} = 1 \Rightarrow \int_{(0,0)}^{(1,2)} (3x^2 + 2y) \, d\mathbf{r} = \mathbf{j} \int_{(0,0)}^{(1,2)} (3x^2 + 2y) \, dy = \mathbf{j} \int_0^2 (3 + 2y) \, dy = 10\mathbf{j}$$

con lo cual

$$C_1 \longleftrightarrow \underbrace{(0, 0) \rightarrow (1, 0)}_{C_1^A} \rightarrow \underbrace{(1, 0) \rightarrow (1, 2)}_{C_1^B} \Rightarrow \int_{(0,0)}^{(1,2)} (3x^2 + 2y) \, d\mathbf{r} = \mathbf{i} + 10\mathbf{j}$$

Si hubiéramos seleccionado la recta que une a estos dos puntos como la curva C_2 entonces

$$C_2 : y = 2x \Rightarrow dy = 2dx,$$

entonces

$$\begin{aligned} \int_{(0,0)}^{(1,2)} (3x^2 + 2y) \, d\mathbf{r} &= \mathbf{i} \int_{(0,0)}^{(1,2)} (3x^2 + 2y) \, dx + \mathbf{j} \int_{(0,0)}^{(1,2)} (3x^2 + 2y) \, dy \\ &= \mathbf{i} \int_0^1 (3x^2 + 2(2x)) \, dx + \mathbf{j} \int_0^1 (3x^2 + 2(2x)) \, 2dx = 3\mathbf{i} + 6\mathbf{j} \end{aligned}$$

En general la curva C se parametrizará y las integrales en varias variables se convertirán en integrales a lo largo del parámetro que caracteriza la curva

$$C \longleftrightarrow \{x = x(\tau), y = y(\tau), z = z(\tau)\}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \int_C \phi(x, y, z) \, d\mathbf{r} &= \int_C \phi(x(\tau), y(\tau), z(\tau)) \left(\frac{\partial x(\tau)}{\partial \tau} d\tau \mathbf{i} + \frac{\partial y(\tau)}{\partial \tau} d\tau \mathbf{j} + \frac{\partial z(\tau)}{\partial \tau} d\tau \mathbf{k} \right) \\ &= \mathbf{i} \int_C \phi(x(\tau), y(\tau), z(\tau)) \frac{\partial x(\tau)}{\partial \tau} d\tau + \mathbf{j} \int_C \phi(x(\tau), y(\tau), z(\tau)) \frac{\partial y(\tau)}{\partial \tau} d\tau \\ &\quad + \mathbf{k} \int_C \phi(x(\tau), y(\tau), z(\tau)) \frac{\partial z(\tau)}{\partial \tau} d\tau. \end{aligned}$$

Las parametrizaciones para las curvas anteriores son muy simples

$$C_1^A = \begin{cases} x = \tau \\ y = 0 \end{cases} ; \quad C_1^B = \begin{cases} x = 2 \\ y = \tau \end{cases} ; \quad C_2 = \begin{cases} x = \tau \\ y = 2\tau \end{cases}$$

Un vector a lo largo de otro vector $\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$

Quizá la integral de línea más conocida sea una del tipo $\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$ por cuanto nos la hemos “tropezado” en el cálculo del trabajo que realiza una fuerza. Todo lo que hemos considerado al parametrizar la curva en el caso anterior, sigue siendo válido.

$$\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_C F_x(x, y, z) \, dx + \int_C F_y(x, y, z) \, dy + \int_C F_z(x, y, z) \, dz = \int_C F^i(x^j) \, dx_i$$

Por lo cual, si consideramos

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = (3x^2 + 2xy^3)\mathbf{i} + 6xy\mathbf{j},$$

entonces

$$\begin{aligned}\int_{(0,0)}^{(1, \frac{3}{4}\sqrt{2})} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} &= \int_{(0,0)}^{(1, \frac{3}{4}\sqrt{2})} ((3x^2 + 2xy^3)\mathbf{i} + 6xy\mathbf{j}) (dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j}) \\ &= \int_{(0,0)}^{(1, \frac{3}{4}\sqrt{2})} (3x^2 + 2xy^3) dx + \int_{(0,0)}^{(1, \frac{3}{4}\sqrt{2})} 6xy dy,\end{aligned}$$

y si la curva que une esos puntos viene parametrizada por

$$\left. \begin{aligned}x &= 2\tau^2 \\ y &= \tau^3 + \tau\end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned}\frac{\partial x(\tau)}{\partial \tau} &= 4\tau \\ \frac{\partial y(\tau)}{\partial \tau} &= 3\tau^2 + 1\end{aligned} \right\}$$

entonces la primera de las integrales resulta

$$\begin{aligned}\int_{(0,0)}^{(1, \frac{3}{4}\sqrt{2})} (3x^2 + 2xy^3) dx &= \int (3(2\tau^2)^2 + 2(2\tau^2)(\tau^3 + \tau)^3) (4\tau) d\tau \\ &= \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} (12\tau^5 + 4\tau^{12} + 12\tau^{10} + 12\tau^8 + 4\tau^6) d\tau = \frac{1}{4} + \frac{9305}{96096}\sqrt{2}.\end{aligned}$$

Y la segunda

$$\int_{(0,0)}^{(1, \frac{3}{4}\sqrt{2})} 6xy dy = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} 6(2\tau^2)(\tau^3 + \tau)(3\tau^2 + 1) d\tau = \frac{65}{32},$$

con lo cual

$$\int_{(0,0)}^{(1, \frac{3}{4}\sqrt{2})} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_{(0,0)}^{(1, \frac{3}{4}\sqrt{2})} (3x^2 + 2xy^3) dx + \int_{(0,0)}^{(1, \frac{3}{4}\sqrt{2})} 6xy dy = \frac{73}{32} + \frac{9305}{96096}\sqrt{2}.$$

Ejercicios

1. Un campo de fuerza actúa sobre un oscilador descrito por

$$\mathbf{F} = -kx\mathbf{i} - ky\mathbf{j}$$

Compare el trabajo hecho al moverse en contra de este campo al ir desde el punto (1, 1) al punto (4, 4) siguiendo los siguientes caminos:

- a) (1, 1) \rightarrow (4, 1) \rightarrow (4, 4)
- b) (1, 1) \rightarrow (1, 4) \rightarrow (4, 4)
- c) (1, 1) \rightarrow (4, 4) siguiendo el camino $x = y$

2. Dado el campo de fuerza

$$\mathbf{F} = -\frac{y}{x^2 + y^2}\mathbf{i} + \frac{x}{x^2 + y^2}\mathbf{j}$$

Calcule el trabajo hecho en contra de este campo de fuerza al moverse al rededor de un círculo de radio uno y en el plano $x - y$

- a) desde 0 a π en sentido contrario a la agujas del reloj.
 b) desde 0 a $-\pi$ en sentido de las agujas del reloj.

3. Evaluar la siguiente integral

$$\oint \mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}.$$

1.9. Vectores y números complejos

Desde los primeros cursos de matemática nos hemos tropezado con las llamadas raíces imaginarias o complejas de polinomios. De este modo la solución a un polinomio cúbico

$$x^3 - 3x^2 + 4x - 12 = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 2i \\ x = -2i \\ x = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow (x + 2i)(x - 2i)(x - 3) = 0$$

o cuadrático

$$x^2 + 4 = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 2i \\ x = -2i \end{array} \right\} \Rightarrow (x + 2i)(x - 2i)$$

nos lleva a definir un número $i^2 = -1 \Rightarrow i = \sqrt{-1}$. Como vimos arriba al multiplicar el número imaginario i por cualquier número real obtendremos el número imaginario puro ib , con $b \in \mathfrak{R}$. La nomenclatura de números imaginarios surgió de la idea de que estas cantidades no representaban mediciones físicas. Esa idea ha sido abandonada pero el nombre quedó.

1.9.1. Los números complejos y su álgebra

Un número complejo, z , es la generalización de los números imaginarios (puros), ib . Esto es

$$z = a + ib \quad \text{con } a, b \in \mathfrak{R} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a \rightarrow \text{parte real} \\ b \rightarrow \text{parte imaginaria} \end{array} \right.$$

Obviamente los números reales serán $a + i0$ números complejos con su parte imaginaria nula. Los números imaginarios puros serán números complejos con su parte real nula, esto es, $0 + ib$. Por ello, en general diremos que

$$z = a + ib \Rightarrow a = \text{Re}(z) \quad \wedge \quad b = \text{Im}(z),$$

es decir, a corresponde a la parte real de z y b a su parte imaginaria.

Cada número complejo, z , tendrá un número complejo conjugado, z^* tal que

$$\begin{aligned} z = a + ib &\Rightarrow z^* = a - ib \\ &\Downarrow \\ (z^*)^* &= z \quad \wedge \quad z \cdot z^* = a^2 + b^2, \end{aligned}$$

claramente

$$z \cdot z^* \geq 0 \Rightarrow |z|^2 = |z^*|^2 = z \cdot z^*.$$

Es importante señalar que, en general, no existe relación de orden entre los números complejos. Vale decir, que no sabremos si un número complejo es mayor que otro. No está definida esta operación.

$$z_1 \not> z_2 \quad \vee \quad z_1 \not< z_2.$$

Las relaciones de orden sólo se podrán establecer entre módulos de números complejos y no números complejos en general.

Rápidamente recordamos el álgebra de los números complejos:

- Dos números complejos serán iguales si sus partes reales e imaginarios lo son

$$z_1 = z_2 \Rightarrow (a_1 + ib_1) = (a_2 + ib_2) \Rightarrow a_1 = a_2 \quad \wedge \quad b_1 = b_2.$$

- Se suman dos números complejos sumando sus partes reales y sus partes imaginarias.

$$z_3 = z_1 + z_2 \Rightarrow (a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = \underbrace{(a_1 + a_2)}_{a_3} + i \underbrace{(b_1 + b_2)}_{b_3} = a_3 + ib_3,$$

claramente $z + z^* = 2 \operatorname{Re} z$, también $z - z^* = 2 \operatorname{Im} z$. Igualmente es inmediato comprobar que

$$(z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^*.$$

- Se multiplican números complejos por escalares multiplicando el escalar por sus partes reales e imaginarias

$$z_3 = \alpha z_1 \Rightarrow \alpha (a_1 + ib_1) = (\alpha a_1) + i (\alpha b_1).$$

- Se multiplican números complejos entre si, multiplicando los dos binomios y teniendo cuidado que $i^2 = -1$.

$$z_3 = z_1 z_2 \Rightarrow (a_1 + ib_1) \cdot (a_2 + ib_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i (a_1 b_2 + b_1 a_2),$$

también es inmediato comprobar que $(z_1 z_2)^* = z_1^* z_2^*$.

- Se dividen números complejos siguiendo la estrategia de racionalización de fracciones irracionales. Esto es

$$z_3 = \frac{z_1}{z_2} \Rightarrow \frac{(a_1 + ib_1)}{(a_2 + ib_2)} = \frac{(a_1 + ib_1)(a_2 - ib_2)}{(a_2 + ib_2)(a_2 - ib_2)} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{(a_2^2 + b_2^2)} + i \frac{b_1 a_2 - a_1 b_2}{(a_2^2 + b_2^2)},$$

es claro que el divisor será cualquier número complejo excepto el cero complejo: $0 + i0$.

1.9.2. Vectores y el plano complejo

Mirando con cuidado el álgebra de números complejos nos damos cuenta que un número complejo puede ser representado por una *dupla* de números complejos es decir,

$$z = (a + ib) \quad \Leftrightarrow \quad z = (a, b)$$

las propiedades entre números complejos de igualdad, suma y multiplicación por un escalar arriba expuestas se cumplen de forma inmediata con esta nueva representación. Hay que definir las operaciones de multiplicación y división entre números complejos de forma que

$$(a_1, b_1) (a_2, b_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + b_1 a_2) \quad \wedge \quad \frac{(a_1, b_1)}{(a_2, b_2)} = \left(\frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{(a_2^2 + b_2^2)}, \frac{b_1 a_2 - a_1 b_2}{(a_2^2 + b_2^2)} \right)$$

Esta asociación de un número complejo con una pareja de números inmediatamente nos lleva a imaginar un punto en un plano (complejo) en el cual la primera componente (horizontal) representa la parte real y la segunda componente (vertical) representa la parte imaginaria. De esta forma asociamos a un número complejo a un vector que une a ese punto (a, b) con el origen del plano complejo. Esta representación de

números complejos como vectores en el plano (complejo) de conoce con el nombre de Diagrama de Argand³ a pesar que no fue Jean Argand, sino Caspar Wessel⁴ el primero en proponerlo. Por cierto, esta interpretación fue tres veces redescubierta, primero por Caspar Wessel en 1799, luego por Jean Argand en 1806 y finalmente por Gauss⁵ en 1831.

De esta manera, como un recordatorio al plano real

$$z = x + iy \Leftrightarrow z = r(\cos(\theta) + i\operatorname{sen}(\theta)) \quad \text{con} \quad \begin{cases} r = \sqrt{zz^*} = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tan(\theta) = \frac{y}{x} \quad \text{donde } -\pi \leq \theta \leq \pi \end{cases}$$

La interpretación vectorial de números complejos permite que la suma de números complejos sea representada por la “regla del paralelogramo”. Mientras que los productos escalar y vectorial nos llevan a

$$z_1 \cdot z_2 = \operatorname{Re}(z_1 z_2^*) = \operatorname{Re}(z_1^* z_2) \quad \wedge \quad z_1 \times z_2 = \operatorname{Im}(z_1^* z_2) = -\operatorname{Im}(z_1 z_2^*)$$

Con esta interpretación tendremos

$$\begin{aligned} x = \operatorname{Re} z &\quad \Rightarrow \quad \text{componente real del vector } z \text{ o parte real de } z \\ y = \operatorname{Im} z &\quad \Rightarrow \quad \text{componente imaginaria del vector } z \text{ o parte imaginaria de } z \\ r = \sqrt{zz^*} = |z| &\quad \Rightarrow \quad \text{módulo, magnitud o valor absoluto de } z \\ \theta &\quad \Rightarrow \quad \text{ángulo polar o de fase del número complejo } z \end{aligned}$$

1.9.3. Fórmulas de Euler y De Moivre

Nos hemos tropezado con la expansión en Taylor⁶, esta serie permite expresar cualquier función infinitamente diferenciable alrededor de un punto x_0 como una serie infinita de potencias del argumento de la función. Esto es:

$$f(x) = 1 + \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_0} (x-x_0) + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2f(x)}{dx^2} \right|_{x=x_0} (x-x_0)^2 + \frac{1}{3!} \left. \frac{d^3f(x)}{dx^3} \right|_{x=x_0} (x-x_0)^3 + \dots$$

$$f(x) = C_n (x-x_0)^n, \quad \text{con } C_n = \frac{1}{n!} \left. \frac{d^n f(x)}{dx^n} \right|_{x=x_0} \quad \text{y donde } n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

³En honor a JEAN ROBERT ARGAND (Ginebra, Suiza, 18 Julio 1768; París, Francia 13 agosto 1822). Contador pero matemático aficionado, propuso esta interpretación de números complejos como vectores en un plano complejo en un libro autoeditado con sus reflexiones que se perdió y fue rescatado 7 años después, fecha a partir de la cual Argand comenzó a publicar en Matemáticas.

⁴CASPAR WESSEL (Vestby, Noruega 8 junio 1745; 25 marzo 1818, Copenhagen, Dinamarca) Matemático noruego que se dedicó principalmente al levantamiento topográfico de Noruega. Su trabajo sobre la interpretación de números complejos permaneció desconocido por casi 100 años.

⁵JOHANN CARL FRIEDRICH GAUSS (30 abril 1777, Brunswick, Alemania; 23 febrero 1855, Göttingen, Alemania). Uno de los matemáticos más geniales y precoces de la Historia. Desde los 7 años comenzó a mostrar sus condiciones de genialidad. Sus contribuciones en Astronomía y Matemáticas son múltiples y diversas.

⁶BROOK TAYLOR (18 agosto 1685, Edmonton, Inglaterra; 29 diciembre 1731, Londres, Inglaterra) Físico y Matemático inglés contemporáneo de Newton y Leibniz y junto con ellos participó profundamente en el desarrollo del Cálculo diferencial e integral. Además de sus aportes al estudio del magnetismo, capilaridad y termometría, desarrolló el área de diferencias finitas que hasta hoy utilizamos para cálculos en computación. Inventó la integración por partes y descubrió la serie que lleva su nombre.

con lo cual, si consideramos $x_0 = 0$, entonces podemos ver algunos desarrollos en series de funciones elementales

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{120}x^5 + \frac{1}{720}x^6 + \frac{1}{5040}x^7 + \dots$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^6 + \dots$$

$$\operatorname{sen}(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{5040}x^7 + \dots$$

Es fácil convencerse que la serie

$$e^{i\theta} = 1 + i\theta - \frac{1}{2}\theta^2 + \left(-\frac{1}{6}i\right)\theta^3 + \frac{1}{24}\theta^4 + \frac{1}{120}i\theta^5 - \frac{1}{720}\theta^6 + \left(-\frac{1}{5040}i\right)\theta^7 + \dots$$

puede reorganizarse como

$$e^{i\theta} = \underbrace{\left(1 - \frac{1}{2}\theta^2 + \frac{1}{24}\theta^4 - \frac{1}{720}\theta^6 + \dots\right)}_{\cos(\theta)} + i \underbrace{\left(\theta - \frac{1}{6}\theta^3 + \frac{1}{120}\theta^5 - \frac{1}{5040}\theta^7 + \dots\right)}_{\operatorname{sen}(\theta)}$$

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta),$$

esta relación se conoce como la relación de Euler⁷. Con lo cual ahora tenemos tres formas de representar un número complejo

$$z = x + iy \quad \Leftrightarrow \quad z = r(\cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta)) \quad \Leftrightarrow \quad z = re^{i\theta}.$$

La expresión $z = x + iy$ se conoce como forma cartesiana de representación de un número complejo, la forma $z = r(\cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta))$ será la forma trigonométrica o polar y la expresión $z = e^{i\theta}$ será la forma de Euler. Es importante notar una sutileza implícita en esta notación. La forma cartesiana representa unívocamente a un número complejo, mientras que la forma polar (y la de Euler), es ambigua

$$z = r(\cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta)) = r(\cos(\theta + 2n\pi) + i \operatorname{sen}(\theta + 2n\pi)), \quad (1.5)$$

es decir, existen varios valores del argumento que definen el mismo número complejo. Esto se considerará más adelante cuando tratemos las funciones de número complejos.

Las sumas de números complejos son más fácilmente planteables en su forma cartesiana. Mientras las multiplicación y división serán directas en la forma de Euler

$$\left. \begin{array}{l} z_1 = r_1 e^{i\theta_1} \\ z_2 = r_2 e^{i\theta_2} \end{array} \right\} \Rightarrow z_1 z_2 = e^{i\theta_1} e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1 + \theta_2)} = r_1 r_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)).$$

Más aún, si

$$z = x + iy \Rightarrow e^z = e^{(x+iy)} = e^x e^{iy} = e^x (\cos(y) + i \operatorname{sen}(y)),$$

⁷LEONHARD EULER (15 abril 1707, Basilea, Suiza; 18 septiembre 1783, San Petersburgo, Rusia). Uno de los matemáticos más prolíficos de todos los tiempos. Desarrolló inmensamente campos como la geometría analítica y trigonometría, siendo el primero que consideró el coseno y el seno como funciones. Hizo aportes significativos en el desarrollo del cálculo diferencial e integral así como también, astronomía, elasticidad y mecánica de medios continuos.

a partir de la relación o fórmula de Euler se puede demostrar la De Moivre⁸

$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta} \Leftrightarrow (\cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta))^n = \cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta), \quad \text{con } n \text{ entero.}$$

1.9.4. Algunas aplicaciones inmediatas

Presentaremos algunas aplicaciones inmediatas la fórmula de De Moivre en diferentes ámbitos.

Identidades trigonométricas

La primera de las aplicaciones de la fórmula de De Moivre es para construir identidades trigonométricas en las cuales se expresa el coseno, o el seno, de factores de un ángulo. Veamos las siguientes (nada triviales) identidades trigonométricas

$$\cos(3\theta) = 4 \cos^3(\theta) - 3 \cos(\theta) \quad \text{o} \quad \operatorname{sen}(3\theta) = 3 \operatorname{sen}(\theta) - 4 \operatorname{sen}^3(\theta),$$

para demostrar estas (y otras) identidades utilizamos la fórmula de De Moivre, es decir

$$\begin{aligned} \cos(3\theta) + i \operatorname{sen}(3\theta) &= (\cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta))^3 \\ &= \cos^3(\theta) - 3 \cos(\theta) \operatorname{sen}^2(\theta) + i (3 \cos^2(\theta) \operatorname{sen}(\theta) - \operatorname{sen}^3(\theta)), \end{aligned}$$

igualando ahora parte real e imaginaria tendremos

$$\begin{aligned} \cos(3\theta) &= \cos^3(\theta) - 3 \cos(\theta) \operatorname{sen}^2(\theta) \\ &= \cos^3(\theta) - 3 \cos(\theta) (1 - \cos^2(\theta)) = 4 \cos^3(\theta) - 3 \cos(\theta) \\ \operatorname{sen}(3\theta) &= 3 \cos^2(\theta) \operatorname{sen}(\theta) - \operatorname{sen}^3(\theta) \\ &= 3 (1 - \operatorname{sen}^2(\theta)) \operatorname{sen}(\theta) - \operatorname{sen}^3(\theta) = 3 \operatorname{sen}(\theta) - 4 \operatorname{sen}^3(\theta). \end{aligned}$$

El método puede extenderse a expresiones de senos y cosenos de $n\theta$.

Igualmente podemos desarrollar un método para encontrar expresiones de potencias de funciones trigonométricas en término de funciones de factores de ángulo del tipo $(\cos(\theta))^n = F(\cos(n\theta), \operatorname{sen}(n\theta))$. Para empezar, supongamos que tenemos un número complejo de módulo 1, de tal forma que

$$z = e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta) \Rightarrow \begin{cases} z^n + \frac{1}{z^n} = 2 \cos(n\theta) \\ z^n - \frac{1}{z^n} = 2i \operatorname{sen}(n\theta) \end{cases}$$

Estas identidades surgen de manera inmediata de

$$\begin{aligned} z^n + \frac{1}{z^n} &= (\cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta))^n + (\cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta))^{-n} = (\cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta)) + (\cos(-n\theta) + i \operatorname{sen}(-n\theta)) \\ &= \cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta) + \cos(n\theta) - i \operatorname{sen}(n\theta) = 2 \cos(n\theta), \end{aligned}$$

igualmente puede demostrarse la segunda de las afirmaciones anteriores.

⁸ABRAHAM DE MOIVRE (26 mayo 1667 in Vitry-le-François, Francia; 27 noviembre 1754, Londres Inglaterra) Matemático francés que tuvo que emigrar a Inglaterra por razones religiosas. Contemporaneo de Newton, Leibniz y Halley, fue pionero con sus contribuciones en geometría analítica y teoría de probabilidades.

Ahora bien, supongamos además que $n = 1$, con lo cual se cumple que

$$z + \frac{1}{z} = e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2 \cos(\theta) \quad \text{y} \quad z - \frac{1}{z} = e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i \operatorname{sen}(\theta),$$

que también lo sabíamos desde la más temprana edad de nuestros cursos de bachillerato. Ahora bien, lo que quizá no sabíamos en ese entonces (y quizá ahora tampoco) es que a partir de aquí podemos construir, por ejemplo:

$$\cos^5(\theta) = \frac{1}{2^5} \left(z + \frac{1}{z} \right)^5 = \frac{1}{2^5} \left[\left(z^5 + \frac{1}{z^5} \right) + \left(5z^3 + \frac{5}{z^3} \right) + \left(10z + \frac{10}{z} \right) \right],$$

es decir

$$\cos^5(\theta) = \frac{1}{2^5} [2 \cos(5\theta) + 10 \cos(3\theta) + 20 \cos(\theta)],$$

de la misma manera se puede proceder con otras potencias y con potencias de la función seno.

Raíces de polinomios

La fórmula de De Moivre nos puede ayudar para encontrar raíces de polinomios. Supongamos, para empezar, que queremos encontrar las n raíces de la ecuación $z^n = 1$. Para ello procedemos con el siguiente artificio

$$z^n = 1 = \cos(2\pi k) + i \operatorname{sen}(2\pi k) = e^{i(2\pi k)}, \quad \text{donde } k = 0, 1, 2, \dots$$

con lo cual las n raíces de la ecuación $z^n = 1$ serán

$$z^n = 1 \Rightarrow z = e^{i\left(\frac{2\pi k}{n}\right)}$$

↓

$$\overbrace{z_0 = 1; \quad z_1 = e^{2\pi i\left(\frac{1}{n}\right)}; \quad z_2 = e^{2\pi i\left(\frac{2}{n}\right)}; \quad z_3 = e^{2\pi i\left(\frac{3}{n}\right)}; \dots \quad z_{n-2} = e^{2\pi i\left(\frac{n-2}{n}\right)}; \quad z_{n-1} = e^{2\pi i\left(\frac{n-1}{n}\right)}}^{\text{Raíces de } z^n = 1}$$

es decir, n raíces corresponderán a los n valores de $k = 0, 1, 2, \dots, n-2, n-1$. Mayores valores de k no proveen nuevas raíces.

Estas propiedades pueden extenderse a raíces de polinomios. Supongamos la siguiente ecuación polinómica con sus raíces:

$$z^5 - z^4 + 2z - 2 = 0 \Rightarrow (z^4 + 2)(z - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} z^4 + 2 = 0 \Rightarrow z^4 = -2 \\ z - 1 = 0 \Rightarrow z = 1 \end{cases}$$

una vez más

$$z^4 = -2(1) = -2 \left(e^{i(2\pi k)} \right) \Rightarrow z = \left[-2 \left(e^{i(2\pi k)} \right) \right]^{1/4} = (-2)^{1/4} e^{i\left(\frac{2\pi k}{4}\right)} = \frac{1}{2} (1+i) 2^{3/4} e^{i\left(\frac{2\pi k}{4}\right)}$$

donde hemos utilizado el hecho de que: $(-1)^{1/4} = i^{1/2} = \frac{\sqrt{2}}{2} (1+i)$. Por lo tanto:

$$z_0 = \frac{1}{2} (1+i) 2^{3/4}, \quad z_1 = \frac{1}{2} (1+i) 2^{3/4} e^{i\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{i}{2} (1+i) 2^{3/4},$$

$$z_2 = \frac{1}{2} (1+i) 2^{3/4} e^{i(\pi)} = -\frac{1}{2} (1+i) 2^{3/4}, \quad z_3 = \frac{1}{2} (1+i) 2^{3/4} e^{i\left(\frac{3\pi}{2}\right)} = -\frac{i}{2} (1+i) 2^{3/4},$$

por lo tanto, la ecuación $z^5 - z^4 + 2z - 2 = 0$, tendrá las siguientes cinco raíces:

$$z_0 = \frac{1}{2}(1+i)2^{3/4}, \quad z_1 = -\frac{1}{2}(1-i)2^{3/4}, \quad z_2 = -\frac{1}{2}(1+i)2^{3/4}, \quad z_3 = \frac{1}{2}(1-i)2^{3/4}, \quad z_4 = 1.$$

Una afirmación que nos han dicho, y que quizá no sepamos de dónde viene, es que *si un polinomio con coeficientes reales tiene raíces complejas, ellas serán complejas conjugadas unas de otras*. Vale decir, si $z^5 - z^4 + 2z - 2 = 0$ tiene como raíz $z_0 = \frac{1}{2}(1+i)2^{3/4}$, también tendrá como raíz $z_3 = \frac{1}{2}(1-i)2^{3/4}$ y $z_0 = z_3^*$.

Esta afirmación se prueba de forma general si suponemos que tenemos la siguiente ecuación

$$a_i z^i = 0, \quad \text{con } i = 0, 1, 2, \dots, n-1, n \Rightarrow a_0 + a_1 z + a_2 z^2 \dots + a_{n-1} z^{n-1} + a_n z^n = 0,$$

donde los coeficientes $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ los suponemos reales, esto es: $a_i = a_i^*$ para todos los valores del índice i .

Al tomar el complejo conjugado nos queda:

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 \dots + a_{n-1} z^{n-1} + a_n z^n = 0 \iff a_0^* + a_1^* z^* + a_2^* (z^*)^2 \dots + a_{n-1}^* (z^*)^{n-1} + a_n^* (z^*)^n = 0,$$

como los coeficientes son reales tenemos que

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 \dots + a_{n-1} z^{n-1} + a_n z^n = 0 \iff a_0 + a_1 z^* + a_2 (z^*)^2 \dots + a_{n-1} (z^*)^{n-1} + a_n (z^*)^n = 0,$$

esto nos dice que si z es solución también lo será z^* ya que la ecuación es la misma por tener los mismos coeficientes (reales).

Ahora consideremos el siguiente polinomio complejo

$$P(z) = z^6 - z^5 + 4z^4 - 6z^3 + 2z^2 - 8z + 8 = 0.$$

Si por algún método comprobamos que $(z^3 - 2)$ es uno de sus factores, entonces podremos encontrar las raíces del polinomio $P(z)$. Veamos, claramente si $(z^3 - 2)$ es un factor podemos expresar

$$P(z) = z^6 - z^5 + 4z^4 - 6z^3 + 2z^2 - 8z + 8 = (z^3 - 2)(z^3 - z^2 + 4z - 4) = (z^3 - 2)(z - 1)(z^2 + 4),$$

con lo cual, como z es complejo, hay que tener cuidado con las raíces encubiertas

$$z^6 - z^5 + 4z^4 - 6z^3 + 2z^2 - 8z + 8 = 0 \Rightarrow (z^3 - 2)(z - 1)(z^2 + 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} z^3 = 2 \\ z = 1 \\ z^2 = -4 \end{cases}$$

Por un lado: $z^2 = -4 \Rightarrow z = \pm 2i$.

Y por el otro:

$$z^3 = 2 = 2 \left(e^{i(2\pi k)} \right) \Rightarrow z = \left[2 \left(e^{i(2\pi k)} \right) \right]^{1/3} = 2^{1/3} e^{i(\frac{2\pi k}{3})}.$$

Por lo tanto:

$$z_0 = 2^{1/3}, \quad z_1 = 2^{1/3} e^{i(\frac{2\pi}{3})} = -\frac{2^{1/3}}{2} [1 - \sqrt{3}i], \quad z_2 = 2^{1/3} e^{i(\frac{4\pi}{3})} = -\frac{2^{1/3}}{2} [1 + \sqrt{3}i].$$

La ecuación $z^6 - z^5 + 4z^4 - 6z^3 + 2z^2 - 8z + 8 = 0$, tendrá las siguientes seis raíces:

$$z = \sqrt[3]{2}, \quad z = -\frac{1}{\sqrt[3]{4}} [1 \pm \sqrt{3}i], \quad z = 1, \quad z = \pm 2i.$$

Logaritmos y potencias de números complejos

Definamos la siguiente función

$$z = e^{i\theta} \iff \text{Ln}(z) = i\theta,$$

donde Ln representa el logaritmo natural del número complejo z . Nótese que hemos utilizado Ln en lugar de tradicional \ln y la razón es la ambigüedad implícita en la notación de Euler, vale decir

$$z = re^{i\theta} \iff \text{Ln}(z) = \ln(r) + i(\theta + 2n\pi) = \ln(r) + i\theta,$$

en otras palabras, $\text{Ln}(z)$ no es función por el hecho de ser multivaluada. Se supera esta dificultad cuando se restringe el argumento $-\pi < \theta \leq \pi$ y esta se conoce como *el valor principal de la función*

Por ejemplo, al evaluar

$$\text{Ln}(-3i) = \text{Ln}\left[3e^{i\left(-\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)}\right] = \ln(3) + i\left(-\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) \quad \text{con } n = 0, 1, 2, \dots$$

decimos que el valor principal del $\text{Ln}(-3i)$ será $\ln(3) - i\frac{\pi}{2}$.

Con la misma intuición se procede con las potencias de números complejos. Si queremos evaluar $z = i^{-5i}$ tendremos que proceder como sigue

$$z = i^{-5i} \Rightarrow \text{Ln}(z) = \text{Ln}(i^{-5i}) = -5i \text{Ln}(i) = -5i \text{Ln}\left[e^{i\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)}\right] = 5\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right),$$

con lo cual $z = i^{-5i}$ es un número real!

Para finalizar consideremos otro par de casos de potencias y logaritmos: i^i y $\text{Ln}\left[\{\sqrt{3} + i\}^3\right]$.

Entonces

$$i^i = \left[e^{i\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)}\right]^i = e^{i^2\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)} = e^{-\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)},$$

y para

$$\text{Ln}\left[\{\sqrt{3} + i\}^3\right] = 3 \text{Ln}\left[2e^{i\left(\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)}\right] = 3\left[\ln(2) + i\left(\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + 2n\pi\right)\right] = \ln(8) + i\left(\frac{\pi}{2} + 6n\pi\right).$$

Ejercicios

1. Demuestre que

a)

$$\cos(3\alpha) = \cos^3(\alpha) - 3\cos(\alpha)\sin^2(\alpha)$$

b)

$$\sin(3\alpha) = 3\cos^2(\alpha)\sin(\alpha) - \sin^3(\alpha)$$

2. Encuentre las raíces de

a) $2i$

b) $1 - \sqrt{3}i$

c) $(-1)^{1/3}$

d) $8^{1/6}$

e) $(-8 - 8\sqrt{3}i)^{1/4}$

1.10. Algunos ejemplos resueltos

1. Hemos definido como la posición, \mathbf{R} , del centro de masa para un sistema de N partículas como

$$\mathbf{R} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i}{\sum_{j=1}^N m_j}$$

donde \mathbf{r}_i corresponde con la posición de la i -ésima partícula.

Determine la posición del centro de masa para un sistema de tres masas, $m_i = 1, 2, 3$, colocadas en los vértices de un triángulo equilátero de lado $l = 2$.

Solución: Al colocar el origen de coordenadas en uno de los vértices y uno de los ejes de coordenadas sobre uno de los lados, entonces

$$\mathbf{R} = \frac{\sum_{i=1}^3 m_i \mathbf{r}_i}{\sum_{j=1}^3 m_j} = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 + m_3 \mathbf{r}_3}{M_T} = \frac{1 \cdot 2\mathbf{i} + 3 \cdot (\mathbf{i} + \sqrt{3}\mathbf{j})}{6} = \frac{5}{6}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{j}$$

2. Dada una base ortonormal $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ y los siguientes vectores

$$\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}, \quad \mathbf{b} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}, \quad \mathbf{c} = \mathbf{i} - \mathbf{k}$$

a) Comprobar si $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ forman una base.

Solución: Para que los vectores formen una base tienen que ser linealmente independientes. Esto es $\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c} = \mathbf{0} \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$, con lo cual

$$\alpha(3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}) + \beta(3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}) + \gamma(\mathbf{i} - \mathbf{k}) = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{cases} 3\alpha + 3\beta + \gamma = 0 \\ 2\alpha - 2\beta = 0 \\ \alpha + \beta - \gamma = 0 \end{cases}$$

y al resolver el sistema se obtiene: $\alpha = \beta = \gamma = 0$ con lo cual se demuestra que son linealmente independientes.

Otra manera de resolverlo es mostrar que: $\mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \neq 0$ y efectivamente

$$\mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0.$$

b) Si $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ forman una base, exprese $\mathbf{d} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}$, $\mathbf{e} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$ y $\mathbf{f} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ en término de esa base $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$. De lo contrario, construya una base como $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b}\}$ y exprese los vectores $\{\mathbf{d}, \mathbf{e}, \mathbf{f}\}$ en término de esa nueva base.

Solución: Como forman base expresamos los vectores en esos términos. Esto es

$$\mathbf{i} + 2\mathbf{j} = \alpha(3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}) + \beta(3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}) + \gamma(\mathbf{i} - \mathbf{k}) \Rightarrow \begin{cases} 3\alpha + 3\beta + \gamma = 1 \\ 2\alpha - 2\beta = 2 \\ \alpha + \beta - \gamma = 0 \end{cases}$$

resolviendo tendremos que $\mathbf{d} = \frac{5}{8}\mathbf{a} - \frac{3}{8}\mathbf{b} + \frac{1}{4}\mathbf{c}$. Seguidamente

$$3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} = \alpha(3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}) + \beta(3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}) + \gamma(\mathbf{i} - \mathbf{k}) \Rightarrow \begin{cases} 3\alpha + 3\beta + \gamma = 3 \\ 2\alpha - 2\beta = -2 \\ \alpha + \beta - \gamma = 0 \end{cases}$$

resolviendo tendremos que $\mathbf{e} = -\frac{1}{8}\mathbf{a} + \frac{7}{8}\mathbf{b} + \frac{3}{4}\mathbf{c}$

Ahora bien

$$\mathbf{f} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} \equiv (3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}) \times (3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}) \equiv \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 4\mathbf{i} - 12\mathbf{k}$$

con lo cual

$$4\mathbf{i} - 12\mathbf{k} = \alpha(3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}) + \beta(3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}) + \gamma(\mathbf{i} - \mathbf{k}) \Rightarrow \begin{cases} 3\alpha + 3\beta + \gamma = 4 \\ 2\alpha - 2\beta = 0 \\ \alpha + \beta - \gamma = -12 \end{cases}$$

y finalmente $\mathbf{f} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{a} - \mathbf{b} + 10\mathbf{c}$.

3. Utilizando la notación de índices demostrar que para cualquier trío de vectores $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ se cumple que $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) + \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0$.

Solución: En notación de índices

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) + \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \epsilon^{lmi} a_m \epsilon_{ijk} b^j c^k + \epsilon^{lmi} b_m \epsilon_{ijk} c^j a^k + \epsilon^{lmi} c_m \epsilon_{ijk} a^j b^k$$

con lo cual, arreglando

$$\epsilon^{lmi} \epsilon_{ijk} a_m b^j c^k + \epsilon^{lmi} \epsilon_{ijk} b_m c^j a^k + \epsilon^{lmi} \epsilon_{ijk} c_m a^j b^k = (\delta_j^l \delta_k^m - \delta_j^m \delta_k^l) a_m b^j c^k + (\delta_j^l \delta_k^m - \delta_j^m \delta_k^l) b_m c^j a^k + (\delta_j^l \delta_k^m - \delta_j^m \delta_k^l) c_m a^j b^k$$

y ahora desarrollando los productos de las δ 's, e indentificando término a término, notamos que se anula

$$\left(\underbrace{a_k b^l c^k}_{I} - \underbrace{a_k b^k c^l}_{II} \right) + \left(\underbrace{b_k c^l a^k}_{II} - \underbrace{b_k c^k a^l}_{III} \right) + \left(\underbrace{c_k a^l b^k}_{III} - \underbrace{c_k a^k b^l}_{I} \right) = 0.$$

4. Una partícula se mueve a lo largo de una curva descrita por

$$x(t) = 3t^2 \quad y(t) = 4t^3 - t \quad z(t) = t$$

- a) Encuentre las expresiones para los vectores: posición, velocidad y aceleración de esa partícula.

Solución:

$$\mathbf{r}(t) = 3t^2\mathbf{i} + (4t^3 - t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}, \quad \mathbf{v} = 6t\mathbf{i} + (12t^2 - 1)\mathbf{j} + \mathbf{k}, \quad \mathbf{a} = 6\mathbf{i} + 24t\mathbf{j}.$$

- b) Encuentre las expresiones, más generales, de los vectores tangentes y perpendiculares a todo punto de la trayectoria de la partícula.

Solución: Vector tangente a todo punto de la trayectoria es el vector velocidad

$$\mathbf{v} = 6t\mathbf{i} + (12t^2 - 1)\mathbf{j} + \mathbf{k},$$

El perpendicular a todo punto, será un vector $\mathbf{b} = b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}$, tal que

$$(6t\mathbf{i} + (12t^2 - 1)\mathbf{j} + \mathbf{k}) \cdot (b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}) = 6tb_x + (12t^2 - 1)b_y + b_z = 0,$$

con lo cual

$$\mathbf{b} = b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} - (6tb_x + (12t^2 - 1)b_y)\mathbf{k}.$$

5. El campo de fuerzas del oscilador anarmónico anisótropo bidimensional se escribe como

$$\mathbf{F} = -k_1x^2\mathbf{i} + k_2y\mathbf{j}. \quad (1.6)$$

Encuentre el trabajo realizado, $\int_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{F}$ a lo largo de las siguientes trayectorias

a) $(1, 1) \rightarrow (4, 1) \rightarrow (4, 4)$

Solución:

$$\int_{(1,1)}^{(4,1)} (\mathbf{i}dx) \cdot (-k_1x^2\mathbf{i} + k_2\mathbf{j}) + \int_{(4,1)}^{(4,4)} (\mathbf{j}dy) \cdot (-k_1x^2\mathbf{i} + k_2y\mathbf{j}) = -21k_1 + \frac{15k_2}{2}$$

b) $(1, 1) \rightarrow (1, 4) \rightarrow (4, 4)$

Solución:

$$\int_{(1,1)}^{(1,4)} (\mathbf{j}dy) \cdot (-k_1x^2\mathbf{i} + k_2y\mathbf{j}) + \int_{(1,4)}^{(4,4)} (\mathbf{i}dx) \cdot (-k_1x^2\mathbf{i} + k_2y\mathbf{j}) = -21k_1 + \frac{15k_2}{2}$$

c) $(1, 1) \rightarrow (4, 4)$ para $x = y$

Solución:

$$\int_{(1,1)}^{(4,4)} (\mathbf{i}dx + \mathbf{j}dy) \cdot (-k_1x^2\mathbf{i} + k_2y\mathbf{j}) = \int_{(1,1)}^{(4,4)} (-k_1x^2 + k_2x)dx = -21k_1 + \frac{15k_2}{2}$$

6. Dados los siguientes puntos en el espacio $(1, 0, 3); (2, -1, 0); (0, -1, 1); (-1, 0, 1)$.

a) Considere los tres primeros puntos. ¿Estos tres puntos son coplanares? ¿por qué? Explique.

Solución: Tres puntos en el espacio definen un plano, por lo tanto siempre serán coplanares.

b) Encuentre el área del triángulo que tiene por vértices esos tres puntos.

Solución: Para ello seleccionamos uno de los puntos como un vértice privilegiado (digamos $(2, -1, 0)$) respecto al cual construiremos dos vectores que representan dos de los lados del triángulo. Esto es

$$\mathbf{a} = (1, 0, 3) - (2, -1, 0) \leftrightarrow \mathbf{a} = -\mathbf{i} + \mathbf{j} + 3\mathbf{k},$$

y

$$\mathbf{b} = (0, -1, 1) - (2, -1, 0) \leftrightarrow \mathbf{b} = -2\mathbf{i} + \mathbf{k},$$

con lo cual, el área del triángulo será la mitad del área del paralelogramo que tiene por lados estos dos vectores. Es decir

$$A = \frac{1}{2}|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| \Rightarrow \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 2\mathbf{k} \Rightarrow A = \frac{1}{2}|\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 2\mathbf{k}| = \frac{\sqrt{30}}{2}.$$

c) Encuentre la ecuación del plano que los contiene

Solución: La ecuación del plano vendrá dada por

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \cdot ((\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \times (\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1)) = 0,$$

donde

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, \quad \mathbf{r}_1 = \mathbf{i} + 3\mathbf{k}, \quad \mathbf{r}_2 = 2\mathbf{i} - \mathbf{j}, \quad \mathbf{r}_3 = -\mathbf{j} + \mathbf{k},$$

con lo cual la ecuación del plano queda como

$$\begin{vmatrix} (x-1) & y & (z-3) \\ 1 & -1 & -3 \\ -1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -(x-1) + 5y - 2(z-3) = 0 \Rightarrow x - 5y + 2z = 7.$$

- d) Considere los cuatro puntos ¿Estos cuatro puntos son coplanares? ¿por qué? De NO ser coplanares, encuentre la distancia del cuarto punto al posible plano que contiene a los otros tres.

Solución: Para verificar si el cuarto punto está en el plano, verificamos si cumple la ecuación que lo define

$$(-1) - 5(0) + 2(1) \neq 7,$$

los cuatro puntos no son coplanares. Para calcular la distancia del cuarto punto al plano se construye el vector unitario normal al plano

$$\hat{\mathbf{n}}_P = \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|} = \frac{1}{\sqrt{30}} (\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 2\mathbf{k}), \quad d = \hat{\mathbf{n}}_P \cdot \mathbf{c} = \frac{1}{\sqrt{30}} (\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 2\mathbf{k}) \cdot (-3\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}),$$

con lo cual la distancia al cuarto punto será

$$d = \hat{\mathbf{n}}_P \cdot \mathbf{c} = \frac{1}{\sqrt{30}} (\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 2\mathbf{k}) \cdot (-3\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}) = -\frac{6}{\sqrt{30}}.$$

7. Considere los siguientes tres vectores

$$\mathbf{w}_1 = \mathbf{i} + 3\mathbf{k}, \quad \mathbf{w}_2 = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}, \quad \mathbf{w}_3 = -\mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

- a) ¿Forman una base para \mathbb{R}^3 ? Explique detalladamente

Solución: Son linealmente independientes, estos es

$$\alpha \mathbf{w}_1 + \beta \mathbf{w}_2 + \gamma \mathbf{w}_3 = \mathbf{0} \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0,$$

que se comprueba directamente al resolver

$$\begin{array}{rcl} \alpha & +2\beta & = 0 \\ & -3\beta & -\gamma = 0 \\ 3\alpha & & +\gamma = 0 \end{array}$$

- b) Si es que forman base, exprese el vector $\mathbf{a} = \mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ en la posible base $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$

Solución: Como son linealmente independientes, forman base, con lo cual cualquier vector puede ser expresado como combinación lineal de estos tres. Eso es:

$$\mathbf{a} = \alpha \mathbf{w}_1 + \beta \mathbf{w}_2 + \gamma \mathbf{w}_3 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \alpha & +2\beta & = 1 \\ & -3\beta & -\gamma = -3 \\ 3\alpha & & +\gamma = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha = \frac{1}{3} \\ \beta = \frac{1}{3} \\ \gamma = 2 \end{array} \right.$$

8. Utilizando la notación de índices muestre si se cumple la siguiente identidad

$$\nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{a} (\nabla \cdot \mathbf{b}) - \mathbf{b} (\nabla \cdot \mathbf{a}) + (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{b}.$$

Solución:

$$\nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \epsilon^{ijk} \partial_j (\epsilon_{klm} a^l b^m) = (\delta_l^i \delta_m^j - \delta_m^i \delta_l^j) \partial_j (a^l b^m) = \partial_m (a^i b^m) - \partial_l (a^l b^i),$$

expandiendo la derivada

$$\nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = b^m \partial_m (a^i) + a^i \partial_m (b^m) - b^i \partial_l (a^l) - a^l \partial_l (b^i) \equiv (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{a} + (\nabla \cdot \mathbf{b}) \mathbf{a} - (\nabla \cdot \mathbf{a}) \mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{b}.$$

9. La trayectoria de un punto en el plano vista por un observador 1 es

$$\mathbf{r}_1(t) = 5 \cos(3t^2) \mathbf{i} + 5 \sin(3t^2) \mathbf{j}.$$

a) Exprese las aceleraciones radiales y tangenciales de esta partícula.

Solución: Es claro que la partícula describe un movimiento circular donde $\theta(t) = 3t^2$

$$\mathbf{r}(t) = 5 \hat{\mathbf{u}}_r \Rightarrow \mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = 5 \frac{d\theta(t)}{dt} \hat{\mathbf{u}}_\theta = 30t \hat{\mathbf{u}}_\theta \Rightarrow \mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = 30 \hat{\mathbf{u}}_\theta - 30t \hat{\mathbf{u}}_r.$$

b) Considere ahora un segundo observador, el cual describe una trayectoria respecto al primero representada por

$$\mathbf{r}_{21}(t) = (t^3 - 4t) \mathbf{i} + (t^2 + 4t) \mathbf{j}.$$

Encuentre las expresiones para los vectores posición, velocidad y aceleración de la partícula medidos respecto al segundo observador.

Solución: La trayectoria de la partícula respecto al segundo observador será

$$\mathbf{r}_2(t) = \mathbf{r}_1(t) - \mathbf{r}_{21}(t) = 5 \cos(3t^2) \mathbf{i} + 5 \sin(3t^2) \mathbf{j} - ((t^3 - 4t) \mathbf{i} + (t^2 + 4t) \mathbf{j}),$$

con lo cual

$$\mathbf{r}_2(t) = (5 \cos(3t^2) - (t^3 - 4t)) \mathbf{i} + (5 \sin(3t^2) - (t^2 + 4t)) \mathbf{j},$$

entonces

$$\mathbf{v}_2(t) = \frac{d\mathbf{r}_2(t)}{dt} = (30t \cos(3t^2) - (3t^2 - 4)) \mathbf{i} + (30t \sin(3t^2) - (2t + 4)) \mathbf{j},$$

y

$$\mathbf{a}_2(t) = \frac{d\mathbf{v}_2(t)}{dt} = (30 \cos(3t^2) - 180t \sin(3t^2) - 6t) \mathbf{i} + (30 \sin(3t^2) - 180t^2 \cos(3t^2) - 2) \mathbf{j}.$$

1.11. Ejercicios propuestos

1. Auguste Bravais⁹ se dio cuenta que replicando un arreglo geométrico muy simple, se puede describir una estructura cristalina. Dicho de otro modo, que conociendo una celda simple, podemos conocer la estructura cristalina. Esto es que las posiciones de los átomos en una red cristalina puede ser descrita por un vector $\mathbf{R} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = n^1\mathbf{a}_1 + n^2\mathbf{a}_2 + n^3\mathbf{a}_3 = n^i\mathbf{a}_i$ donde los \mathbf{a}_i son vectores no coplanares (vectores primitivos o, simplemente en nuestro lenguaje, vectores base). Los n^i son números enteros (negativos, cero o positivos). La posición de cada átomo de un cristal puede ser descrita como reescalamientos (discretos) de este vector genérico o, de manera más precisa, la traslación del origen de coordenadas por un vector. Ese concepto se conoce como redes de Bravais¹⁰. En cada red puede haber varios vectores primitivos¹¹. Se puede definir la *celda primitiva* como la estructura mínima que replicada reproduce todo el cristal. Vale decir la estructura cristalina es invariante bajo traslaciones espaciales del tipo $\mathbf{R}' = \mathbf{R} + \mathbf{T}$ con $\mathbf{T} = m^i\mathbf{a}_i$.

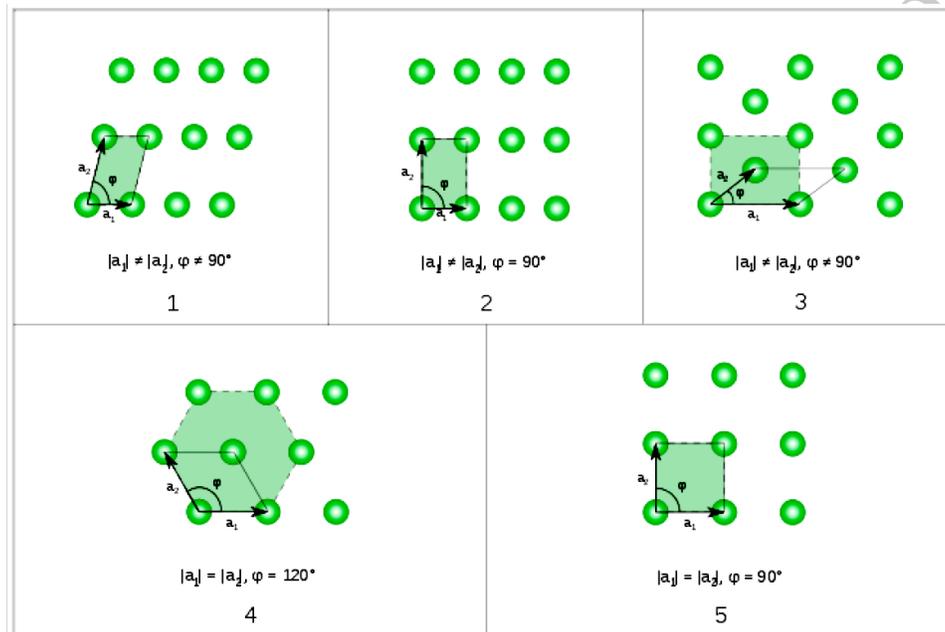


Figura 1.7: Las 5 redes de Bravais bidimensionales fundamentales: 1 Oblicuas, 2 rectangular, 3 rectangular centrada (rómbrica), 4 hexagonal, y 5 cuadrada. Figura tomada de http://en.wikipedia.org/wiki/Bravais_lattice

- a) **Redes de Bravais bidimensionales.** Tal y como muestra la Figura 1.7 existen 5 tipos distintos de redes de Bravais bidimensionales.
 - 1) Dada la red bidimensional de la Figura 1.8 encuentre todos los posibles vectores primitivos y celdas primitivas asociadas.

⁹http://en.wikipedia.org/wiki/Auguste_Bravais

¹⁰http://en.wikipedia.org/wiki/Bravais_lattice

¹¹<http://www.engr.sjsu.edu/rkwok/Phys175A/Chapter%201.pdf>

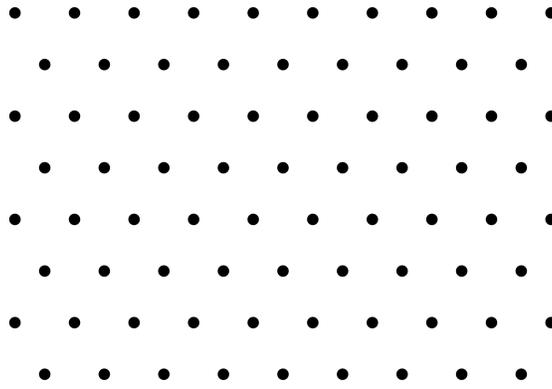


Figura 1.8: Red cristalina bidimensional. Encuentre todos los posibles vectores y celdas primitivas asociadas

- 2) La humanidad ha estado seducida por la geometría desde que empezó a representar figuras. A partir de las cuatro imágenes que se ilustran en la Figura 1.9, encuentre todos los posibles vectores y celdas primitivas asociadas.
 - 3) Maurits Cornelis Escher¹² fue un fenomenal dibujante holandés, quien se interesó por las simetrías de los grupos de imágenes de papel tapiz. Berend, hermano de Maurits, era cristalógrafo y le mostró la belleza de las simetrías de la naturaleza. En las cuatro obras del género de Teselado¹³ de M.C. Escher, presentadas en la Fig 1.10 encuentre todos los posibles vectores y celdas primitivas asociadas.
- b) **Redes de Bravais Tridimensionales.** Este tipo de redes complica un poco más el escenario. Se puede demostrar que existen 14 de estas redes, tal y como se muestran en la Figura 1.11
- Muestre que los volúmenes de ocupación atómica, para los sistemas Monoclínico, Triclínico, Ortorómbico, Tetragonal, Romboédrico, exagonal y cúbico, corresponden a las expresiones que se muestran en la Figura 1.11.
 - El sistema cúbico, el más simple, corresponde a un sistema con un único parámetro de red $a = |\mathbf{a}|$, ya que $\mathbf{a} = \mathbf{b} = \mathbf{c}$. Además, una posible descripción, para el caso más simple, es $\mathbf{a} = i$; $\mathbf{b} = j$; $\mathbf{c} = k$, los tres vectores cartesianos ortogonales. Existen otros sistemas que también están asociados al cúbico. Estos son el sistema cúbico cara centrada (*fcc* por sus siglas en inglés) y cúbico cuerpo centrado (*bcc*). En el primero existen átomos en el centro de cada una de las caras del cubo definido por la tríada, $\mathbf{a} = \mathbf{b} = \mathbf{c}$. En el sistema *fcc* se añade un átomo la centro del cubo simple.
 - 1) Muestre que un sistema *bcc* también puede ser descrito por los vectores primitivos: $\mathbf{a} = a\mathbf{i}$, $\mathbf{b} = a\mathbf{j}$ y $\mathbf{c} = a(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})/2$. Dibuje la celda primitiva y calcule su volumen.
 - 2) Muestre que un sistema *bcc* también puede ser descrito por los vectores primitivos: $\mathbf{a} = a(\mathbf{j} + \mathbf{k} - \mathbf{i})/2$, $\mathbf{b} = a(\mathbf{k} + \mathbf{i} - \mathbf{j})/2$ y $\mathbf{c} = a(\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k})/2$. Dibuje la celda primitiva y calcule su volumen.
 - 3) Muestre que un sistema *fcc* también puede ser descrito por los vectores primitivos: $\mathbf{a} = a(\mathbf{j} + \mathbf{k})/2$, $\mathbf{b} = a(\mathbf{i} + \mathbf{k})/2$ y $\mathbf{c} = a(\mathbf{i} + \mathbf{j})/2$. Otra vez, dibuje la celda primitiva y calcule su volumen.

¹²http://en.wikipedia.org/wiki/M._C._Escher

¹³<http://en.wikipedia.org/wiki/Tessellation>

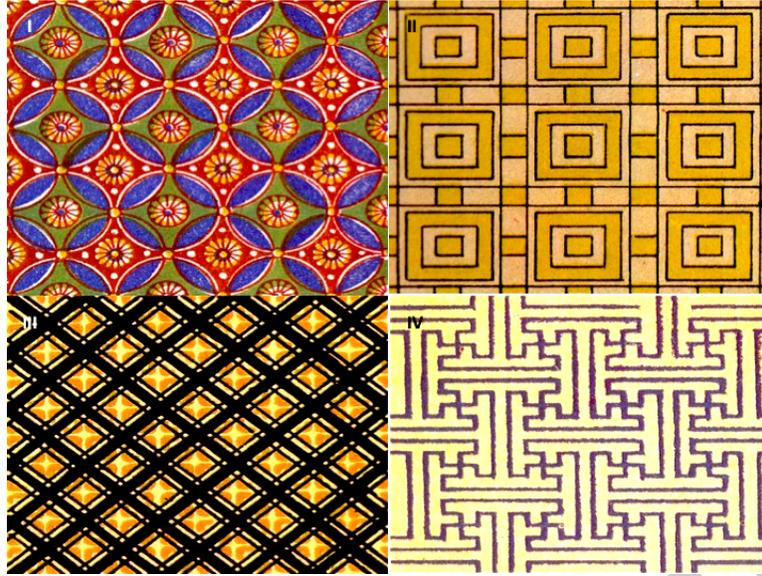


Figura 1.9: Cuatro detalles geométricos. Cuadrante I: Mural egipcio. Cuadrante II: Mural Mural Asirio. Cuadrante III: Tejido Tahití. Cuadrante IV: Ilustración en pieza de porcelana china. Tomado de http://en.wikipedia.org/wiki/Wallpaper_group

- Se puede definir la red recíproca como

$$\mathbf{a}' = \frac{\mathbf{b} \times \mathbf{c}}{\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})}; \quad \mathbf{b}' = \frac{\mathbf{c} \times \mathbf{a}}{\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})}; \quad \text{y} \quad \mathbf{c}' = \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}{\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})};$$

De esta manera es claro que, por construcción, $\mathbf{a}' \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a}' \cdot \mathbf{c} = 0$ y además $\mathbf{a}' \cdot \mathbf{a} = 1$. Con lo cual podemos generalizarlo como $\hat{\mathbf{e}}^{i'} \cdot \hat{\mathbf{e}}_j = \delta_j^{i'}$. Exprese los vectores y las celdas recíprocas para los sistemas cúbico simple, y los distintos *bcc* y *fcc*. Calcule además el volumen de cada celda recíproca.

2. Considerando que

- $\mathbf{r} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k} = x^m \hat{\mathbf{e}}_m$,
- $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathbf{A}(x, y, z) = A^i(x, y, z) \mathbf{e}_i$ y $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mathbf{B}(x, y, z) = B^i(x, y, z) \hat{\mathbf{e}}_i$
- $\phi = \phi(\mathbf{r}) = \phi(x, y, z)$ y $\psi = \psi(\mathbf{r}) = \psi(x, y, z)$

usando la notación de índices e inspirándose en las secciones 1.6.3, 1.8.5 y 1.10, muestre las siguientes identidades vectoriales

- $\nabla(\phi\psi) = \phi\nabla\psi + \psi\nabla\phi$
- $\nabla \cdot (\phi\mathbf{A}) = \phi\nabla \cdot \mathbf{A} + (\nabla\phi) \cdot \mathbf{A}$
- $\nabla \times \nabla\phi = 0$, también $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A})$ y ¿qué puede decir de $\nabla \times (\nabla \cdot \mathbf{A})$?
- $\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B})$
- $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$

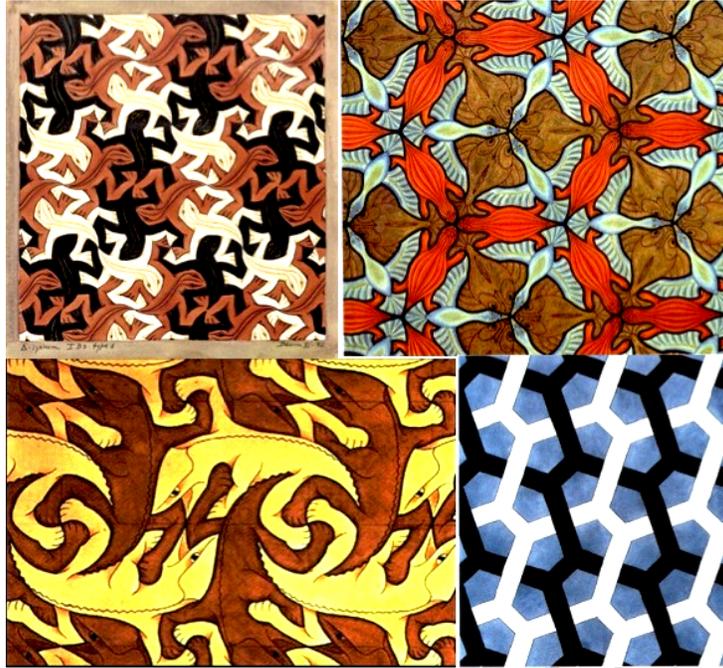


Figura 1.10: Teselados de M.C. Escher, tomados de <http://www.wikipaintings.org/en/paintings-by-genre/tessellation?firstArtist=m-c-escher#artist-m-c-escher>

3. Una partícula se mueve bajo la ley $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$ con

$$x(t) = 2t^2; \quad y(t) = t^2 - 4t; \quad z(t) = 3t - 5.$$

El parámetro t representa el tiempo. Encuentre las expresiones para la aceleración y la velocidad de la partícula, para $t = 1$ y en la dirección del vector $\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$.

4. Suponga ahora el caso general de una partícula que se mueve en una curva descrita por $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$. Muestre que el vector velocidad es tangente a la trayectoria descrita
5. Encuentre la ecuación vectorial para una trayectoria recta que pasa por los puntos $P \rightarrow (1, 2, 3)$ y $Q \rightarrow (1, 1, 1)$
6. Encuentre el ángulo entre los siguientes planos $x + y + z = 9$ y $x + y - z = 3$.
7. Un fluido se considera irrotacional si su campo de velocidades $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{v}(x, y, z)$ cumple con la ecuación $\nabla \times \mathbf{v} = 0$. Suponga, ahora que $\mathbf{v} = (x + 2y + az)\mathbf{i} + (bx - 3y - z)\mathbf{j} + (4x + cy + 2z)\mathbf{k}$.
- Encuentre el valor de a, b y c para que este campo de velocidades sea irrotacional
 - Es intuitivo convencerse que si $\nabla \times \mathbf{v} = 0 \Rightarrow \mathbf{v} = \nabla\psi$. Encuentre expresión para la función potencial $\psi = \psi(\mathbf{r}) = \psi(x, y, z)$
 - Considere la siguiente integral $I = \int_C \mathbf{dr} \cdot \mathbf{v}$. Donde C es el circuito a recorrer.
 - Calcule el valor de la integral I a lo largo del trayecto: $(0, 0, 0) \rightarrow (1, 1, 0)$ mediante un segmento de recta. Luego, de $(1, 1, 0) \rightarrow (2, 0, 0)$ a lo largo de otro segmento de recta. Finalmente regresando $(2, 0, 0) \rightarrow (0, 0, 0)$ también siguiendo una recta.

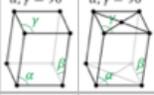
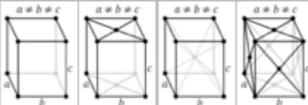
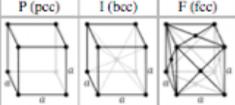
| The 7 lattice systems | | The 14 Bravais lattices | | | | | | | | | |
|-----------------------|--|---|---|---|-------------------|---|--|---|---|-------------------------------|--|
| Triclinic | P | | | | | Lattice system | Volume | | | | |
| | $a, \beta, \gamma \neq 90^\circ$ |  | | | | Triclinic | $abc\sqrt{1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta - \cos^2 \gamma + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma}$ | | | | |
| Monoclinic | P | C | | | | Monoclinic | $abc \sin \beta$ | | | | |
| | $\beta \neq 90^\circ$ $\alpha, \gamma = 90^\circ$ | $\beta \neq 90^\circ$ $\alpha, \gamma = 90^\circ$ |  | | | Orthorhombic | abc | | | | |
| Orthorhombic | P | C | I | F | | Tetragonal | a^2c | | | | |
| | $a \neq b \neq c$ | $a \neq b \neq c$ | $a \neq b \neq c$ | $a \neq b \neq c$ | | Rhombohedral | $a^3\sqrt{1 - 3 \cos^2 \alpha + 2 \cos^3 \alpha}$ | | | | |
| |  | | | | | Hexagonal | $\frac{\sqrt{3}}{2} a^2c$ | | | | |
| | | | | | | Cubic | a^3 | | | | |
| Tetragonal | P | I | | | | Lattice System | Possible Variations | Axial Distances (edge lengths) | Axial Angles | Corresponding Examples | |
| | $a \neq c$ | $a \neq c$ | Cubic | Primitive, Body-centred, Face-centred | $a = b = c$ | $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$ | NaCl, Zinc Blende, Cu | | | | |
| Rhombohedral | R or P | | | | Tetragonal | Primitive, Body-centred | $a = b \neq c$ | $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$ | White tin, SnO ₂ , TiO ₂ , CaSO ₄ | | |
| | $a = b \neq c$ | | Orthorhombic | Primitive, Body-centred, Face-centred, Base-centred | $a \neq b \neq c$ | $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$ | Rhombic sulphur, KNO ₃ , BaSO ₄ | | | | |
| | $\alpha = \beta = \gamma \neq 90^\circ$ | | Hexagonal | Primitive | $a = b \neq c$ | $\alpha = \beta = 90^\circ, \gamma = 120^\circ$ | Graphite, ZnO, CdS | | | | |
| | | | Rhombohedral | Primitive | $a = b = c$ | $\alpha = \beta = \gamma \neq 90^\circ$ | Calcite (CaCO ₃), Cinnabar (HgS) | | | | |
| Hexagonal | P | | | | Monoclinic | Primitive, Base-centred | $a \neq b \neq c$ | $\alpha = \gamma = 90^\circ, \beta \neq 90^\circ$ | Monoclinic sulphur, Na ₂ SO ₄ ·10H ₂ O | | |
| |  | | Triclinic | Primitive | $a \neq b \neq c$ | $\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq 90^\circ$ | K ₂ Cr ₂ O ₇ , CuSO ₄ ·5H ₂ O, H ₃ BO ₃ | | | | |
| Cubic | P (fcc) | I (bcc) | F (fcc) | | | | | | | | |
| |  | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | |

Figura 1.11: Las 14 Redes de Bravais Tridimensionales y las estructuras cristalinas asociadas. Tomado de http://en.wikipedia.org/wiki/Bravais_lattice

- 2) Calcule el valor de la integral I de $(0, 0, 0) \rightarrow (2, 0, 0)$ a lo largo de un arco de circunferencia que cumple con la ecuación $(x-1)^2 + y^2 = 1$. Ahora regresando de $(2, 0, 0) \rightarrow (0, 0, 0)$ también a través de una recta.
- 3) ¿Qué puede concluir del campo \mathbf{v} ?

8. Dos funciones complejas $Z_1(t)$ y $Z_2(t)$ cumplen con las siguientes ecuaciones

$$\frac{dZ_1^*}{dt} = \frac{-i}{Z_1 - Z_2} \quad \text{y} \quad \frac{dZ_2^*}{dt} = \frac{-i}{Z_2 - Z_1}$$

Muestre que las siguientes cantidades son constantes.

- $Z_1 + Z_2$
- $|Z_1 - Z_2|$

- $|Z_1|^2 + |Z_2|^2$

9. Considere la siguiente ecuación

$$z^7 - 4z^6 + 6z^5 - 6z^4 + 6z^3 - 12z^2 + 8z + 4 = 0$$

Encuentre sus raíces sabiendo que $z^3 = 2$.

10. Muestre que la expansión binomial puede ser escrita como

$$(1+x)^n = \sum_{m=0}^n A_m(n) x^m \quad \text{con} \quad A_m(n) = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Si está convencido de la expansión anterior, considere ahora una parecida: $(1 + e^{i\theta})^n$ y muestre que

$$\sum_{m=0}^n A_m(n) \cos(n\theta) = 2^n \cos^n\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{n\theta}{2}\right)$$

y

$$\sum_{m=0}^n A_m(n) \sin(n\theta) = 2^n \cos^n\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)$$

11. Las funciones hiperbólicas se definen como

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{y} \quad \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

y de manera análoga a las funciones trigonométricas tendremos el resto de funciones

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}; \quad \operatorname{sech}(x) = \frac{1}{\cosh(x)}; \quad \operatorname{csech}(x) = \frac{1}{\sinh(x)}; \quad \operatorname{ctanh}(x) = \frac{1}{\tanh(x)};$$

a) Muestre las siguientes equivalencias

$$\cosh(x) = \cos(ix), \quad i \sinh(x) = \sin(ix), \quad \cos(x) = \cosh(ix) \quad \text{y} \quad i \sin(x) = \sinh(x)$$

b) Muestre las siguientes identidades

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1; \quad \operatorname{sech}^2(x) = 1 - \tanh^2(x); \quad \cosh(2x) = \cosh^2(x) + \sinh^2(x)$$

c) Resuelva las siguientes ecuaciones hiperbólicas

$$\cosh(x) - 5\sinh(x) - 5 = 0, \quad 2\cosh(4x) - 8\cosh(2x) + 5 = 0 \quad \text{y} \quad \cosh(x) = \sinh(x) + 2\operatorname{sech}(x)$$

d) La posición de una partícula vista desde dos observadores relativistas O y \tilde{O} puede expresarse en término de funciones hiperbólicas como

$$\tilde{x}^\mu = L_\nu^\mu x_\nu \quad \text{con} \quad \{\mu, \nu\} = 0, 1 \quad \text{y} \quad L_\nu^\mu = \begin{pmatrix} \cosh(\phi) & -\sinh(\phi) \\ \sinh(\phi) & \cosh(\phi) \end{pmatrix}$$

- Encuentre la matriz \bar{L}_ν^μ tal que $x^\nu = \bar{L}_\nu^\mu \tilde{x}^\mu$
- Muestre que $ds^2 = (x^0)^2 - (x^1)^2 = (\tilde{x}^0)^2 - (\tilde{x}^1)^2$.

Capítulo **2**

Espacios Vectoriales Lineales

Borrador Preliminar

2.1. Grupos, cuerpos y espacios vectoriales

2.1.1. Grupos

Considere el siguiente conjunto $\mathbf{G} = \{g_1, g_2, g_3, \dots, g_n, \dots\}$ y la operación \square . Entonces estos elementos forman un grupo abeliano¹ respecto a la operación \square si $\forall g_i \in \mathbf{G}$ se tiene que:

1. Cerrada respecto a la operación \square : $\{g_i \in \mathbf{G}, g_j \in \mathbf{G}\} \Rightarrow \exists g_k = g_i \square g_j \in \mathbf{G}$
2. Asociativa respecto a la operación \square : $g_k \square (g_i \square g_j) = (g_k \square g_i) \square g_j$
3. Existencia de un elemento neutro: $\exists \mathbf{1} \in \mathbf{G} \Rightarrow g_i \square \mathbf{1} = g_i = \mathbf{1} \square g_i$
4. Existencia de un elemento inverso: $g_i \in \mathbf{G} \Rightarrow \exists g_i^{-1} \in \mathbf{G} \Rightarrow g_i \square g_i^{-1} = g_i^{-1} \square g_i = \mathbf{1}$
5. Conmutativa respecto a la operación \square : $g_i \square g_j \equiv g_j \square g_i$.

Ejemplos de grupos:

- Los enteros $\mathfrak{Z} = \{\dots - 3 - 2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ respecto a la suma pero no respecto a la multiplicación (excluyendo el cero) por cuanto no existe inverso
- Los racionales respecto a la suma y a la multiplicación
- Los números complejos $z = e^{i\theta}$ respecto a la multiplicación
- Las rotaciones en 2 dimensiones (2D), sin embargo las rotaciones en 3D forman un grupo no-abeliano
- Dado un grupo de tres elementos, $\mathbf{G} = \{\mathbf{1}, a, b\}$ y la operación \square . Por construcción si queremos que la operación de dos de los elementos provea un tercero distinto, entonces la ÚNICA “tabla de multiplicación” posible será:

| | | | |
|--------------|--------------|--------------|--------------|
| \square | $\mathbf{1}$ | a | b |
| $\mathbf{1}$ | $\mathbf{1}$ | a | b |
| a | a | b | $\mathbf{1}$ |
| b | b | $\mathbf{1}$ | a |

Si sólo se cumplen las cuatro primeras, entonces se dice que simplemente forman grupo respecto a la operación \square . Se pueden definir subgrupos si un subconjunto de los elementos de un grupo $g_i \in \mathbf{G}$ también forman un grupo.

El número de los elementos de un grupo puede ser finito o infinito. En el primer caso se denominan *grupos finitos* y el número de elementos que contenga se conoce como el orden del grupo. Un grupo finito que se construye a partir de una operación con un único miembro se denomina *grupo cíclico*, y el caso más elemental es $\mathbf{G} = \{I, X, X^2, X^3, \dots, X^{g-1}\}$. Obviamente hemos definido aquí: $X^2 = X \square X$ y $X^3 = X^2 \square X = X \square X \square X$ y así consecutivamente hasta ejecutarse $g - 1$ veces, entonces se retoma el elemento identidad, esto es: $X^{g-1} \square X = X^g = I$.

¹NIELS HENRIK ABEL, (1802-1829 Noruega) Pionero en el desarrollo de diferentes ramas de la matemática moderna, Abel mostró desde su infancia un notable talento para el estudio de las ciencias exactas. Tal predisposición se vería muy pronto confirmada por sus precoces investigaciones sobre cuestiones de álgebra y cálculo integral, en particular sobre la teoría de las integrales de funciones algebraicas (a las que se denominaría abelianas en honor de su formulador) que no habría de publicarse hasta 1841, doce años después de su fallecimiento. En 2002 el gobierno noruego lanzó el premio Abel que llenará el vacío que existe en la premiación Nobel del gobierno sueco, en el cual no existe premiación para la comunidad matemática.

Considere los siguientes conjuntos y operaciones

- $G_{\text{mod}8} = \{1, 3, 5, 7\}$ y la operación multiplicación módulo 8. Esto es: multiplicar dos de los elementos y dividirlo entre (para este caso) 8. De esta forma $3 \cdot 3 = 9$ y el residuo de dividir $9/8$ es 1, vale decir $(3 \cdot 3)_{\text{mod}8} = 1$. De esta manera construimos entonces la tabla de multiplicación

| $\times \text{mod}8$ | 1 | 3 | 5 | 7 |
|----------------------|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 3 | 5 | 7 |
| 3 | 3 | 1 | 7 | 5 |
| 5 | 5 | 7 | 1 | 3 |
| 7 | 7 | 5 | 3 | 1 |

- $G_{\text{mod}5} = \{1, 2, 3, 4\}$ y la operación multiplicación módulo 5. Tabla de multiplicación:

| $\times \text{mod}5$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|----------------------|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 2 | 2 | 4 | 1 | 3 |
| 3 | 3 | 1 | 4 | 2 |
| 4 | 4 | 3 | 2 | 1 |

 \Leftrightarrow

| $\times \text{mod}5$ | 1 | 2 | 4 | 3 |
|----------------------|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 4 | 3 |
| 2 | 2 | 4 | 3 | 1 |
| 4 | 4 | 3 | 1 | 2 |
| 3 | 3 | 1 | 2 | 4 |

- $G_{\text{mod}24} = \{1, 5, 7, 11\}$ y la operación multiplicación módulo 24. Tabla de multiplicación:

| $\times \text{mod}24$ | 1 | 5 | 7 | 11 |
|-----------------------|----|----|----|----|
| 1 | 1 | 5 | 7 | 11 |
| 5 | 5 | 1 | 11 | 7 |
| 7 | 7 | 11 | 1 | 5 |
| 11 | 11 | 7 | 5 | 1 |

- $G_{\times} = \{1, i, -1, -i\}$ y la operación multiplicación:

| \times | 1 | i | -1 | -i |
|----------|----|----|----|----|
| 1 | 1 | i | -1 | -i |
| i | i | -1 | -i | 1 |
| -1 | -1 | -i | 1 | i |
| -i | -i | 1 | i | -1 |

Diremos que los grupos $G_{\text{mod}8}$ y $G_{\text{mod}24}$ son isomorfos porque tienen tablas equivalentes de multiplicación. Esto es, dado un grupo genérico $G = \{1, A, B, C\}$ su tabla de multiplicación será:

| \times | 1 | A | B | C |
|----------|---|---|---|---|
| 1 | 1 | A | B | C |
| A | A | 1 | C | B |
| B | B | C | 1 | A |
| C | C | B | A | 1 |

Note que $A^{-1} = A$ y que siempre la operación de dos elementos da uno distinto a los operados.

De igual forma los grupos \mathbf{G}_\times y $\mathbf{G}_{\text{mod}5}$ son isomorfos con una tabla de multiplicación

| | | | | |
|----------|---|---|---|---|
| \times | 1 | A | B | C |
| 1 | 1 | A | B | C |
| A | A | B | C | 1 |
| B | B | C | 1 | A |
| C | C | 1 | A | B |

2.1.2. Cuerpo

Definiremos como un cuerpo (o campo) el conjunto $\mathbf{A} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n, \dots\}$ sobre el cual están definidas dos operaciones: suma (+) y multiplicación (\cdot) y que satisfacen las siguientes propiedades:

1. Forman un grupo abeliano respecto a la suma (+), con el elemento neutro representado por el cero (0).
2. Forman un grupo abeliano respecto a la multiplicación (\cdot). Se excluye el cero (0) y se denota el elemento neutro de la multiplicación como (1).
3. Es distributiva respecto a la suma (+) : Dados α_i, α_j y α_k se tiene que $\alpha_i \cdot (\alpha_j + \alpha_k) = \alpha_i \cdot \alpha_j + \alpha_i \cdot \alpha_k$.

Ejemplos típicos de campos lo constituyen los racionales \mathfrak{Q} , los números reales \mathfrak{R} y los números complejos \mathfrak{C} . Normalmente se refiere estos campos como *Campos Escalares*.

2.1.3. Espacios vectoriales lineales

Sea el conjunto de objetos $\mathbf{V} = \{|v_1\rangle, |v_2\rangle, |v_3\rangle \dots |v_i\rangle \dots\}$. Se denominará \mathbf{V} un espacio vectorial lineal y sus elementos $|v_i\rangle$ vectores, si existe una operación suma, \boxplus , respecto a la cual los elementos $|v_i\rangle \in \mathbf{V}$ forman un grupo abeliano y una operación multiplicación por un elemento de un campo, $\mathbf{K} = \{\alpha, \beta, \gamma \dots\}$, tal que:

1. La operación suma \boxplus es cerrada en $\mathbf{V} : \forall |v_i\rangle, |v_j\rangle \in \mathbf{V} \Rightarrow |v_k\rangle = |v_i\rangle \boxplus |v_j\rangle \in \mathbf{V}$
2. La operación suma \boxplus es conmutativa y asociativa:
 - a) $\forall |v_i\rangle, |v_j\rangle \in \mathbf{V} \Rightarrow |v_i\rangle \boxplus |v_j\rangle = |v_j\rangle \boxplus |v_i\rangle$
 - b) $\forall |v_i\rangle, |v_j\rangle, |v_k\rangle \in \mathbf{V} \Rightarrow (|v_i\rangle \boxplus |v_j\rangle) \boxplus |v_k\rangle = |v_i\rangle \boxplus (|v_j\rangle \boxplus |v_k\rangle)$
3. Existe un único elemento neutro $|0\rangle : |0\rangle \boxplus |v_j\rangle = |v_j\rangle \boxplus |0\rangle = |v_j\rangle \forall |v_j\rangle \in \mathbf{V}$
4. Existe un elemento simétrico para cada elemento de $\mathbf{V} : \forall |v_j\rangle \in \mathbf{V} \exists |-v_j\rangle / |v_j\rangle \boxplus |-v_j\rangle = |0\rangle$
5. $\alpha(\beta|v_i\rangle) = (\alpha\beta)|v_i\rangle$
6. $(\alpha + \beta)|v_i\rangle = \alpha|v_i\rangle + \beta|v_i\rangle$
7. $\alpha(|v_i\rangle \boxplus |v_j\rangle) = \alpha|v_i\rangle \boxplus \alpha|v_j\rangle$
8. $\mathbf{1}|v_i\rangle = |v_i\rangle$

Es inmediato notar que podemos definir subespacios vectoriales dentro de los espacios vectoriales. Ellos serán aquellos conjuntos de vectores que cumplan con los requisitos anteriores pero además cerrados dentro de los mismos conjuntos de vectores.

2.1.4. Ejemplos espacios vectoriales

Serán ejemplos de espacios vectoriales los siguientes:

1. Los números reales y complejos con el campo de reales o complejos y definidas las operaciones ordinarias de suma y multiplicación.

$$\mathbf{V} \equiv \mathfrak{R}, \quad \boxplus \equiv +, \quad |v\rangle \equiv x, \quad \mathbf{K} \equiv \mathfrak{R}.$$

$$\mathbf{V} \equiv \mathfrak{C}, \quad \boxplus \equiv +, \quad |v\rangle \equiv x + iy, \quad \mathbf{K} \equiv \mathfrak{R}.$$

Cuando el campo \mathbf{K} es el conjunto de los números reales se dirá que es *un espacio vectorial real de números reales* si $\mathbf{V} \equiv \mathfrak{R}$, y si $\mathbf{V} \equiv \mathfrak{C}$ se dirá *un espacio vectorial real de números complejos*. Por su parte, si $\mathbf{K} \equiv \mathfrak{C}$ diremos que es un espacio vectorial complejo de números reales ($\mathbf{V} \equiv \mathfrak{R}$) o complejos ($\mathbf{V} \equiv \mathfrak{C}$). Siempre se asociará el campo de escalares al espacio vectorial. Se dirá que es un espacio vectorial sobre el campo de los reales. Si el campo es real (complejo) se dirá que el espacio vectorial es real (complejo).

2. El espacio $\mathbf{V} \equiv \mathfrak{R}^n = \mathfrak{R} \times \mathfrak{R} \times \cdots \times \mathfrak{R}$, vale decir el producto cartesiano de \mathfrak{R} , cuyos elementos son n -uplas de números, con la operación suma ordinaria de vectores en n -dimensionales y la multiplicación por escalares.

$$\begin{aligned} |x\rangle &= (x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n) \quad \wedge \quad |y\rangle = (y_1, y_2, y_3, \cdots, y_n) \\ |x\rangle \boxplus |y\rangle &\equiv (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, \cdots, x_n + y_n) \\ \alpha |x\rangle &= (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3, \cdots, \alpha x_n). \end{aligned}$$

Este espacio vectorial es de dimensión finita. Igualmente, será un espacio vectorial $\mathfrak{C}^n = \mathfrak{C} \times \mathfrak{C} \times \cdots \times \mathfrak{C}$ para el cual los elementos $x_i \in \mathfrak{C}$. Si para este caso el campo sobre el cual se define el espacio vectorial \mathfrak{C}^n es real, tendremos un espacio vectorial real de números complejos.

Es obvio que el caso $\mathbf{V} \equiv \mathfrak{R}$ para el cual $|x\rangle_1 = (x_1, 0, 0, \cdots, 0)$ y $|y\rangle_1 = (y_1, 0, 0, \cdots, 0)$ o cualquier espacio de vectores formados por las componentes, i.e. $|x\rangle_i = (0, 0, 0, \cdots, x_i, \cdots, 0)$ y $|y\rangle_i = (0, 0, 0, \cdots, y_i, \cdots, 0)$ formarán subespacios vectoriales dentro de \mathfrak{R}^n .

3. El espacio \mathbf{E}^∞ constituido por vectores $|x\rangle = (x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots)$ contables pero con infinitas componentes.

$$\begin{aligned} |x\rangle &= (x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots) \quad \wedge \quad |y\rangle = (y_1, y_2, y_3, \cdots, y_n, \cdots) \\ |x\rangle \boxplus |y\rangle &\equiv (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, \cdots, x_n + y_n, \cdots) \\ \alpha |x\rangle &= (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3, \cdots, \alpha x_n, \cdots), \end{aligned}$$

con la restricción que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n x_i = L, \quad \text{con } L \text{ finito.}$$

4. El conjunto de la matrices $n \times n$ reales o complejas con el campo \mathbf{K} real o complejo.

$$\begin{aligned} |x\rangle &= M_{ab} \quad \wedge \quad |y\rangle = N_{ab} \\ |x\rangle \boxplus |y\rangle &\equiv M_{ab} + N_{ab} = (M + N)_{ab} \\ \alpha |x\rangle &= \alpha M_{ab} = (\alpha M)_{ab} \end{aligned}$$

Es también obvio que se podrán formar subespacios vectoriales cuyos elementos sean matrices de dimensión menor a $n \times n$.

- El conjunto de todos los polinomios con coeficientes reales: $\mathcal{P} = \{a_0, a_1x, a_2x^2, \dots, a_nx^n, \dots\}$, con \boxplus la suma ordinaria entre polinomios y la multiplicación ordinaria de polinomios con escalares.
- Espacios Funcionales (de los cuales los polinomios son un caso particular). En estos espacios los vectores serán funciones, la suma será la suma ordinaria entre funciones y la multiplicación por un escalar también será la multiplicación ordinaria de una función por un elemento de un campo

$$\begin{aligned} |f\rangle &= f(x) \quad \wedge \quad |g\rangle = g(x) \\ |f\rangle \boxplus |g\rangle &\equiv f(x) + g(x) \equiv (f + g)(x) \\ \alpha |f\rangle &= (\alpha f)(x) \equiv \alpha f(x). \end{aligned}$$

- El conjunto de todas las funciones continuas e infinitamente diferenciables, definidas en el intervalo $[a, b] : C_{[a,b]}^\infty$.
- El conjunto de todas las funciones complejas de variable real, $\psi(x)$, definidas en $[a, b]$, de cuadrado integrable (es decir para las cuales $\int_a^b dx |\psi(x)|^2$ sea finita). Este espacio se denomina comúnmente \mathcal{L}^2 y puede ser definido en un rango $[a, b]$, finito o infinito, y para más de una variable.

2.1.5. La importancia de la conceptualización y la notación

En los ejemplos antes mencionados hemos utilizado para representar un vector abstracto la notación de $|v_1\rangle$ y con ellos construimos un espacio vectorial abstracto $\mathbf{V} = \{|v_1\rangle, |v_2\rangle, |v_3\rangle, \dots, |v_n\rangle\}$. Un espacio vectorial abstracto será un conjunto de elementos genéricos que satisfacen ciertos axiomas. Dependiendo del conjunto de axiomas tendremos distintos tipos de espacios abstractos. En matemática el concepto de espacios abstracto es reciente (1928) y, aparentemente, se le debe a Maurice Fréchet². La teoría resulta de desarrollar las consecuencias lógicas que resultan de esos axiomas. Los elementos de esos espacios se dejan sin especificar a propósito. Ese vector abstracto puede representar, vectores en \mathfrak{R}^n , matrices $n \times n$ o funciones continuas. La notación $|v_1\rangle$, que se denomina un *ket* y al cual le corresponde un *bra* $\langle v_2|$ proviene del vocablo inglés *bracket* que significa corchete y será evidente más adelante cuando construyamos escalares *braket* $\langle v_2| |v_1\rangle$. Esta útil notación la ideó Paul Dirac³, uno de los físicos más influyentes en el desarrollo de la física del siglo XX.

2.1.6. Ejercicios

- Sea S el conjunto de todos los números reales excluyendo -1 y defina la operación \square

$$a \square b = a + b + ab$$

donde $+$ es la suma estándar entre números reales.

- Muestre que $[S, \square]$ forman grupo
- Encuentre la solución en S para la ecuación $2 \square x \square 3 = 7$

²MAURICE FRÉCHET (1878 Maligny, Yonne, Bourgogne-1973 París, Francia). Versátil matemático francés, con importantes contribuciones en Espacios Métricos, Topología y creador del concepto de Espacios Abstractos.

³PAUL ADRIEN MAURICE DIRAC (1902 Bristol, Inglaterra 1984-Tallahassee, EE.UU). Además de contribuir de manera determinante en la comprensión de la Mecánica Cuántica, es uno de los creadores de la Mecánica Cuántica Relativista la cual ayudó a comprender el papel que juega el espín en las partículas subatómicas. Por sus importantes trabajos compartió con Erwin Schrödinger el Premio Nobel de Física en 1933.

2. Considere un triángulo equilátero. Uno puede identificar operaciones de rotación alrededor de un eje perpendicular a la figura y reflexiones respecto a planos que dejan invariante la figura del triángulo.

a) Muestre que el conjunto de estas operaciones forma un grupo $\mathbf{G}_\Delta = \{I, R, \bar{R}, X_1, X_2, X_3\}$. con I la operación identidad; R y \bar{R} las rotaciones y X_1, X_2 y X_3 las reflexiones. Muestre además, que las rotaciones forman un subgrupo cíclico de orden 3, mientras que las reflexiones forman un subgrupo cíclico de orden 2

b) Construya la tabla de multiplicación para \mathbf{G}_Δ

c) Considere las siguientes matrices

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \mathbf{E} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Muestre que forman grupo bajo la multiplicación de matrices y que ese grupo es isomorfo a \mathbf{G}_Δ

d) Considere las siguientes funciones

$$f_1(x) = x; \quad f_2(x) = \frac{1}{x}; \quad f_3(x) = \frac{1}{1-x}; \quad f_4(x) = \frac{x-1}{x}; \quad f_5(x) = 1-x; \quad f_6(x) = \frac{x}{x-1};$$

Muestre que forman grupo bajo la operación $f_i(x) \odot f_j(x) = f_i(f_j(x))$ y que ese grupo es isomorfo a \mathbf{G}_Δ

3. Definamos una operación binaria \blacksquare como

$$x \blacksquare y = x + y + \alpha xy$$

con $x, y, \alpha \in \mathfrak{R}$ y además $\alpha \neq 0$.

a) Demuestre que \blacksquare es asociativa

b) Muestre que \blacksquare genera un grupo en $\{\mathfrak{R} - (\frac{-1}{\alpha})\}$. Es decir, $\forall x, y \in \mathfrak{R} \wedge x \neq \frac{-1}{\alpha}, y \neq \frac{-1}{\alpha}$ entonces $x \blacksquare y$ forma un grupo

4. Muestre que el siguiente conjunto de transformaciones en el plano xy forman un grupo y construya su tabla de multiplicación

$$a) 1 = \begin{cases} x \rightarrow x \\ y \rightarrow y \end{cases}$$

$$b) I = \begin{cases} x \rightarrow -x \\ y \rightarrow -y \end{cases}$$

$$c) I_x = \begin{cases} x \rightarrow -x \\ y \rightarrow y \end{cases}$$

$$d) I_y = \begin{cases} x \rightarrow x \\ y \rightarrow -y \end{cases}$$

5. Muestre que también serán espacios vectoriales

- a) El conjunto de todas las funciones $f = f(x)$ definidas en $x = 1$ con $f(1) = 0$. Si $f(1) = c$ ¿Tendremos igual un espacio vectorial? ¿Por qué?
- b) Los vectores $(x, y, z) \in \mathbf{V}_3$ tal que sus componentes satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones algebraico

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = 0$$

$$a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = 0$$

$$a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = 0$$

2.2. Espacios métricos, normados y con producto interno

2.2.1. Métricas y espacios métricos

El siguiente paso en la dotación de propiedades de los espacios lineales lo constituye la idea de métrica o distancia entre sus elementos. El concepto de métrica surge de la generalización de la idea de distancia entre dos puntos de la recta real.

Un espacio vectorial será métrico si podemos definir una función d tal que:

$$d : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathfrak{R} / \forall |x\rangle, |y\rangle, |z\rangle \in \mathbf{V}$$

y se cumple que:

1. $d(|x\rangle, |y\rangle) \geq 0$, si $d(|x\rangle, |y\rangle) = 0 \Rightarrow |x\rangle \equiv |y\rangle$
2. $d(|x\rangle, |y\rangle) \equiv d(|y\rangle, |x\rangle)$
3. $d(|x\rangle, |y\rangle) \leq d(|x\rangle, |z\rangle) + d(|y\rangle, |z\rangle)$ (La desigualdad triangular).

Así, diremos que $(\mathbf{V}, \mathbf{K}, \oplus, d)$ es un espacio vectorial, lineal, métrico.

Ejemplos

1. Espacios euclidianos reales \mathfrak{R}^n .

a) Para \mathfrak{R} , es decir la recta real, la definición de métrica es $d(|x\rangle, |y\rangle) \equiv |x - y|$.

b) Para \mathfrak{R}^2 , es decir el plano, una definición de métrica es: $d(|x\rangle, |y\rangle) \equiv \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$.

También podemos construir otra definición de métrica como: $d(|x\rangle, |y\rangle) \equiv |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$. La primera de estas métricas se conoce como métrica euclídea y la segunda como métrica Manhattan o métrica de taxistas. Es claro como el mismo espacio vectorial genera varios espacios métricos, dependiendo de la definición de métrica, y para el caso particular de estas dos métricas corresponden a medidas del desplazamiento en aviones (métrica euclídea) o vehículos terrestre en ciudades.

c) En general para espacios euclidianos reales \mathfrak{R}^n una posible definición de métrica será:

$$d(|x\rangle, |y\rangle) \equiv \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}.$$

2. Espacios unitarios n -dimensionales, o espacios euclidianos complejos, \mathfrak{C}^n . La definición de distancia puede construirse como:

$$d(|x\rangle, |y\rangle) \equiv \sqrt{|x_1 - y_1|^2 + |x_2 - y_2|^2 + |x_3 - y_3|^2 + \cdots + |x_n - y_n|^2}$$

y es claro que se recobra la idea de distancia en el plano complejo: $d(|x\rangle, |y\rangle) \equiv |x - y|$.

3. Para los espacios de funciones $C_{[a,b]}^\infty$ una posible definición de distancia sería:

$$d(|f\rangle, |g\rangle) \equiv \max_{t \in [a,b]} |f(t) - g(t)|.$$

Es importante destacar que las definiciones de distancia arriba propuesta son invariante bajo traslaciones de vectores. Esto es: $|\tilde{x}\rangle = |x\rangle + |a\rangle \quad \wedge \quad |\tilde{y}\rangle = |y\rangle + |a\rangle$, entonces, $d(|x\rangle, |y\rangle) \equiv d(|\tilde{x}\rangle, |\tilde{y}\rangle)$.

2.2.2. Normas y espacios normados

La idea de distancia, de métrica, es el equipamiento más elemental que uno le puede exigir a un espacio vectorial. Mucho más interesante aún son aquellos espacios vectoriales que están equipados con la idea de norma y, a partir de allí, se define la idea de distancia. La norma tiene que ver con el “tamaño” del vector y la métrica tiene que ver con la distancia entre vectores. Cuando definimos la métrica a partir de la norma, vinculamos las propiedades algebraicas del espacio con sus propiedades geométricas.

La Norma, $\| |v_i\rangle \| \equiv \mathcal{N}(|v_i\rangle)$ de un espacio vectorial $\mathbf{V} = \{|v_1\rangle, |v_2\rangle, |v_3\rangle \cdots |v_n\rangle\}$ será una función $\mathcal{N} : \mathbf{V} \rightarrow \mathfrak{R} / \forall |v_i\rangle \in \mathbf{V}$ que cumple con:

1. $\mathcal{N}(|v_i\rangle) \equiv \| |v_i\rangle \| \geq 0$, si $\| |v_i\rangle \| = 0 \Rightarrow |v_i\rangle \equiv |0\rangle$
2. $\mathcal{N}(\alpha |v_i\rangle) \equiv \| \alpha |v_i\rangle \| = |\alpha| \| |v_i\rangle \|$
3. $\| |v_i\rangle + |v_j\rangle \| \leq \| |v_i\rangle \| + \| |v_j\rangle \|$ (Desigualdad Triangular).

La definición de Norma induce una métrica de la forma $d(|v_i\rangle, |v_j\rangle) \equiv \| |v_i\rangle - |v_j\rangle \|$. Se denota en este caso un espacio vectorial normado como $(\mathbf{V}, \mathbf{K}, \boxplus; \| \cdot \|)$ y también se le conoce como un Espacio de Banach. El concepto de espacio vectorial normado fue formulado en 1922 de manera independiente por S. Banach⁴, H. Hahn y N. Wiener.

Ejemplos

1. Espacios euclidianos reales, \mathfrak{R}^n y espacios euclidianos complejos \mathfrak{C}^n . Para estos espacios de Banach, la Norma se define como:

$$\| |x\rangle \| = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + |x_3|^2 + \cdots + |x_n|^2} = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

⁴STEFAN BANACH (1892 Kracovia, Polonia-1945 Lvov, Ucrania) Matemático polaco, uno de los fundadores del Análisis Funcional Moderno, con sus mayores contribuciones a la teoría de espacios topológicos. Hizo también importantes aportes a la teoría de la Medida, Integración y Teoría de Conjuntos y Series Ortogonales.

es claro que para un espacio euclidiano \mathfrak{R}^3 se cumple que $\| |x\rangle \| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$, por lo tanto, la idea de Norma generaliza la noción de “tamaño” del vector $|x\rangle$. También es claro que la definición de distancia se construye a partir de la norma de la forma:

$$d(|x\rangle, |y\rangle) \equiv \| |x\rangle - |y\rangle \| = \sqrt{|x_1 - y_1|^2 + |x_2 - y_2|^2 + |x_3 - y_3|^2 + \dots + |x_n - y_n|^2}.$$

2. Para el espacio lineal de matrices $n \times n$ reales o complejas con el campo \mathbf{K} real o complejo, una definición de norma es

$$\|M\| = \sum_{a=1}^m \sum_{b=1}^n |M_{ab}|,$$

y la correspondiente definición de distancia

$$d(|x\rangle, |y\rangle) \equiv \|M - N\| = \sum_{a=1}^m \sum_{b=1}^n |M_{ab} - N_{ab}|.$$

3. Para los espacios funcionales $\mathcal{C}_{[a,b]}^\infty$ una posible definición de norma sería:

$$\| |f\rangle \| = \max_{t \in [a,b]} |f(t)|,$$

otra posible definición sería

$$\| |f\rangle \| = \left(\int_{t \in [a,b]} dx |f(x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

2.2.3. Espacios con producto interno

El siguiente paso en la construcción de espacios vectoriales más ricos es equiparlo con la definición de producto interno y a partir de esta definición construir el concepto de norma y con éste el de distancia. La idea de producto interno generaliza el concepto de producto escalar de vectores en \mathfrak{R}^3 e incorpora a los espacios vectoriales abstractos el concepto de ortogonalidad y descomposición ortogonal. Históricamente, la teoría de espacios vectoriales con producto interno es anterior a la teoría de espacios métricos y espacios de Banach y se le debe a D. Hilbert⁵. Adicionalmente, la semejanza entre la geometría euclidiana y la geométrica de \mathfrak{R}^n ha hecho que espacios en los cuales se puedan definir, distancia, ángulos, a partir de una definición de producto interno, se denominen también espacios euclidianos.

Producto interno

En un espacio vectorial abstracto $\mathbf{V} = \{|v_1\rangle, |v_2\rangle, |v_3\rangle \dots |v_n\rangle\}$, la definición del producto interno de dos vectores se denota como $\langle v_i | v_j \rangle$ y es una función: $\mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{K} \forall |v_i\rangle, |v_j\rangle, |v_k\rangle \in \mathbf{V}$, es decir, asocia a ese par de vectores con un elemento del campo, o cuerpo, \mathbf{K} .

Las propiedades que definen el producto interno son:

$$1. \langle v_i | v_i \rangle \in \mathbf{K} \quad \wedge \quad \langle v_i | v_i \rangle \geq 0 \quad \forall |v_i\rangle \in \mathbf{V}, \quad \text{si} \quad \langle v_i | v_i \rangle = 0 \Rightarrow |v_i\rangle \equiv |0\rangle$$

⁵DAVID HILBERT (1862 Kaliningrad, Rusia-1943 Göttingen, Alemania) Matemático alemán defensor de la axiomática como enfoque primordial de los problemas científicos. Hizo importantes contribuciones en distintas áreas de la matemática, como: Invariantes, Campos de Números Algebraicos, Análisis Funcional, Ecuaciones Integrales, Física-Matemática y Cálculo en Variaciones.

2. $\langle v_i | v_j \rangle = \langle v_j | v_i \rangle^* \quad \forall |v_i\rangle, |v_j\rangle \in \mathbf{V}$
3. $\langle v_i | v_j + v_k \rangle = \langle v_i | v_j \rangle + \langle v_i | v_k \rangle \quad \wedge \quad \langle v_i + v_j | v_k \rangle = \langle v_i | v_k \rangle + \langle v_j | v_k \rangle \quad \forall |v_i\rangle, |v_j\rangle, |v_k\rangle \in \mathbf{V}$
4. $\langle v_i | \alpha v_j \rangle = \alpha \langle v_i | v_j \rangle \quad \wedge \quad \langle \alpha v_i | v_j \rangle = \alpha^* \langle v_i | v_j \rangle \quad \forall |v_i\rangle, |v_j\rangle \in \mathbf{V} \quad \wedge \quad \alpha \in \mathbf{K}$
5. $\langle v_i | 0 \rangle = \langle 0 | v_i \rangle = 0$

A partir de la definición de producto interno se construyen los conceptos de norma y distancia

$$\| |v_i\rangle \| = \sqrt{\langle v_i | v_i \rangle} \quad \text{y} \quad d(|v_i\rangle, |v_j\rangle) \equiv \| |v_i\rangle - |v_j\rangle \| = \sqrt{\langle v_i - v_j | v_i - v_j \rangle}$$

La desigualdad de Cauchy-Schwarz

Todo producto interno $\langle v_i | v_j \rangle$ definido en un espacio vectorial abstracto $\mathbf{V} = \{|v_1\rangle, |v_2\rangle, |v_3\rangle, \dots, |v_n\rangle\}$ cumple con la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$|\langle v_i | v_j \rangle|^2 \leq \langle v_i | v_i \rangle \langle v_j | v_j \rangle \iff |\langle v_i | v_j \rangle| \leq \| |v_i\rangle \| \| |v_j\rangle \| .$$

Es claro que si $|v_i\rangle = |0\rangle \quad \wedge \quad |v_j\rangle = |0\rangle$ se cumple la igualdad y es trivial la afirmación.

Para $|v_i\rangle \wedge |v_j\rangle$ cualesquiera, procedemos construyendo $|v_k\rangle = \alpha |v_i\rangle + \beta |v_j\rangle$ con $|v_i\rangle \wedge |v_j\rangle$ arbitrarios, pero α y β tendrán valores particulares, por lo tanto

$$\langle v_k | v_k \rangle \equiv \langle \alpha v_i + \beta v_j | \alpha v_i + \beta v_j \rangle \geq 0$$

$$\langle \alpha v_i + \beta v_j | \alpha v_i + \beta v_j \rangle = \langle \alpha v_i | \alpha v_i \rangle + \langle \alpha v_i | \beta v_j \rangle + \langle \beta v_j | \alpha v_i \rangle + \langle \beta v_j | \beta v_j \rangle \geq 0$$

$$= |\alpha|^2 \langle v_i | v_i \rangle + \alpha^* \beta \langle v_i | v_j \rangle + \beta^* \alpha \langle v_j | v_i \rangle + |\beta|^2 \langle v_j | v_j \rangle \geq 0 .$$

Si $\alpha = \langle v_j | v_j \rangle$, se tiene que

$$\langle v_j | v_j \rangle \langle v_i | v_i \rangle + \beta \langle v_i | v_j \rangle + \beta^* \langle v_j | v_i \rangle + |\beta|^2 \geq 0 ,$$

seguidamente seleccionamos $\beta = -\langle v_i | v_j \rangle$ y por lo tanto $\beta^* = -\langle v_j | v_i \rangle$ y consecuentemente

$$\langle v_j | v_j \rangle \langle v_i | v_i \rangle \geq \langle v_i | v_j \rangle \langle v_j | v_i \rangle = |\langle v_i | v_j \rangle|^2 .$$

De la desigualdad de Cauchy-Schwarz y la definición de norma se desprende que

$$\frac{|\langle v_i | v_j \rangle|^2}{\| |v_i\rangle \|^2 \| |v_j\rangle \|^2} \leq 1 \quad \Rightarrow \quad -1 \leq \frac{\langle v_i | v_j \rangle}{\| |v_i\rangle \| \| |v_j\rangle \|} \leq 1 ,$$

por lo tanto podemos definir el “ángulo” entre los vectores abstractos $|v_i\rangle \wedge |v_j\rangle$ como

$$\cos(\Theta) = \frac{|\langle v_i | v_j \rangle|}{\| |v_i\rangle \| \| |v_j\rangle \|} ,$$

Más aún, a partir de la definición de norma se obtiene

$$\| |v_i\rangle + |v_j\rangle \|^2 = \langle v_i + v_j | v_i + v_j \rangle = \langle v_i | v_i \rangle + \langle v_i | v_j \rangle + \langle v_i | v_j \rangle^* + \langle v_j | v_j \rangle = \langle v_i | v_i \rangle + 2 \operatorname{Re}(\langle v_i | v_j \rangle) + \langle v_j | v_j \rangle$$

con lo cual hemos generalizado para un espacio vectorial abstracto el teorema del coseno

$$\| |v_i\rangle + |v_j\rangle \|^2 = \| |v_i\rangle \|^2 + \| |v_j\rangle \|^2 + 2 \| |v_i\rangle \| \| |v_j\rangle \| \cos(\Theta)$$

y para el caso que los vectores $|v_i\rangle \wedge |v_j\rangle$ sean ortogonales, esto es $\langle v_i | v_j \rangle = 0$, tendremos el teorema de Pitágoras generalizado

$$\| |v_i\rangle + |v_j\rangle \|^2 = \| |v_i\rangle \|^2 + \| |v_j\rangle \|^2 .$$

Ejemplos

1. Espacios euclidianos reales, \mathfrak{R}^n y espacios euclidianos complejos \mathfrak{C}^n .

Los vectores de estos espacios pueden ser representados por $|x\rangle = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ \wedge $|y\rangle = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ y el **producto interno** queda definido por

$$\langle x | y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3, \dots, x_n y_n = \sum_{i=1}^n x_i y_i,$$

es claro que esta definición de producto interno coincide, para \mathfrak{R}^2 (y \mathfrak{R}^3) con la idea de producto escalar convencional que consideramos en las secciones 1.3.1 y 1.5.3, vale decir

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} \\ \mathbf{b} = b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} \end{array} \right\} \Rightarrow \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y.$$

Ahora bien, el lector puede comprobar que para vectores en \mathfrak{R}^2 también se puede proveer una definición de producto interno

$$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = 2a_x b_x + a_x b_y + a_y b_x + a_y b_y,$$

igualmente válida, con lo cual es claro que en un mismo espacio vectorial pueden coexistir diferentes productos internos. Por su parte, la **norma** es

$$\| |x\rangle \| = \sqrt{\langle x | x \rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2, \dots, x_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}.$$

La **distancia** también recupera la idea intuitiva de distancia euclidiana

$$d(|x\rangle, |y\rangle) \equiv \| |x\rangle - |y\rangle \| = \sqrt{\langle x - y | x - y \rangle}$$

$$d(|x\rangle, |y\rangle) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}.$$

El teorema del coseno queda como

$$\sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{i=1}^n y_i^2 + 2 \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2} \cos(\Theta),$$

mientras que el teorema de Pitágoras es

$$\sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{i=1}^n y_i^2,$$

obvio que para \mathfrak{R}^2 tanto el teorema del coseno como el teorema de Pitágoras retoman su forma tradicional. Finalmente la desigualdad de Cauchy-Schwarz se expresa

$$|\langle x | y \rangle| \leq \| |x\rangle \| \| |y\rangle \| \Rightarrow \left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right|^2 \leq \sum_{i=1}^n x_i^2 \sum_{i=1}^n y_i^2.$$

2. Para los espacios de funciones continuas $\mathcal{C}_{[a,b]}^\infty$ una posible definición de **producto interno** sería

$$\langle f | g \rangle = \int dx f^*(x) g(x) ,$$

de la cual se deriva la expresión para la **norma**

$$\| |f\rangle \|^2 = \langle f | f \rangle = \int dx |f(x)|^2 ,$$

la **distancia** entre funciones quedará definida como

$$d(|f\rangle, |g\rangle) \equiv \| |f\rangle - |g\rangle \| \equiv \sqrt{\langle f-g | f-g \rangle} = \sqrt{\langle f | f \rangle - \langle f | g \rangle - \langle f | g \rangle^* + \langle g | g \rangle}$$

$$\begin{aligned} d(|f\rangle, |g\rangle) &= \sqrt{\int dx |f(x) - g(x)|^2} \\ &= \sqrt{\int dx |f(x)|^2 - 2 \operatorname{Re} \left(\int dx f^*(x) g(x) \right) + \int dx |g(x)|^2} . \end{aligned}$$

Los teoremas del coseno puede ser escrito como

$$\begin{aligned} \int dx |f(x) + g(x)|^2 &= \int dx |f(x)|^2 + \int dx |g(x)|^2 \\ &\quad + 2 \left(\int dx |f(x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int dx |g(x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cos(\Theta) , \end{aligned}$$

donde

$$\cos(\Theta) = \frac{\int dx f^*(x) g(x)}{\left(\int dx |f(x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int dx |g(x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}} ,$$

y como era de esperarse el teorema de Pitágoras queda

$$\int dx |f(x) + g(x)|^2 = \int dx |f(x)|^2 + \int dx |g(x)|^2 ,$$

para funciones $f(x)$ y $g(x)$ ortogonales, mientras que para este caso, la desigualdad de Cauchy-Schwarz se expresa

$$\left| \int dx f^*(x) g(x) \right|^2 \leq \int dx |f(x)|^2 \int dx |g(x)|^2 .$$

2.2.4. Ejercicio

Los vectores en \mathfrak{R}^3 en coordenada cartesianas los definimos como $\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}$ y definimos una “tabla de multiplicación” entre ellos de la forma $\langle e^i | e_j \rangle = \delta_j^i$ con $i, j = 1, 2, 3$, esto es:

| $\langle e^i e_j \rangle$ | \mathbf{i} | \mathbf{j} | \mathbf{k} |
|-----------------------------|--------------|--------------|--------------|
| \mathbf{i} | 1 | 0 | 0 |
| \mathbf{j} | 0 | 1 | 0 |
| \mathbf{k} | 0 | 0 | 1 |

con $i, j = 1, 2, 3$

Un cuaternión cartesiano puede escribirse de manera análoga a los vectores cartesianos, vale decir:

$$|a\rangle = a^\alpha |q_\alpha\rangle = a^0 + a^i |q_i\rangle = a_0 + a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k},$$

con $\alpha = 0, 1, 2, 3$ y donde las a^i (con $i = 1, 2, 3$) son números reales que representan las componentes vectoriales en coordenadas cartesianas de los cuaterniones, mientras que la a^0 , también un número real se le llama componente escalar⁶. Los cuaterniones fueron inventados por el matemático irlandés William Rowan Hamilton a mediados del siglo XIX, y por decirlo de alguna manera, son híbridos o generalizaciones a un plano hipercomplejo. Un vector cartesiano es un cuaternión con la componente escalar nula.

Basándonos en este esquema podemos definir la “tabla de multiplicación” para los cuaterniones cartesianos como

| | | | | |
|----------------------------------|---------------|----------------|----------------|----------------|
| $ q'_i\rangle \odot q_j\rangle$ | 1 | $ q_1\rangle$ | $ q_2\rangle$ | $ q_3\rangle$ |
| 1 | 1 | $ q_1\rangle$ | $ q_2\rangle$ | $ q_3\rangle$ |
| $ q'_1\rangle$ | $ q_1\rangle$ | -1 | $ q_3\rangle$ | $- q_2\rangle$ |
| $ q'_2\rangle$ | $ q_2\rangle$ | $- q_3\rangle$ | -1 | $ q_1\rangle$ |
| $ q'_3\rangle$ | $ q_3\rangle$ | $ q_2\rangle$ | $- q_1\rangle$ | -1 |

Nótese que por el hecho que $|q_j\rangle \odot |q_j\rangle = -1 \Rightarrow |q_1\rangle \odot |q_1\rangle = |q_2\rangle \odot |q_2\rangle = |q_3\rangle \odot |q_3\rangle = -1$, se puede pensar que un cuaternión es la generalización de los números complejos a más de una dimensión (un número hipercomplejo) donde la parte imaginaria tendría tres dimensiones y no una como es costumbre. Esto es

$$|a\rangle = a^\alpha |q_\alpha\rangle = a^0 \underbrace{|q_0\rangle}_1 + a^j |q_j\rangle = a^0 + \underbrace{a^1 |q_1\rangle + a^2 |q_2\rangle + a^3 |q_3\rangle}_{\text{“parte compleja”}}$$

Siendo consistente con esa visión de generalización de un número complejo, definiremos el conjugado de un cuaternión como $|b\rangle^{\mathbf{x}} = b^0 |q_0\rangle - b^j |q_j\rangle$ con $j = 1, 2, 3$. Es decir, en analogía con los números complejos el conjugado de un cuaternión cambia el signo de su “parte compleja vectorial”. Igualmente, definiremos la suma entre cuaterniones como

$$\left. \begin{array}{l} |a\rangle = a^\alpha |q_\alpha\rangle \\ |b\rangle = b^\alpha |q_\alpha\rangle \end{array} \right\} \Rightarrow |c\rangle = c^\alpha |q_\alpha\rangle = |a\rangle + |b\rangle = (a^\alpha + b^\alpha) |q_\alpha\rangle \Rightarrow c^\alpha = (a^\alpha + b^\alpha)$$

Esto quiere decir que los vectores se suman componente a componente. Mientras que la multiplicación por un escalar queda definida por $\alpha |c\rangle = \alpha c^\alpha |q_\alpha\rangle$, es decir se multiplica el escalar por cada componente.

1. Compruebe si los Cuaterniones, $|a\rangle$, forman un espacio vectorial respecto a una operación esa suma y esa multiplicación por escalares, análoga a la de los vectores en \mathfrak{R}^3 en coordenada cartesianas ¿Los cuaterniones $|a\rangle$ son vectores, pseudovectores o ninguna de las anteriores? Explique por qué.
2. Dados dos cuaterniones $|b\rangle \equiv (b^0, \mathbf{b})$ y $|r\rangle \equiv (r^0, \mathbf{r})$, entonces, el producto entre cuaterniones $|d\rangle = |b\rangle \odot |r\rangle$ podrá representarse como

$$|d\rangle = |b\rangle \odot |r\rangle \longleftrightarrow (d^0, \mathbf{d}) = (b^0 r^0 - \mathbf{b} \cdot \mathbf{r}, r^0 \mathbf{b} + b^0 \mathbf{r} + \mathbf{b} \times \mathbf{r})$$

donde \cdot y \times corresponden con los productos escalares y vectoriales tridimensionales de siempre.

⁶Recuerde que estamos utilizando la convención de Einstein en la cual $c^\alpha |q_\alpha\rangle \equiv c^0 + \sum_{j=1}^3 c^j |q_j\rangle$. Es decir hemos supuesto que $|q_0\rangle \equiv 1$, la unidad en los números reales. Adicionalmente, nótese que los índices griegos α, β, \dots toman los valores $0, 1, 2, 3$, mientras que los latinos que acompañan a los vectores cartesianos toman los siguiente valores $j, k, l = 1, 2, 3$.

Ahora con índices: dados $|b\rangle = b^\alpha |q_\alpha\rangle$ y $|r\rangle = r^\alpha |q_\alpha\rangle$, compruebe si el producto $|d\rangle = |b\rangle \odot |r\rangle$ puede ser siempre escrito de la forma

$$|d\rangle = |b\rangle \odot |r\rangle = a |q_0\rangle + S^{(ij)} \delta_i^0 |q_j\rangle + A^{[jk]i} b_j r_k |q_i\rangle$$

donde a representa un escalar; $S^{(ij)} \delta_i^0$ tres cantidades (recuerde que los índices latinos toman los valores $j, k, l = 1, 2, 3$, mientras $i = 0, 1, 2, 3$); donde $S^{(ij)}$ indica $S^{ji} = S^{ij}$, que la cantidad S^{ij} es simétrica, y por lo tanto $(S^{ij} \delta_i^0 + S^{ji} \delta_i^0) |q_j\rangle$. Mientras $A^{[jk]i}$ representa un conjunto de objetos antisimétricos en j y k : $A^{[jk]i} \rightarrow A^{jki} = -A^{kji} \rightarrow (A^{jki} b_j r_k - A^{kji} b_j r_k) |q_i\rangle$ ⁷.

Identifique las cantidades: $a, S^{(ij)}$ y $A^{[jk]i}$ en términos de las componentes de los cuaterniones ¿El producto de cuaterniones $|d\rangle = |a\rangle \odot |r\rangle$ será un vector, pseudovector o ninguna de las anteriores? Explique por qué.

3. Muestre que los cuaterniones pueden ser representados por matrices complejas 2×2 del tipo

$$|b\rangle \longleftrightarrow \begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix}$$

donde z, w son números complejos y \bar{w} y \bar{z} sus complejos conjugados

4. Muestre que una representación posible para la base de cuaterniones es, la matriz unitaria 4×4 y

$$|q_1\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad |q_2\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad |q_3\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

5. Compruebe si la siguiente es una buena definición de producto interno:

$$\langle a | b \rangle = |a\rangle^{\times} \odot |b\rangle$$

6. Modifique un poco la definición anterior de tal forma que se tenga la

$$\langle a | b \rangle = \frac{1}{2} [\langle a | b \rangle - |q_1\rangle \odot \langle a | b \rangle \odot |q_1\rangle]$$

y compruebe si esta definición compleja del producto interno cumple con todas las propiedades. Nótese que un cuaternión de la forma $|f\rangle = f^0 + f^1 |q_1\rangle$ es un número complejo convencional.

7. Compruebe si la siguiente es una buena definición de norma para los cuaterniones

$$n(|b\rangle) = \| |a\rangle \| = \sqrt{\langle a | a \rangle} = \sqrt{|a\rangle^{\times} \odot |a\rangle}$$

8. Compruebe si un cuaternión definido por

$$\overline{|a\rangle} = \frac{|a\rangle^{\times}}{\| |a\rangle \|^2}$$

puede ser considerado como el inverso o elemento simétrico de $|a\rangle$ respecto a la multiplicación \odot

9. Compruebe si los Cuaterniones $|a\rangle$ forman un grupo respecto a una operación multiplicación \odot .

⁷Para familiarizarse con las expresiones vectoriales con la notación de índices puede consultar la sección 1.6

10. Los vectores en \mathfrak{R}^3 en coordenadas cartesianas, $|v\rangle$, pueden ser representados como cuaterniones donde la parte escalar es nula $v^0 = 0 \rightarrow |v\rangle = v^j |q_j\rangle$. Compruebe si el siguiente producto conserva la norma

$$|v'\rangle = \overline{|a\rangle} \odot |v\rangle \odot |a\rangle$$

$$\text{Estos es: } \||v'\rangle\|^2 = (v^{1'})^2 + (v^{2'})^2 + (v^{3'})^2 \equiv (v^1)^2 + (v^2)^2 + (v^3)^2 = \||v\rangle\|^2$$

2.3. Variedades lineales

2.3.1. Dependencia/independencia lineal

Siguiendo la misma línea de razonamiento que en las secciones 1.2 y 1.5.2, generalizamos el concepto de dependencia e independencia lineal de \mathfrak{R}^2 y \mathfrak{R}^3 . Así

$$|0\rangle = C_1 |v_1\rangle + C_2 |v_2\rangle + C_3 |v_3\rangle \cdots + C_n |v_n\rangle = \sum_{i=1}^n C_i |v_i\rangle,$$

Podemos afirmar que:

- Si esta ecuación se cumple para algún conjunto de $\{C_i\}$ no nulos, se dirá que el conjunto de vectores correspondiente $\{|v_i\rangle\}$ son **linealmente dependientes**.
- Por el contrario, si esta ecuación **sólo** puede ser satisfecha para todos los $C_i = 0$, entonces se dirá que el conjunto de vectores correspondiente $\{|v_i\rangle\}$ son **linealmente independientes**.

Ejemplos dependencia/independencia lineal

1. Dados tres vectores en \mathfrak{R}^4

$$|v_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad |v_2\rangle = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad |v_3\rangle = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

El criterio de independencia lineal se cumple si $|0\rangle = C_1 |v_1\rangle + C_2 |v_2\rangle + C_3 |v_3\rangle$ y todos los $\{C_i\}$ son nulos, esto es

$$\begin{array}{rcl} C_1 & +2C_2 & -C_3 = 0 \\ 3C_1 & & +C_3 = 0 \\ -C_1 & +C_2 & = 0 \\ 2C_1 & +3C_2 & = 0 \end{array}$$

de donde es claro ver que la única solución posible implica $C_1 = C_2 = C_3 = 0$, es decir, el conjunto de vectores: $\{|v_1\rangle, |v_2\rangle, |v_3\rangle\}$ son linealmente independientes.

2. Si consideramos el espacio vectorial $\mathbf{V} = \{|v_1\rangle, |v_2\rangle, |v_3\rangle, \dots, |v_n\rangle\}$ serán ejemplos de **independencia lineal**:

- $|v_k\rangle \equiv f(t) = t^k$ para $k = 1, 2, 3, \dots$. Es claro que un polinomio de grado $n + 1$, no podrá ser expresado en términos un polinomio de grado n , en otras palabras, $t^{n+1} \neq \sum_{i=0}^n C_i t^i$.
- $|v_k\rangle \equiv f(t) = e^{a_k t}$ con a_1, a_2, a_3, \dots coeficientes constantes. También salta a la vista que no podremos expresar una de esas funciones exponenciales como una combinación lineal.

3. Si consideramos $|v_1\rangle = \cos^2(t)$, $|v_2\rangle = \sin^2(t)$ y $|v_3\rangle = 1$, es claro que $|v_1\rangle$, $|v_2\rangle$, y $|v_3\rangle$ son **linealmente dependientes** por cuanto $|v_1\rangle + |v_2\rangle = |v_3\rangle$. Nótese que si

$$|v_1\rangle = \cos(t), |v_2\rangle = \sin(t) \text{ y } |v_3\rangle = 1,$$

entonces $|v_1\rangle$, $|v_2\rangle$, y $|v_3\rangle$ serán vectores **linealmente independientes**.

4. Consideremos ahora otro ejemplo en \mathcal{P}^3 :

$$|x_1\rangle = 1; \quad |x_2\rangle = x - 1; \quad |x_3\rangle = x^2; \quad |x_4\rangle = x^2 + 2x + 1.$$

Podemos ver que este conjunto es linealmente dependiente ya que siempre podremos expresar

$$|x_4\rangle = 3|x_1\rangle + 2|x_2\rangle + |x_3\rangle.$$

Ejercicios

1. Considere un conjunto \mathbf{S} conformado únicamente por números reales positivos. Consideremos las siguientes reglas sobre \mathbf{S} : Por “suma” de dos números entenderemos su producto en el sentido usual, y el “producto” de un elemento $r \in \mathbf{S}$ y un número real λ entenderemos r elevado a la potencia de λ , en el sentido usual. ¿ \mathbf{S} es un espacio vectorial?
2. Considere el conjunto de vectores en el plano conformado por vectores localizados en el origen y cuyos puntos finales permanecen siempre en el primer cuadrante. ¿Este conjunto es un espacio vectorial?
3. Diga si los siguientes conjuntos de vectores en \mathcal{P}^3 son o no linealmente independientes.

$$a) \quad |x_1\rangle = 2x; \quad |x_2\rangle = x^2 + 1; \quad |x_3\rangle = x + 1; \quad |x_4\rangle = x^2 - 1$$

$$b) \quad |x_1\rangle = x(x - 1); \quad |x_2\rangle = x; \quad |x_3\rangle = x^3; \quad |x_4\rangle = 2x^3 - x^2$$

2.3.2. Bases de un espacio vectorial

Ahora bien, dado un espacio vectorial $\mathbf{V} = \{|v_1\rangle, |v_2\rangle, |v_3\rangle, \dots, |v_n\rangle\}$, si encontramos que el conjunto de $\{|v_n\rangle\}$ es linealmente dependiente, entonces siempre es posible despejar uno de los vectores en términos de los demás, vale decir

$$|v_n\rangle = \tilde{C}_1 |v_1\rangle + \tilde{C}_2 |v_2\rangle + \tilde{C}_3 |v_3\rangle \cdots + \tilde{C}_{n-1} |v_{n-1}\rangle = \sum_{i=1}^{n-1} \tilde{C}_i |v_i\rangle.$$

Seguidamente podemos proceder a comprobar si $\{|v_1\rangle, |v_2\rangle, |v_3\rangle, \dots, |v_{n-1}\rangle\}$ es un conjunto de vectores linealmente independientes, es decir, si $\tilde{C}_1 = \tilde{C}_2 = \tilde{C}_3 = \dots = \tilde{C}_{n-1} = 0$. En caso de no serlo se procede otra vez a despejar uno de los vectores en términos de los anteriores y a aplicar el criterio de independencia lineal:

$$|v_{n-1}\rangle = \tilde{C}_1 |v_1\rangle + \tilde{C}_2 |v_2\rangle + \tilde{C}_3 |v_3\rangle \cdots + \tilde{C}_{n-2} |v_{n-2}\rangle = \sum_{i=1}^{n-2} \tilde{C}_i |v_i\rangle,$$

se comprueba si se cumple

$$\tilde{C}_1 = \tilde{C}_2 = \tilde{C}_3 = \dots = \tilde{C}_{n-1} = 0.$$

En caso contrario, se repite este procedimiento hasta encontrar un conjunto $\{|v_1\rangle, |v_2\rangle, |v_3\rangle, \dots, |v_{n-j}\rangle\}$ de vectores linealmente independientes. Esto es:

$$\check{C}_1 = \check{C}_2 = \check{C}_3 = \dots = \check{C}_{n-j} = 0,$$

y por lo tanto

$$|v_{n-j+1}\rangle = \check{C}_1 |v_1\rangle + \check{C}_2 |v_2\rangle + \check{C}_3 |v_3\rangle \dots + \check{C}_{n-j} |v_{n-j}\rangle = \sum_{i=1}^{n-j} \check{C}_i |v_i\rangle.$$

Nos preguntamos nuevamente si se cumple que:

$$\check{C}_1 = \check{C}_2 = \check{C}_3 = \dots = \check{C}_{n-j} = 0.$$

En el caso de ser cierto, esto significaría que

$$|0\rangle = \check{C}_1 |v_1\rangle + \check{C}_2 |v_2\rangle + \check{C}_3 |v_3\rangle \dots + \check{C}_{n-j} |v_{n-j}\rangle = \sum_{i=1}^{n-j} \check{C}_i |v_i\rangle,$$

Diremos entonces que $\{|v_1\rangle, |v_2\rangle, |v_3\rangle, \dots, |v_{n-j}\rangle\}$ forman una base para \mathbf{V} .

La dimensión de \mathbf{V} será el conjunto de vectores linealmente independientes, que para este caso será $n-j$. Así se puede comprobar que, dado $|x\rangle \in \mathbf{V}$, entonces

$$|x\rangle = \sum_{i=1}^{n-j} C_i |v_i\rangle \quad \forall |x\rangle \in \mathbf{V},$$

y el conjunto $\{C_1, C_2, C_3, \dots, C_{n-j}\}$ será único.

Diremos que el número mínimo de vectores:

$$|v_1\rangle, |v_2\rangle, |v_3\rangle, \dots, |v_{n-j}\rangle$$

que expanden \mathbf{V} conforman una base de ese espacio vectorial, y que el número finito de cantidades

$$C_1, C_2, C_3, \dots, C_{n-j},$$

constituyen las componentes de $|x\rangle$ relativas a la base $\{|v_1\rangle, |v_2\rangle, \dots, |v_{n-j}\rangle\}$.

De lo anteriormente expuesto se puede concretar la siguiente definición:

A un conjunto finito de vectores de un espacio vectorial

$$\mathcal{B} = \{|v_1\rangle, |v_2\rangle, |v_3\rangle, \dots, |v_n\rangle\} \in \mathbf{V},$$

se les denominará una base de ese espacio \mathbf{V} si los $|v_1\rangle, |v_2\rangle, |v_3\rangle, \dots, |v_n\rangle$ son linealmente independientes y expanden \mathbf{V} . El espacio vectorial se denominará de dimensión finita si el conjunto de vectores base es finito y de dimensión infinita si, por el contrario, el conjunto de vectores base es infinito.

Es fácil darse cuenta que si \mathbf{V} lo expanden n vectores linealmente independientes, cualquier otro vector $|x\rangle \in \mathbf{V}$ será linealmente dependiente. Igualmente, y fácilmente demostrable, es que todas las bases de un espacio vectorial \mathbf{V} , de dimensión finita, tendrán el mismo número de elementos y ese número de elemento será la dimensión del espacio.

Adicionalmente, puede ser que dentro de un espacio vectorial \mathbf{V} se puedan encontrar subespacios y dentro de esos subespacios un conjunto de vectores base.

Vale decir, si $\forall |x\rangle \in \mathbf{V}$:

$$|x\rangle = \underbrace{C_1 |v_1\rangle \cdots + C_{n-j} |v_{n-j}\rangle}_{\mathbf{S}_1} + \underbrace{C_{n-j+1} |v_{n-j+1}\rangle \cdots + C_{n-k} |v_{n-k}\rangle}_{\mathbf{S}_2} + \underbrace{C_{n-k+1} |v_{n-k+1}\rangle \cdots + C_n |v_n\rangle}_{\mathbf{S}_3}$$

con

$$|x\rangle = |x_1\rangle + |x_2\rangle + |x_3\rangle \quad \text{y} \quad |x_1\rangle \in \mathbf{S}_1; \quad |x_2\rangle \in \mathbf{S}_2; \quad |x_3\rangle \in \mathbf{S}_3,$$

entonces diremos que \mathbf{V} es la suma directa de $\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2$ y \mathbf{S}_3 y lo denotaremos como: $\mathbf{V} = \mathbf{S}_1 \oplus \mathbf{S}_2 \oplus \mathbf{S}_3$.

2.3.3. El determinante de Gram

Existe una forma directa de comprobar la independencia lineal de un conjunto de vectores

$$\{|v_1\rangle, |v_2\rangle, |v_3\rangle \cdots, |v_n\rangle\} \in \mathbf{V}.$$

Dado un $|x\rangle \in \mathbf{V}$, entonces, y al multiplicar por $\langle v_i|$, resulta:

$$|x\rangle = \sum_{i=1}^n C_i |v_i\rangle \Rightarrow \begin{cases} C_1 \langle v_1 | v_1 \rangle + C_2 \langle v_1 | v_2 \rangle + C_3 \langle v_1 | v_3 \rangle + \cdots + C_n \langle v_1 | v_n \rangle & = \langle v_1 | x \rangle \\ C_1 \langle v_2 | v_1 \rangle + C_2 \langle v_2 | v_2 \rangle + C_3 \langle v_2 | v_3 \rangle + \cdots + C_n \langle v_2 | v_n \rangle & = \langle v_2 | x \rangle \\ \vdots & \vdots \\ C_1 \langle v_n | v_1 \rangle + C_2 \langle v_n | v_2 \rangle + C_3 \langle v_n | v_3 \rangle + \cdots + C_n \langle v_n | v_n \rangle & = \langle v_n | x \rangle \end{cases}$$

donde las $C_1, C_2, C_3, \dots, C_n$ son las incógnitas, por lo cual, para que este sistema tenga solución se impone que

$$\begin{vmatrix} \langle v_1 | v_1 \rangle & \langle v_1 | v_2 \rangle & \langle v_1 | v_3 \rangle & \cdots & \langle v_1 | v_n \rangle \\ \langle v_2 | v_1 \rangle & \langle v_2 | v_2 \rangle & \langle v_2 | v_3 \rangle & \cdots & \langle v_2 | v_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \langle v_n | v_1 \rangle & \langle v_n | v_2 \rangle & \langle v_n | v_3 \rangle & \cdots & \langle v_n | v_n \rangle \end{vmatrix} \neq 0$$

Esto es, que el determinante de Gram⁸ distinto de cero implica que el conjunto de vectores: $\{|v_1\rangle, |v_2\rangle, |v_3\rangle \cdots, |v_n\rangle\}$ es linealmente independiente. La inversa también es cierta.

Ejemplos bases espacios lineales

1. El espacio vectorial \mathbf{V}^n tendrá dimensión n y una de las posibles bases $\{|v_1\rangle, |v_2\rangle, |v_3\rangle \cdots, |v_n\rangle\}$ será

$$\begin{aligned} |v_1\rangle &= (1, 0, 0, \dots, 0) \\ |v_2\rangle &= (0, 1, 0, \dots, 0) \\ |v_3\rangle &= (0, 0, 1, \dots, 0) \\ &\vdots \\ |v_{n-j}\rangle &= (0, 0, 0, \dots, 1) \end{aligned}$$

Esta base se conoce con el nombre de base canónica.

2. El espacio de polinomios, \mathcal{P}^n , de grado $g \leq n$ tendrá como una de las posibles bases al conjunto $\{1, t, t^2, t^3, \dots, t^n\}$, porque cualquier polinomio de grado $\leq n$ podrá ser expresado como combinación lineal de estos $n+1$ vectores. Más aún, el espacio de **todos** los polinomios, \mathcal{P}^∞ , tendrá como una posible base al conjunto de funciones $\{1, t, t^2, t^3, \dots, t^n \dots\}$. En este caso \mathcal{P}^∞ será infinito dimensional.

⁸JORGEN PEDERSEN GRAM (1850-1916 Dinamarca) Matemático danés, que alternaba su actividad de gerente de una importante compañía de seguros con las matemáticas (Probabilidad, Análisis Numérico y Teoría de Números). Es conocido mayormente por el método de ortogonalización, pero se presume que no fue él quien primero lo utilizó. Aparentemente fue ideado por Laplace y utilizado también por Cauchy en 1836. Gram murió arrollado por una bicicleta a la edad de 61 años.

2.3.4. Ortogonalidad y bases ortogonales

En un espacio vectorial con producto interno, dos vectores $|e_1\rangle \wedge |e_2\rangle$ serán ortogonales si su producto interno se anula

$$|e_1\rangle \perp |e_2\rangle \Leftrightarrow \langle e_2 | e_1 \rangle = 0.$$

Se denomina un conjunto **ortogonal** de vectores $\{|e_1\rangle, |e_2\rangle, |e_3\rangle, \dots, |e_n\rangle\}$ si

$$\langle e_i | e_j \rangle = \delta_{ij} \| |e_j\rangle \|^2, \quad i, j = 1, 2, 3, \dots, n \quad \text{y con} \quad \begin{cases} \delta_{ij} = 0 & \text{si } i \neq j \\ \delta_{ij} = 1 & \text{si } i = j \end{cases}$$

y se denominará conjunto **ortonormal** si $\| |e_j\rangle \|^2 = 1$.

Un conjunto ortogonal de vectores $\{|e_1\rangle, |e_2\rangle, |e_3\rangle, \dots, |e_n\rangle\} \in \mathbf{V}$ es linealmente independiente, más aún, para el caso particular de un espacio euclidiano, $\{|e_1\rangle, |e_2\rangle, |e_3\rangle, \dots, |e_n\rangle\}$ conforman una base ortogonal para \mathbf{V} . La demostración es sencilla. Para un determinado espacio vectorial una combinación lineal de los $\{|e_1\rangle, |e_2\rangle, |e_3\rangle, \dots, |e_n\rangle\}$ se anula.

$$\sum_{i=1}^n C_i |e_i\rangle = |0\rangle \Rightarrow \begin{cases} \langle e_1 | [\sum_{i=1}^n C_i |e_i\rangle] = 0 & \Rightarrow \sum_{i=1}^n C_i \delta_{1i} = 0 & \Rightarrow C_1 = 0 \\ \langle e_2 | [\sum_{i=1}^n C_i |e_i\rangle] = 0 & \Rightarrow \sum_{i=1}^n C_i \delta_{2i} = 0 & \Rightarrow C_2 = 0 \\ \langle e_3 | [\sum_{i=1}^n C_i |e_i\rangle] = 0 & \Rightarrow \sum_{i=1}^n C_i \delta_{3i} = 0 & \Rightarrow C_3 = 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle e_n | [\sum_{i=1}^n C_i |e_i\rangle] = 0 & \Rightarrow \sum_{i=1}^n C_i \delta_{ni} = 0 & \Rightarrow C_n = 0 \end{cases}$$

con lo cual, queda claro que: $\{|e_1\rangle, |e_2\rangle, |e_3\rangle, \dots, |e_n\rangle\}$ son un conjunto de vectores linealmente independientes.

Si la dimensión de \mathbf{V} es n ($\dim \mathbf{V} = n$) y tenemos n vectores linealmente independientes, entonces esos n vectores $\{|e_1\rangle, |e_2\rangle, |e_3\rangle, \dots, |e_n\rangle\}$ forman una base ortogonal para \mathbf{V} , y por lo tanto, las componentes de un vector en esa base se pueden expresar de manera simple.

$$\forall |x\rangle \in \mathbf{V} \Rightarrow |x\rangle = \sum_{i=1}^n C_i |e_i\rangle \Rightarrow \langle e_j | x \rangle = \langle e_j | \left[\sum_{i=1}^n C_i |e_i\rangle \right] \Rightarrow C_j = \frac{\langle e_j | x \rangle}{\langle e_j | e_j \rangle}$$

En el caso de un conjunto ortonormal de vectores $\{|\hat{e}_1\rangle, |\hat{e}_2\rangle, |\hat{e}_3\rangle, \dots, |\hat{e}_n\rangle\} \in \mathbf{V}^n$, con $\| |\hat{e}_j\rangle \|^2 = 1$, las componentes de cualquier vector quedan determinadas de una forma todavía más simple y con consecuencias mucho más impactantes

$$\| |\hat{e}_j\rangle \|^2 = 1 \Rightarrow C_j = \langle \hat{e}_j | x \rangle \Rightarrow |x\rangle = \sum_{i=1}^n C_i |\hat{e}_i\rangle = \sum_{i=1}^n \langle \hat{e}_i | x \rangle |\hat{e}_i\rangle \equiv \underbrace{\sum_{i=1}^n |\hat{e}_i\rangle \langle \hat{e}_i | x \rangle}_1.$$

Es bueno recalcar la relación de cierre

$$\sum_{i=1}^n |\hat{e}_i\rangle \langle \hat{e}_i| = 1,$$

con lo cual es trivial demostrar la fórmula de Parseval

$$\forall |x\rangle, |y\rangle \in \mathbf{V} \Rightarrow \langle y | x \rangle \equiv \langle y | \left(\sum_{i=1}^n |\hat{e}_i\rangle \langle \hat{e}_i| \right) | x \rangle = \sum_{i=1}^n \langle y | \hat{e}_i \rangle \langle \hat{e}_i | x \rangle = \sum_{i=1}^n \langle y | \hat{e}_i \rangle \langle x | \hat{e}_i \rangle^*$$

para el caso de $|x\rangle \equiv |y\rangle$ se llega la generalización del Teorema de Pitágoras

$$\langle x | x \rangle \equiv \| |x\rangle \|^2 = \sum_{i=1}^n |\langle x | \hat{e}_i \rangle|^2.$$

Ejemplos de bases ortogonales

1. Funciones Trigonométricas:

Uno de los ejemplos más emblemáticos es el caso de las funciones continuas, reales de variable real y definidas en $[0, 2\pi]$, $C_{[0, 2\pi]}^\infty$, con lo cual el producto interno viene definido por $\langle f | g \rangle = \int_0^{2\pi} dx f(x) g(x)$, ésto es, el conjunto de funciones $\{|e_1\rangle, |e_2\rangle, |e_3\rangle, \dots, |e_n\rangle, \dots\}$ representadas por

$$|e_0\rangle = 1, \quad |e_{2n-1}\rangle = \cos(nx) \quad \text{y} \quad |e_{2n}\rangle = \sin(nx), \quad \text{con } n = 1, 2, 3, \dots$$

Es claro que $\{|e_1\rangle, |e_2\rangle, |e_3\rangle, \dots, |e_n\rangle, \dots\}$ es un conjunto de funciones ortogonales por cuanto

$$\langle e_n | e_m \rangle = \delta_{nm} \| |e_n\rangle \|^2 \Rightarrow \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ \| |e_n\rangle \|^2 & \text{si } n = m \end{cases} \begin{cases} \int_0^{2\pi} dx \sin(nx) \sin(mx) = 0 \\ \int_0^{2\pi} dx \cos(nx) \sin(mx) = 0 \\ \int_0^{2\pi} dx \cos(nx) \cos(mx) = 0 \\ \int_0^{2\pi} dx = 2\pi & \text{si } n = m = 0 \\ \int_0^{2\pi} dx \cos^2(nx) = \pi & \text{si } n = m = 2k - 1 \\ \int_0^{2\pi} dx \sin^2(nx) = \pi & \text{si } n = m = 2k \end{cases}$$

con $k = 1, 2, 3, \dots$, también.

Podremos construir una base ortonormal de funciones: $\{|\hat{e}_1\rangle, |\hat{e}_2\rangle, |\hat{e}_3\rangle, \dots, |\hat{e}_n\rangle, \dots\}$ de la forma

$$|\hat{e}_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad |\hat{e}_{2n-1}\rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nx) \quad \text{y} \quad |\hat{e}_{2n}\rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(nx).$$

Cualquier función definida en el intervalo $[0, 2\pi]$ puede expresarse en términos de esta base como

$$|f\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} C_i |e_i\rangle \Rightarrow C_i = \langle e_i | f \rangle = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} dx f(x) = a_0 & \text{si } i = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} dx f(x) \cos(nx) = a_{2n-1} & \text{si } i = 2n - 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} dx f(x) \sin(nx) = a_{2n} & \text{si } i = 2n \end{cases}$$

donde los C_i son los coeficientes de Fourier

2. Polinomios de Legendre: Otro de los ejemplos típicos lo constituyen los llamados polinomios de Legendre. Polinomios $P_n(x)$ definidos en el intervalo $[-1, 1]$ y generados a partir de la Fórmula de Rodrigues⁹

$$P_n(x) = \frac{1}{n! 2^n} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

con $P_0(x) = 1$. Algunos de estos polinomios son:

$$P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \quad P_3(x) = \frac{x}{2}(5x^2 - 3), \quad P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3), \dots$$

⁹BENJAMIN OLINDE RODRIGUES (1794 Burdeos, Francia - 1851, París Francia) Banquero, matemático y activista político socialista francés durante la Revolución Francesa. De origen judío, y cuyas contribuciones fundamentales como la fórmula para la generación de Polinomios de Legendre, permanecieron olvidadas por mucho tiempo.

Como veremos más adelante, los polinomios de Legendre son solución de la ecuación diferencial

$$(1 - x^2) y'' - 2x y' + \lambda(\lambda + 1)y = 0.$$

Es fácil comprobar que los polinomios de Legendre $|P_\alpha\rangle = P_\alpha(x)$ son mutuamente ortogonales con un producto interno definido como

$$\langle P_n | P_m \rangle = \int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = \frac{2}{2n + 1} \delta_{nm},$$

con norma definida por

$$\|P_n\|^2 = \langle P_n | P_n \rangle = \int_{-1}^1 P_n^2(x) dx = \frac{2}{2n + 1}.$$

Por lo tanto, cualquier función en el intervalo $[-1, 1]$ puede ser expresada en esa base.

$$f(x) = |F\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} a_k |P_k\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\langle P_k | F \rangle}{\langle P_k | P_k \rangle} |P_k\rangle.$$

Si $f(x)$ es un polinomio

$$f(x) = \sum_{n=0}^m b_n x^n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k |P_k\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x)$$

no se requiere hacer ninguna integral por cuanto los coeficientes a_n se determinan a través de un sistema de ecuaciones algebraicas. Por ejemplo, para el caso de $f(x) = x^2$ tendremos

$$\begin{aligned} f(x) = x^2 &= a_0 P_0(x) + a_1 P_1(x) + a_2 P_2(x) \\ &= a_0 + a_1 x + \frac{1}{2} a_2 (3x^2 - 1) \\ &= \frac{1}{3} P_0(x) + \frac{2}{3} P_2(x). \end{aligned}$$

2.3.5. Ortogonalización

Hemos visto que un conjunto de vectores ortogonales forman una base para un espacio vectorial. Ahora bien, siempre es posible construir un conjunto de vectores ortogonales a partir de un conjunto de vectores linealmente independientes. Este método de "ortogonalización" se conoce como el método de Gram-Schmidt¹⁰, en honor de estos dos matemáticos alemanes que NO inventaron el método pero lo hicieron famoso. Al parecer, este procedimiento de ortogonalización se le debe al matemático francés P.S. Laplace.

Dado un conjunto de vectores linealmente independientes, $\{|v_1\rangle, |v_2\rangle, |v_3\rangle, \dots, |v_n\rangle\}$ que expanden un espacio Euclidiano de dimensión finita, E^n . Entonces siempre se puede construir un conjunto ortogonal de vectores, $\{|e_1\rangle, |e_2\rangle, |e_3\rangle, \dots, |e_n\rangle\}$ que también expandan E^n de la siguiente forma:

¹⁰ERHARD SCHMIDT (1876, Estonia - 1959 Alemania). Matemático alemán fundador del primer instituto de matemáticas aplicadas de Berlín. Alumno de Hilbert, Schmidt hizo sus mayores contribuciones en el campo de Ecuaciones Integrales y Teoría de Funciones en el Espacio de Hilbert.

$$\begin{aligned}
|e_1\rangle &\equiv |v_1\rangle \\
|e_2\rangle &\equiv |v_2\rangle - \frac{\langle v_2 | e_1 \rangle}{\langle e_1 | e_1 \rangle} |e_1\rangle && \setminus \langle e_2 | e_1 \rangle = 0 \\
|e_3\rangle &\equiv |v_3\rangle - \frac{\langle v_3 | e_2 \rangle}{\langle e_2 | e_2 \rangle} |e_2\rangle - \frac{\langle v_3 | e_1 \rangle}{\langle e_1 | e_1 \rangle} |e_1\rangle && \setminus \begin{cases} \langle e_3 | e_1 \rangle = 0 \\ \langle e_3 | e_2 \rangle = 0 \end{cases} \\
|e_4\rangle &\equiv |v_4\rangle - \frac{\langle v_4 | e_3 \rangle}{\langle e_3 | e_3 \rangle} |e_3\rangle - \frac{\langle v_4 | e_2 \rangle}{\langle e_2 | e_2 \rangle} |e_2\rangle - \frac{\langle v_4 | e_1 \rangle}{\langle e_1 | e_1 \rangle} |e_1\rangle && \setminus \begin{cases} \langle e_4 | e_1 \rangle = 0 \\ \langle e_4 | e_2 \rangle = 0 \\ \langle e_4 | e_3 \rangle = 0 \end{cases} \\
\vdots & && \vdots \\
|e_n\rangle &\equiv |v_n\rangle - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\langle v_n | e_i \rangle}{\langle e_i | e_i \rangle} |e_i\rangle && \setminus \begin{cases} \langle e_4 | e_1 \rangle = 0 \\ \langle e_4 | e_2 \rangle = 0 \\ \langle e_4 | e_3 \rangle = 0 \\ \vdots \\ \langle e_4 | e_{n-1} \rangle = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Así siempre es posible construir una base ortonormal a partir de un conjunto de vectores linealmente independientes. Esta base ortogonal será única en E^n , si existe otra sus vectores serán proporcionales. Más aún, cada espacio vectorial \mathbf{V}^n de dimensión finita tendrá una base ortogonal asociada.

Ejemplos de ortogonalización

1. Un subespacio de \mathbf{V}^4 , expandido por los siguientes vectores

$$|v_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad |v_2\rangle = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad |v_3\rangle = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

tendrá una base ortogonal asociada dada por

$$|e_1\rangle \equiv |v_3\rangle = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$|e_2\rangle \equiv |v_2\rangle - \frac{\langle v_2 | e_1 \rangle}{\langle e_1 | e_1 \rangle} |e_1\rangle = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - (-1) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$|e_3\rangle \equiv |v_1\rangle - \frac{\langle v_1 | e_2 \rangle}{\langle e_2 | e_2 \rangle} |e_2\rangle - \frac{\langle v_1 | e_1 \rangle}{\langle e_1 | e_1 \rangle} |e_1\rangle =$$

$$|e_3\rangle \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} - \left(\frac{9}{12}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - (1) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} \\ \frac{5}{4} \\ -\frac{7}{4} \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix};$$

y la base ortonormal asociada será

$$|\hat{e}_1\rangle = \frac{|e_1\rangle}{\sqrt{\langle e_1 | e_1 \rangle}} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad |\hat{e}_2\rangle = \frac{|e_2\rangle}{\sqrt{\langle e_2 | e_2 \rangle}} = \left(\frac{\sqrt{12}}{12}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix};$$

$$|\hat{e}_3\rangle = \frac{|e_3\rangle}{\sqrt{\langle e_3 | e_3 \rangle}} = \left(\frac{2\sqrt{3}}{9}\right) \begin{pmatrix} \frac{5}{4} \\ \frac{5}{4} \\ -\frac{7}{4} \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

2. Para el caso de \mathfrak{R}^2 es muy claro. Si tenemos dos vectores $|v_1\rangle$ y $|v_2\rangle$ linealmente independientes,

$$|v_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad |v_2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

elegimos $|e_1\rangle \equiv |v_2\rangle$ entonces, $|e_2\rangle$ vendrá dado por

$$|e_2\rangle \equiv |v_1\rangle - \frac{\langle v_1 | e_1 \rangle}{\langle e_1 | e_1 \rangle} |e_1\rangle \Rightarrow |e_2\rangle \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

tal y como se esperaba, el otro vector ortogonal es el canónico.

3. Consideramos el espacio de polinomios, \mathcal{P}^n , de grado $g \leq n$ definidos en el intervalo $[-1, 1]$. Este espacio vectorial tendrá como una de las posibles bases al conjunto $\{1, t, t^2, t^3, \dots, t^n\}$ con el producto interno definido por $\langle f | g \rangle = \int_{-1}^1 dx f(x) g(x)$.

Por lo tanto, se procede a construir una base ortogonal de la forma:

$$|e_0\rangle \equiv |v_0\rangle = 1$$

$$|e_1\rangle \equiv |v_1\rangle - \frac{\langle v_1 | e_0 \rangle}{\langle e_0 | e_0 \rangle} |e_0\rangle = t$$

$$\text{ya que } \langle v_1 | e_0 \rangle = \int_{-1}^1 dx t = 0; \quad \langle e_0 | e_0 \rangle = \int_{-1}^1 dx = 2,$$

$$|e_2\rangle \equiv |v_2\rangle - \frac{\langle v_2 | e_1 \rangle}{\langle e_1 | e_1 \rangle} |e_1\rangle - \frac{\langle v_2 | e_0 \rangle}{\langle e_0 | e_0 \rangle} |e_0\rangle = t^2 - \frac{1}{3}$$

$$\langle v_2 | e_0 \rangle = \int_{-1}^1 dx t^2 = \frac{2}{3}; \quad \langle v_2 | e_1 \rangle = \int_{-1}^1 dx t^3 = 0;$$

$$\langle e_1 | e_1 \rangle = \int_{-1}^1 dx t^2 = \frac{2}{3},$$

$$|e_3\rangle \equiv |v_3\rangle - \frac{\langle v_3 | e_2 \rangle}{\langle e_2 | e_2 \rangle} |e_2\rangle - \frac{\langle v_3 | e_1 \rangle}{\langle e_1 | e_1 \rangle} |e_1\rangle - \frac{\langle v_3 | e_0 \rangle}{\langle e_0 | e_0 \rangle} |e_0\rangle = t^3 - \frac{3}{5}t$$

$$\langle v_3 | e_0 \rangle = \int_{-1}^1 dx t^3 = 0; \quad \langle v_3 | e_1 \rangle = \int_{-1}^1 dx t^4 = \frac{2}{5}$$

$$\langle v_3 | e_2 \rangle = \int_{-1}^1 dx t^3 (t^2 - \frac{1}{3}) = 0; \quad \langle e_2 | e_2 \rangle = \int_{-1}^1 dx (t^2 - \frac{1}{3})^2 = \frac{8}{45},$$

⋮

Podemos resumir los cálculos anteriores como se muestra a continuación:

| | | |
|---------------|---|--|
| $ v_n\rangle$ | $ e_n\rangle$ | $ \hat{e}_n\rangle$ |
| 1 | 1 | $\sqrt{\frac{1}{2}}$ |
| t | t | $\sqrt{\frac{3}{2}}t$ |
| t^2 | $(t^2 - \frac{1}{3})$ | $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}(3t^2 - 1)$ |
| t^3 | $(t^3 - \frac{3}{5}t)$ | $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}}(5t^3 - 3t)$ |
| t^4 | $(t^4 - \frac{6}{7}t^2 + \frac{3}{35})$ | $\frac{1}{8}\sqrt{\frac{9}{2}}(35t^4 - 30t^2 + 3)$ |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ |

2.3.6. Complementos ortogonales y descomposición ortogonal

Sea un subespacio $\mathbf{S} \subset \mathbf{V}$, un elemento $|\bar{v}_i\rangle \in \mathbf{V}$ se dice ortogonal a \mathbf{S} si $\langle s_k | \bar{v}_i \rangle = 0 \quad \forall |s_k\rangle \in \mathbf{S}$, es decir, es ortogonal a todos los elementos de \mathbf{S} . El conjunto $\{|\bar{v}_1\rangle, |\bar{v}_2\rangle, |\bar{v}_3\rangle, \dots, |\bar{v}_m\rangle\}$ de todos los

elementos ortogonales a \mathbf{S} , se denomina S -perpendicular y se denota como \mathbf{S}^\perp . Es fácil demostrar que \mathbf{S}^\perp es un subespacio, aún si \mathbf{S} no lo es.

Dado un espacio euclidiano de dimensión infinita $\mathbf{V} : \{|v_1\rangle, |v_2\rangle, |v_3\rangle, \dots, |v_n\rangle, \dots\}$ y un subespacio de \mathbf{V} con dimensión finita, $\mathbf{S} \subset \mathbf{V}$ y $\dim \mathbf{S} = m$. Entonces $\forall |v_k\rangle \in \mathbf{V}$ puede expresarse como la suma de dos vectores $|s_k\rangle \in \mathbf{S} \wedge |s_k\rangle^\perp \in \mathbf{S}^\perp$. Esto es

$$|v_k\rangle = |s_k\rangle + |s_k\rangle^\perp, \quad |s_k\rangle \in \mathbf{S} \quad \wedge \quad |s_k\rangle^\perp \in \mathbf{S}^\perp.$$

Más aún, la norma de $|v_k\rangle$ se calcula a través del teorema de Pitágoras generalizado

$$\| |v_k\rangle \|^2 = \| |s_k\rangle \|^2 + \| |s_k\rangle^\perp \|^2.$$

La demostración es sencilla. Primero se prueba que la descomposición ortogonal $|v_k\rangle = |s_k\rangle + |s_k\rangle^\perp$ es siempre posible. Para ello recordamos que $\mathbf{S} \subset \mathbf{V}$ es de dimensión finita, por lo tanto existe una base ortonormal $\{|\hat{e}_1\rangle, |\hat{e}_2\rangle, |\hat{e}_3\rangle \dots |\hat{e}_m\rangle\}$ para \mathbf{S} . Es decir, dado un $|v_k\rangle$ definimos los elementos $|s_k\rangle$ y $|s_k\rangle^\perp$ como siguen

$$|s_k\rangle = \sum_{i=1}^m \langle v_k | \hat{e}_i \rangle |\hat{e}_i\rangle \quad \wedge \quad |s_k\rangle^\perp = |v_k\rangle - |s_k\rangle$$

Nótese que $\langle v_k | \hat{e}_i \rangle |\hat{e}_i\rangle$ es la proyección de $|v_k\rangle$ a lo largo de $|\hat{e}_i\rangle$ y $|s_k\rangle$ se expresa combinación lineal de la base de \mathbf{S} , por lo tanto, está en \mathbf{S} . Por otro lado

$${}^\perp \langle s_k | \hat{e}_i \rangle = \langle v_k - s_k | \hat{e}_i \rangle = \langle v_k | \hat{e}_i \rangle - \langle s_k | \hat{e}_i \rangle = \langle v_k | \hat{e}_i \rangle - \left[\sum_{j=1}^m \langle v_k | \hat{e}_j \rangle \langle \hat{e}_j | \right] |\hat{e}_i\rangle = 0 \Rightarrow |s_k\rangle^\perp \perp |\hat{e}_j\rangle$$

lo cual indica que $|s_k\rangle^\perp \in \mathbf{S}^\perp$.

Podemos ir un poco más allá. La descomposición $|v_k\rangle = |s_k\rangle + |s_k\rangle^\perp$ es única en \mathbf{V} . Para ello suponemos que existen dos posibles descomposiciones, vale decir

$$|v_k\rangle = |s_k\rangle + |s_k\rangle^\perp \quad \wedge \quad |v_k\rangle = |t_k\rangle + |t_k\rangle^\perp, \quad \text{con } |s_k\rangle \wedge |t_k\rangle \in \mathbf{S} \quad \wedge \quad |s_k\rangle^\perp \wedge |t_k\rangle^\perp \in \mathbf{S}^\perp.$$

Por lo tanto

$$|v_k\rangle - |v_k\rangle = (|s_k\rangle + |s_k\rangle^\perp) - (|t_k\rangle + |t_k\rangle^\perp) = 0 \Rightarrow |s_k\rangle - |t_k\rangle = |t_k\rangle^\perp - |s_k\rangle^\perp.$$

Pero $|s_k\rangle - |t_k\rangle \in \mathbf{S}$, es decir, ortogonal a todos los elementos de \mathbf{S}^\perp y $|s_k\rangle - |t_k\rangle = |t_k\rangle^\perp - |s_k\rangle^\perp$, con lo cual $|s_k\rangle - |t_k\rangle \equiv |0\rangle$ que es el único elemento que es ortogonal a el mismo y en consecuencia la descomposición $|v_k\rangle = |s_k\rangle + |s_k\rangle^\perp$ es única.

Finalmente, con la definición de norma

$$\| |v_k\rangle \|^2 = \| |s_k\rangle + |s_k\rangle^\perp \|^2 = (\langle s_k | + \langle s_k |^\perp) (|s_k\rangle + |s_k\rangle^\perp) = \langle s_k | s_k \rangle + {}^\perp \langle s_k | s_k \rangle^\perp = \| |s_k\rangle \|^2 + \| |s_k\rangle^\perp \|^2.$$

Así, dado \mathbf{S}^m un subespacio de \mathbf{V} de dimensión finita y dado un $|v_k\rangle \in \mathbf{V}$ el elemento

$$|s_k\rangle \in \mathbf{S} \Rightarrow |s_k\rangle = \sum_{i=1}^m \langle v_k | e_i \rangle |e_i\rangle,$$

será la proyección de $|v_k\rangle$ en \mathbf{S} .

En general, dado un vector $|x\rangle \in \mathbf{V}$ y un subespacio de \mathbf{V} con dimensión finita, $\mathbf{S}^m \subset \mathbf{V}$ y $\dim \mathbf{S} = m$, entonces la distancia de $|x\rangle$ a \mathbf{S}^m es la norma de la componente de $|x\rangle$, perpendicular a \mathbf{S}^m , y más aún esa distancia será mínima y $|x\rangle_{\mathbf{S}^m}$ la proyección de $|x\rangle$, en \mathbf{S}^m será el elemento de \mathbf{S}^m más próximo a $|x\rangle$ y, por la mejor aproximación.

2.3.7. Ejercicio

Sea \mathcal{P}_n el conjunto de todos los polinomios de grado n , en x , con coeficientes reales:

$$|p_n\rangle \Rightarrow p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$$

1. Demostrar que \mathcal{P}_n es un espacio vectorial respecto a la suma de polinomios y a la multiplicación de polinomios por un escalar (número real).
2. Si los coeficientes a_i son enteros ¿ \mathcal{P}_n será un espacio vectorial? ¿Por qué?
3. ¿Cuál de los siguientes subconjuntos de \mathcal{P}_n es un subespacio vectorial?
 - a) El polinomio cero y todos los polinomios de grado $n - 1$.
 - b) El polinomio cero y todos los polinomios de grado par.
 - c) Todos los polinomios que tienen a x como un factor (grado $n > 1$).
 - d) Todos los polinomios que tienen a $x - 1$ como un factor.
4. ¿Cuál de los siguientes polinomios pertenece al subespacio de \mathcal{P} ? Subespacio \mathcal{P} generado por: $|x1\rangle = x^3 + 2x + 1$; $|x2\rangle = x^2 - 2$; $|x3\rangle = x^3 + x$;
 - a) $x^2 - 2x + 1$
 - b) $x^4 + 1$
 - c) $-\frac{1}{2}x^3 + \frac{5}{2}x^2 - x - 1$
 - d) $x - 5$
5. Probar que los polinomios

$$|x1\rangle = 1; \quad |x2\rangle = x; \quad |x3\rangle = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}; \quad |x4\rangle = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x;$$

forman una base en \mathcal{P}_4 . Expresar $|p\rangle = x^2$; $|q\rangle = x^3$ en función de esa base.

6. Sean $|p_n\rangle = p(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$; $|q_n\rangle = q(x) = \sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i \in \mathcal{P}_n$. Considérese la siguiente definición:

$$\langle q_n | p_n \rangle \Rightarrow a_0 b_0 + a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_{n-1} b_{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i b_i$$

- a) Muestre que ésta es una buena definición de producto interno.
 - b) Con esta definición de producto interior ¿Se puede considerar \mathcal{P}_n un subespacio de $\mathcal{C}_{[a,b]}$? ¿Por qué?
7. Considerando estas definiciones de producto interior en \mathcal{P}_n
 - a) $\langle q_n | p_n \rangle = \int_{-1}^1 p(x)q(x)dx$
 - b) $\langle q_n | p_n \rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx$

Encontrar la distancia y el ángulo entre los siguientes pares de vectores en \mathcal{P}_3

- a) $|x1\rangle = 1; \quad |x2\rangle = x$
 b) $|x1\rangle = 2x; \quad |x2\rangle = x^2$

8. Encontrar la proyección perpendicular de los siguientes vectores en $\mathcal{C}_{[-1,1]}$ (espacio de funciones continuas en el intervalo $[-1,1]$) al subespacio generado por los polinomios: $1, x, x^2 - 1$. Calcular la distancia de cada una de estas funciones al subespacio mencionado.

- a) $f(x) = x^n; \quad n$ entero
 b) $f(x) = \text{sen}(x)$
 c) $f(x) = 3x^2$

2.4. Aproximación de funciones

2.4.1. Condiciones para la aproximación de funciones

Sea $\{|v_1\rangle, |v_2\rangle, |v_3\rangle, \dots, |v_n\rangle, \dots\}$ un espacio euclidiano de dimensión infinita, \mathbf{V} , y un subespacio $\mathbf{S}^m \subset \mathbf{V}$, con dimensión finita $\dim \mathbf{S} = m$, y sea un elemento $|v_i\rangle \in \mathbf{V}$. La proyección de $|v_i\rangle$ en $\mathbf{S}^m, |s_i\rangle$, será el elemento de \mathbf{S}^m más próximo a $|v_i\rangle$. En otras palabras

$$\| |v_i\rangle - |s_i\rangle \| \leq \| |v_i\rangle - |t_i\rangle \| \quad \forall |t_i\rangle \in \mathbf{S}.$$

La demostración se sigue así

$$|v_i\rangle - |t_i\rangle = (|v_i\rangle - |s_i\rangle) + (|s_i\rangle - |t_i\rangle) \Rightarrow \| |v_i\rangle - |t_i\rangle \|^2 = \| |v_i\rangle - |s_i\rangle \|^2 + \| |s_i\rangle - |t_i\rangle \|^2,$$

ya que $|v_i\rangle - |s_i\rangle = |s_k\rangle^\perp \in \mathbf{S}^\perp \wedge |s_i\rangle - |t_i\rangle \in \mathbf{S}$, y vale el teorema de Pitágoras generalizado.

Ahora bien, como

$$\| |s_i\rangle - |t_i\rangle \|^2 \geq 0 \Rightarrow \| |v_i\rangle - |t_i\rangle \|^2 \geq \| |v_i\rangle - |s_i\rangle \|^2 \Rightarrow \| |v_i\rangle - |t_i\rangle \| \geq \| |v_i\rangle - |s_i\rangle \|.$$

Desarrollemos la aproximación de funciones continuas, reales de variable real, definidas en $[0, 2\pi]$, $\mathcal{C}_{[0,2\pi]}^\infty$, mediante funciones trigonométricas y con el producto interno definido por: $\langle f | g \rangle = \int_0^{2\pi} dx f(x) g(x)$. Hemos visto que para este espacio vectorial tenemos una base ortonormal definida por

$$|\hat{e}_0\rangle = \varphi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad |\hat{e}_{2n-1}\rangle = \varphi_{2n-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nx) \text{ y } |\hat{e}_{2n}\rangle = \varphi_{2n}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \text{sen}(nx).$$

Por lo tanto, cualquier función definida en el intervalo $[0, 2\pi]$ puede expresarse en términos de esta base como mostramos a continuación

$$|f\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} C_i |\hat{e}_i\rangle,$$

$$\text{con } C_i = \langle \hat{e}_i | f \rangle = \int_0^{2\pi} dx f(x) \varphi_i(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} dx f(x) = a_0 & \text{si } i = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} dx f(x) \cos(nx) = a_{2n-1} & \text{si } i = 2n - 1 \\ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} dx \text{sen}(nx) f(x) = a_{2n} & \text{si } i = 2n \end{cases}$$

Los C_i son los coeficientes de Fourier. Es decir, cualquier función puede ser expresada como una serie de Fourier de la forma

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(kx) + b_k \operatorname{sen}(kx)] ,$$

donde

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} dx f(x) \cos(kx) \quad \wedge \quad b_k = \int_0^{2\pi} dx f(x) \operatorname{sen}(kx) f(x) .$$

Es claro que para la aproximación de funciones por funciones trigonométricas cuyos coeficientes son los coeficientes de Fourier constituyen la mejor aproximación. Por lo tanto, de todas las funciones $\mathcal{F}(x) \in \mathcal{C}_{[0,2\pi]}^{\infty}$ las funciones trigonométricas, $\mathcal{T}(x)$ minimizan la desviación cuadrática media

$$\int_0^{2\pi} dx (f(x) - \mathcal{P}(x))^2 \geq \int_0^{2\pi} dx (f(x) - \mathcal{T}(x))^2 .$$

2.4.2. El Método de mínimos cuadrados

Una de las aplicaciones más importantes en la aproximación de funciones es el método de mínimos cuadrados. La idea es determinar el valor más aproximado de una cantidad física, c , a partir de un conjunto de medidas experimentales: $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$. La intención es encontrar el mejor valor de c a partir de ese conjunto de datos experimentales.

Para ello asociamos el conjunto de medidas $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$ con las componentes de un vector $|x\rangle$ en \mathfrak{R}^n . Así tendremos que

$$|x\rangle = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \quad \wedge \quad c|y\rangle = (c, c, c, \dots, c) ,$$

y, por lo tanto la mejor aproximación de $c|y\rangle$, que llamaremos $c'|y\rangle$, será la proyección perpendicular de $|x\rangle$ (las medidas) sobre el subespacio generado por $|y\rangle$. Esto es

$$c' = \frac{\langle x | y \rangle}{\langle y | y \rangle} = \frac{x_1 + x_2 + x_3, \dots + x_n}{n} ,$$

que no es otra cosa que el promedio aritmético de las medidas. Es claro que la proyección perpendicular de $|x\rangle$ sobre $|y\rangle$ hace mínimo la distancia entre el subespacio perpendicular generado por $|y\rangle$ y el vector $|x\rangle$. Es decir, hace mínimo el cuadrado de esa distancia

$$[d(|x\rangle, c'|y\rangle)]^2 = \langle x - c'y | x - c'y \rangle = \sum_{i=1}^n (x_i - c')^2 .$$

Este problema se puede generalizar si se desea medir dos (o n) cantidades. Para el caso de dos cantidades extendemos la dimensión del espacio y los resultados experimentales se expresarán como un vector de $2n$ dimensiones

$$|x\rangle = (x_{11}, x_{12}, x_{13}, \dots, x_{1n}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, \dots, x_{2n}) ,$$

mientras que los vectores que representan las cantidades más aproximadas serán

$$c'_1 |y_1\rangle = \left(\underbrace{c'_1, c'_1, c'_1, \dots, c'_1}_n, \underbrace{0, 0, 0, \dots, 0}_n \right) \quad \wedge \quad c'_2 |y_2\rangle = (0, 0, 0, \dots, 0, c'_2, c'_2, c'_2, \dots, c'_2) .$$

Ahora $\{|y_1\rangle, |y_2\rangle\}$ expanden un subespacio vectorial sobre el cual $|x\rangle$ tiene como proyección ortogonal $c'_1 |y_1\rangle + c'_2 |y_2\rangle$ y consecuentemente $|x - c'_1 y_1 - c'_2 y_2\rangle$ será perpendicular a $\{|y_1\rangle, |y_2\rangle\}$, por lo tanto

$$c'_1 = \frac{\langle x | y_1 \rangle}{\langle y_1 | y_1 \rangle} = \frac{x_{11} + x_{12} + x_{13}, \dots + x_{1n}}{n} \quad \wedge \quad c'_2 = \frac{\langle x | y_2 \rangle}{\langle y_2 | y_2 \rangle} = \frac{x_{21} + x_{22} + x_{23}, \dots + x_{2n}}{n}.$$

La consecuencia más conocida de esta aproximación de funciones es el “ajuste” de un conjunto de datos experimentales $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \dots, (x_n, y_n)\}$ a la ecuación de una recta $y = cx$. En este caso, el planteamiento del problema se reduce a encontrar el vector $c' |x\rangle$, en el subespacio $\mathbf{S}(|x\rangle)$, que esté lo más cercano posible al vector $|y\rangle = c |x\rangle$.

Por lo tanto $\|c'x - y\|^2$ será lo menor posible y $|c'x - y\rangle$ será perpendicular a $\mathbf{S}(|x\rangle)$, por lo que

$$\langle x | c'x - y \rangle = 0 \Rightarrow c' = \frac{\langle x | y \rangle}{\langle x | x \rangle} = \frac{x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 \dots + x_n y_n}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2, \dots + x_n^2}.$$

Para tratar de aclarar lo antes expuesto, consideremos tres ejemplos que muestran la versatilidad del método y la ventaja de disponer de una clara notación. Primeramente, mostraremos el caso más utilizado de construir el mejor ajuste lineal a un conjunto de datos experimentales. Buscaremos la mejor recta que describe ese conjunto de puntos. Luego mostraremos la aplicación del método para buscar la mejor función bilineal, vale decir que ajustaremos la mejor función de dos variables con una contribución lineal de sus argumentos: $f = f(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2$. Finalmente, mostraremos como se puede utilizar el método de mínimos cuadrados para ajustar un conjunto de datos experimentales a un polinomio de cualquier grado. Veamos los tres casos:

1. Si el conjunto de datos experimentales es: $\{(1, 2), (3, 2), (4, 5), (6, 6)\}$ ¿Cuál es la recta que ajusta más acertadamente a estos puntos? La ecuación queda como

$$|y\rangle = c |x\rangle \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow c' = \frac{\langle x | y \rangle}{\langle x | x \rangle} = \frac{2 + 6 + 20 + 36}{1 + 9 + 16 + 36} = \frac{32}{31} = 1,03226.$$

Se puede generalizar este procedimiento cuando se tiene que una cantidad y que es una combinación lineal desconocida de un conjunto de cantidades

$$y = c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 + \dots + c_m x_m.$$

En este caso se ejecutarán n experimentos con $n > m$ y el conjunto de medidas experimentales será

$$(y_1, x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1m}; y_2, x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2m}; y_3, x_{31}, x_{32}, \dots, x_{3m}; \dots, y_n, x_{n1}, x_{n2}, x_{n3}, \dots, x_{nm})$$

y a partir de éstas generamos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} y_1 &= c'_1 x_{11} + c'_2 x_{12} + c'_3 x_{13}, \dots + c'_m x_{1m} \\ y_2 &= c'_1 x_{21} + c'_2 x_{22} + c'_3 x_{23}, \dots + c'_m x_{2m} \\ y_3 &= c'_1 x_{31} + c'_2 x_{32} + c'_3 x_{33}, \dots + c'_m x_{3m} \\ &\vdots \\ y_n &= c'_1 x_{n1} + c'_2 x_{n2} + c'_3 x_{n3}, \dots + c'_m x_{nm} \end{aligned}$$

en el cual las incógnitas $\{c'_1, c'_2, c'_3, \dots, c'_m\}$ hacen que el lado derecho de las ecuaciones antes mencionadas sean los más próximas a las $\{y_1, y_2, y_3, \dots, y_n\}$, por lo tanto, si consideramos los vectores

$$|x_1\rangle = (x_{11}, \dots, x_{1n}); |x_2\rangle = (x_{21}, \dots, x_{2n}); \dots |x_m\rangle = (x_{m1}, \dots, x_{mn}); |y\rangle = (y_{m1}, \dots, y_n)$$

los vectores $\{|x_1\rangle, |x_2\rangle, \dots, |x_m\rangle\}$ expanden el subespacio $\mathbf{S}(|x_1\rangle, |x_2\rangle, \dots, |x_m\rangle)$ donde está la aproximación de $|y\rangle$. La distancia de este subespacio al vector $|y\rangle$, será mínima. Esto es

$$[d(\mathbf{S}(c'_i |x_i), |y\rangle)]^2 = \langle \mathbf{S}(c'_i |x_i) - y | \mathbf{S}(c'_i |x_i) - y \rangle$$

y $|\mathbf{S}(c'_i |x_i) - y\rangle$ será ortogonal a los $|x_i\rangle$:

$$\langle x_j | \mathbf{S}(c'_i |x_i) - y \rangle \equiv \langle x_j | \sum_{i=1}^m c'_i |x_i\rangle - y \rangle = 0 \quad \forall \quad i, j = 1, 2, 3, \dots, m$$

Podemos construir el sistema de ecuaciones normales para la aproximación que hemos considerado:

$$\begin{aligned} c'_1 \langle x_1 | x_1 \rangle + c'_2 \langle x_1 | x_2 \rangle + c'_3 \langle x_1 | x_3 \rangle + \dots + c'_m \langle x_1 | x_m \rangle &= \langle x_1 | y \rangle \\ c'_1 \langle x_2 | x_1 \rangle + c'_2 \langle x_2 | x_2 \rangle + c'_3 \langle x_2 | x_3 \rangle + \dots + c'_m \langle x_2 | x_m \rangle &= \langle x_2 | y \rangle \\ \vdots &\vdots \\ c'_1 \langle x_m | x_1 \rangle + c'_2 \langle x_m | x_2 \rangle + c'_3 \langle x_m | x_3 \rangle + \dots + c'_m \langle x_m | x_m \rangle &= \langle x_m | y \rangle \end{aligned} \quad (2.1)$$

donde, tal y como se ha señalado, las incógnitas son las $\{c'_1, c'_2, c'_3, \dots, c'_m\}$.

2. Se sospecha que una determinada propiedad de un material cumple con la ecuación $y = ax_1 + bx_2$. Si al realizar un conjunto de medidas experimentales obtenemos

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ x_{11} \\ x_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} y_2 \\ x_{21} \\ x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} y_3 \\ x_{31} \\ x_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} y_4 \\ x_{41} \\ x_{42} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Es claro que tenemos un subespacio de $m = 2$ dimensiones y hemos hecho $n = 4$ veces el experimento. Los vectores considerados arriba serán

$$|x_1\rangle = (1, 2, 1, 1); \quad |x_2\rangle = (2, 1, 1, -1); \quad |y\rangle = (15, 12, 10, 0)$$

por lo tanto, vectorialmente $|y\rangle = a|x_1\rangle + b|x_2\rangle$, es decir las ecuaciones normales (2.1) se escriben

$$\left. \begin{aligned} 7a + 4b &= 49 \\ 4a + 7b &= 52 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} a &= \frac{45}{11} \\ b &= \frac{56}{11} \end{aligned} \right\} \Rightarrow 11y = 45x_1 + 56x_2$$

3. Se puede extender el razonamiento anterior y generar un ajuste "lineal no lineal". Esto es: el ajuste lineal es en los coeficientes, pero la funcionalidad de la ley a la cual queremos ajustar los datos puede ser un polinomio de cualquier orden. Ese es el caso de una parábola que ajusta al siguiente conjunto de puntos

$$\{(0, 1), (1, 3), (2, 7), (3, 15)\} \Leftrightarrow y = ax^2 + bx + c$$

Las ecuaciones toman la forma de

$$\begin{aligned} 1 &= 0 + 0 + c \\ 3 &= a + b + c \\ 7 &= 4a + 2b + c \\ 15 &= 9a + 3b + c \end{aligned}$$

y los vectores construidos a partir de los datos experimentales serán

$$|x_1\rangle = (0, 1, 4, 9); \quad |x_2\rangle = (0, 1, 2, 3); \quad |x_3\rangle = (1, 1, 1, 1); \quad |y\rangle = (1, 3, 7, 15).$$

Una vez más, la ecuación vectorial sería $|y\rangle = a|x_1\rangle + b|x_2\rangle + c|x_3\rangle$ y las ecuaciones normales (2.1) para este sistema se construyen como

$$\left. \begin{array}{r} 136 = 98a + 36b + 14c \\ 62 = 36a + 14b + 6c \\ 26 = 14a + 6b + 4c \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = -6 \\ b = \frac{113}{5} \\ c = -\frac{32}{5} \end{array} \right\} \Rightarrow y = -6x^2 + \frac{113}{5}x - \frac{32}{5}.$$

2.4.3. Interpolación polinomial de puntos experimentales

Muchas veces nos encontramos con la situación en la cual tenemos un conjunto de (digamos n) medidas o puntos experimentales $\{(x_1, y_1 = f(x_1)), (x_2, y_2 = f(x_2)), \dots, (x_n, y_n = f(x_n))\}$ y para modelar ese experimento quisiéramos una función que ajuste estos puntos. El tener una función nos provee la gran ventaja de poder intuir o aproximar los puntos que no hemos medido. La función candidata más inmediata es un polinomio y debemos definir el grado del polinomio y la estrategia que aproxime esos puntos. Puede ser que no sea lineal el polinomio y queramos ajustar esos puntos a un polinomio tal que éste pase por los puntos experimentales. Queda entonces por decidir la estrategia. Esto es: si construimos la función como “trozos” de polinomios que ajusten a subconjuntos $\{(x_1, y_1 = f(x_1)), (x_2, y_2 = f(x_2)), \dots, (x_m, y_m = f(x_m))\}$ con $m < n$, de los puntos experimentales. En este caso tendremos una función de interpolación para cada conjunto de puntos. También podemos ajustar la función a todo el conjunto de puntos experimentales y, en ese caso el máximo grado del polinomio que los interpole será de grado $n - 1$. Para encontrar este polinomio lo expresamos como una combinación lineal de Polinomios de Legendre. Esto es

$$\mathcal{P}(x) = f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} C_k |P_k\rangle = \sum_{k=0}^{n-1} C_k P_k(x) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} y_1 = f(x_1) = C_0 P_0(x_1) + C_1 P_1(x_1) + \dots + C_{n-1} P_{n-1}(x_1) \\ y_2 = f(x_2) = C_0 P_0(x_2) + C_1 P_1(x_2) + \dots + C_{n-1} P_{n-1}(x_2) \\ \vdots \\ y_n = f(x_n) = C_0 P_0(x_n) + C_1 P_1(x_n) + \dots + C_{n-1} P_{n-1}(x_n) \end{array} \right.$$

que no es otra cosa que un sistema de n ecuaciones con n incógnitas: los coeficientes $\{C_0, C_1, \dots, C_{n-1}\}$. Al resolver el sistema de ecuaciones y obtener los coeficientes, podremos obtener la función polinómica que interpola esos puntos. Una expansión equivalente se pudo haber logrado con cualquier otro conjunto de polinomios ortogonales, que ellos son base del espacio de funciones. Es importante hacer notar que debido a que los polinomios de Legendre está definido en el intervalo $[-1, 1]$ los puntos experimentales deberán re-escalarse al ese intervalo para poder encontrar el polinomio de interpolación como combinación lineal de los Polinomios de Legendre.

Consideremos los puntos experimentales representado en la figura 2.1. Al construir el sistema de ecuaciones obtendremos lo siguiente:

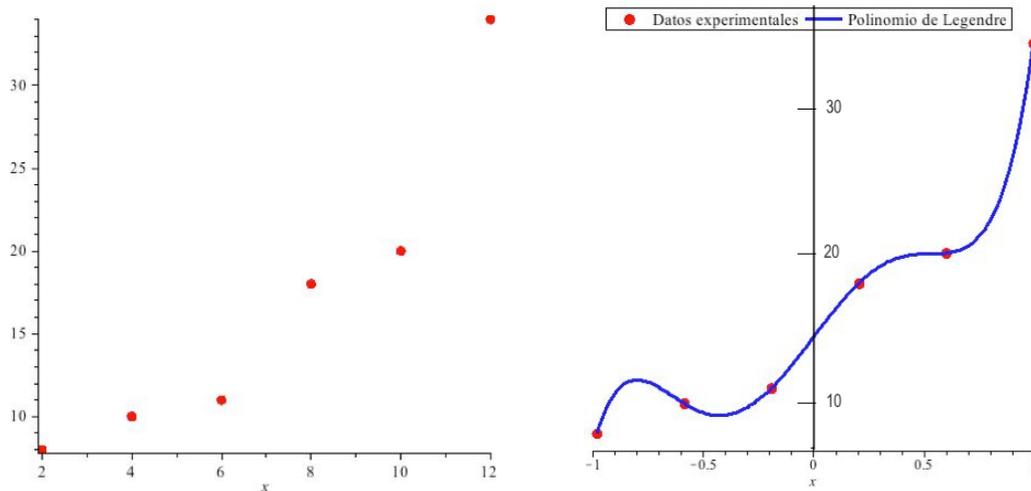


Figura 2.1: En el lado izquierdo se muestran los puntos experimentales: $\{(2, 8), (4, 10), (6, 11), (8, 18), (10, 20), (12, 34)\}$ y a la derecha la función polinómica que los interpola.

$$\begin{aligned}
 -8 + C_0 - C_1 + C_2 - C_3 + C_4 - C_5 &= 0 \\
 -10 + C_0 - \frac{3}{5} C_1 + \frac{1}{25} C_2 + \frac{9}{25} C_3 - \frac{51}{125} C_4 + \frac{477}{3125} C_5 &= 0 \\
 -11 + C_0 - \frac{1}{5} C_1 - \frac{11}{25} C_2 + \frac{7}{25} C_3 + \frac{29}{125} C_4 - \frac{961}{3125} C_5 &= 0 \\
 -18 + C_0 + \frac{1}{5} C_1 - \frac{11}{25} C_2 - \frac{7}{25} C_3 + \frac{29}{125} C_4 + \frac{961}{3125} C_5 &= 0 \\
 -20 + C_0 + \frac{3}{5} C_1 + \frac{1}{25} C_2 - \frac{9}{25} C_3 - \frac{51}{125} C_4 - \frac{477}{3125} C_5 &= 0 \\
 -34 + C_0 + C_1 + C_2 + C_3 + C_4 + C_5 &= 0
 \end{aligned}$$

y al resolver el sistema obtendremos que

$$C_0 = \frac{2249}{144}, \quad C_1 = \frac{3043}{336}, \quad C_2 = \frac{1775}{504}, \quad C_3 = -\frac{175}{216}, \quad C_4 = \frac{625}{336}, \quad C_5 = \frac{14375}{3024}$$

con lo cual

$$\mathcal{P}(x) = f(x) = \frac{2249}{144} + \frac{3043}{336} x + \frac{1775}{504} P(2, x) - \frac{175}{216} P(3, x) + \frac{625}{336} P(4, x) + \frac{14375}{3024} P(5, x)$$

la interpolación queda representada en al figura 2.1.

Es importante señalar que mientras más puntos experimentales se incluyan para la interpolación, el polinomio resultante será de mayor grado y, por lo tanto incluirá oscilaciones que distorcionarán una aproximación más razonable. Por ello, la estrategia de hacer la interpolación a trozos, digamos de tres puntos en tres puntos, generará un mejor ajuste, pero será una función (un polinomio) continuo a trozos.

2.4.4. Ejercicios

Para estos ejercicios supondremos la utilización de cualquier ambiente de manipulación simbólica, tipo MAPLE¹¹, Mathematica¹², MAXIMA¹³ o similares.

1. Al medir la temperatura a lo largo de una barra material obtenemos los siguientes valores

| | | | | | | | | | |
|------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| x_i (cm) | 1,0 | 2,0 | 3,0 | 4,0 | 5,0 | 6,0 | 7,0 | 8,0 | 9,0 |
| T_i (°C) | 14,6 | 18,5 | 36,6 | 30,8 | 59,2 | 60,1 | 62,2 | 79,4 | 99,9 |

Encuentre, mediante el método de los mínimos cuadrados los coeficientes que mejor ajustan a la recta $T = ax + b$.

2. Considere el espacio vectorial, $\mathcal{C}_{[-1,1]}^\infty$, de funciones reales, continuas y continuamente diferenciables definidas en el intervalo $[-1, 1]$. Es claro que una posible base de este espacio de funciones la constituye el conjunto de monomios $\{1, x, x^2, x^3, x^4, \dots\}$ por cuanto estas funciones son linealmente independientes.

- a) Si suponemos que este espacio vectorial está equipado con un producto interno definido por $\langle f|g \rangle = \int_{-1}^1 dx f(x)g(x)$, muestre que esa base de funciones no es ortogonal.
- b) Utilizando la definición de producto interno $\langle f|g \rangle = \int_{-1}^1 dx f(x)g(x)$ ortogonalice la base $\{1, x, x^2, x^3, x^4, \dots\}$ y encuentre los 10 primeros vectores ortogonales, base para $\mathcal{C}_{[-1,1]}^\infty$. Esta nueva base de polinomios ortogonales se conoce como los polinomios de Legendre
- c) Modifique un poco la definición de producto interno $\langle f|g \rangle = \int_{-1}^1 dx f(x)g(x)\sqrt{(1-x^2)}$ y ortogonalice la base $\{1, x, x^2, x^3, x^4, \dots\}$ y encuentre otros 10 primeros vectores ortogonales base para el mismo $\mathcal{C}_{[-1,1]}^\infty$. Esta nueva base de polinomios ortogonales se conoce como los polinomios de Tchebychev.
- d) Suponga la función $h(x) = \text{sen}(3x)(1-x^2)$:
 - 1) Expanda la función $h(x)$ en términos de la base de monomios y de polinomios de Legendre, grafique, compare y encuentre el grado de los polinomios en los cuales difieren las expansiones.
 - 2) Expanda la función $h(x)$ en términos de la base de monomios y de polinomios de Tchebychev, grafique, compare y encuentre el grado de los polinomios en los cuales difieren las expansiones.
 - 3) Expanda la función $h(x)$ en términos de la base de polinomios de Legendre y de Tchebychev, grafique, compare y encuentre el grado de los polinomios en los cuales difieren las expansiones.
 - 4) Estime en cada caso el error que se comete como función del grado del polinomio (o monomio) de la expansión.

¿Qué puede concluir respecto a la expansión en una u otra base?

¹¹<http://www.maplesoft.com>

¹²<http://www.wolfram.com/mathematica/>

¹³<http://maxima.sourceforge.net>

2.5. Algunos ejemplos resueltos

1. Consideramos el espacio vectorial de polinomios de grado $g \leq n$ definidos en el intervalo $[0, 1]$ o en el intervalo $[-1, 1]$ según el caso

a) ¿Cuál o cuáles de los siguientes conjuntos de vectores en \mathcal{P}^3 son linealmente independientes? Explique por qué.

1)

$$|x_1\rangle = 2x; \quad |x_2\rangle = x^2 + 1; \quad |x_3\rangle = x + 1; \quad |x_4\rangle = x^2 - 1.$$

Solución: Resultan ser linealmente dependiente ya que podremos expresar

$$|x_4\rangle = |x_1\rangle + |x_2\rangle - 2|x_3\rangle.$$

2)

$$|x_1\rangle = x(x-1); \quad |x_2\rangle = x; \quad |x_3\rangle = x^3; \quad |x_4\rangle = 2x^3 - x^2.$$

Solución: Linealmente dependiente ya que siempre podremos expresar

$$|x_4\rangle = -|x_1\rangle + |x_2\rangle + 2|x_3\rangle.$$

b) Considerando las siguientes definiciones de producto interior en \mathcal{P}^n

$$\langle q_n | p_n \rangle = \int_{-1}^1 p(x)q(x)dx \quad \text{y} \quad \langle q_n | p_n \rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx.$$

En \mathcal{P}^3 encuentre la distancia y el ángulo entre los vectores

$$|x_1\rangle = x(x-1); \quad |x_2\rangle = x.$$

Solución: En general la definición de distancia es

$$d(|x_1\rangle, |x_2\rangle) = \sqrt{\langle x_2 - x_1 | x_2 - x_1 \rangle}$$

por lo tanto para $\langle q_n | p_n \rangle = \int_{-1}^1 p(x)q(x)dx$ la distancia será

$$\sqrt{\langle x_2 - x_1 | x_2 - x_1 \rangle} = \sqrt{\int_{-1}^1 [x(x-1) - x]^2 dx} = \frac{1}{15}\sqrt{690}$$

y para $\langle q_n | p_n \rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx$ será

$$\sqrt{\langle x_2 - x_1 | x_2 - x_1 \rangle} = \sqrt{\int_0^1 (x(x-1) - x)^2 dx} = \frac{2}{15}\sqrt{30}.$$

Con respecto a los ángulos:

$$\theta = \arccos \left(\frac{\langle x_1 | x_2 \rangle}{\sqrt{\langle x_1 | x_1 \rangle} \sqrt{\langle x_2 | x_2 \rangle}} \right).$$

Para $\langle q_n | p_n \rangle = \int_{-1}^1 p(x)q(x)dx$ tenemos

$$\theta = \arccos \left(\frac{\langle x_1 | x_2 \rangle}{\sqrt{\langle x_1 | x_1 \rangle} \sqrt{\langle x_2 | x_2 \rangle}} \right) = \arccos \left(\frac{\int_{-1}^1 (x(x-1)) x \, dx}{\sqrt{\int_{-1}^1 (x(x-1))^2 \, dx} \sqrt{\int_{-1}^1 x^2 \, dx}} \right)$$

$$= \arccos \left(-\frac{1}{12} \sqrt{15} \sqrt{6} \right) = 2,4825 \text{ rad.}$$

Para $\langle q_n | p_n \rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx$

$$\theta = \arccos \left(\frac{\langle x_1 | x_2 \rangle}{\sqrt{\langle x_1 | x_1 \rangle} \sqrt{\langle x_2 | x_2 \rangle}} \right) = \arccos \left(\frac{\int_0^1 (x(x-1)) (x) \, dx}{\sqrt{\int_0^1 (x(x-1))^2 \, dx} \sqrt{\int_0^1 x^2 \, dx}} \right)$$

$$= \arccos \left(-\frac{1}{12} \sqrt{15} \sqrt{2} \right) = 2,4825 \text{ rad.}$$

¡El mismo ángulo!

c) Una de las posibles bases de \mathcal{P}^n será el conjunto $\{1, x, x^2, x^3, \dots, x^n\}$ con el producto interno definido por $\langle f | g \rangle = \int_0^1 dx f(x) g(x)$.

1) Encuentre la base ortonormal que expande el subespacio \mathcal{S}^3 de los polinomios, \mathcal{P}^n , de grado $g \leq 3$.

Solución: El subespacio \mathcal{S}^3 tendrá como vectores linealmente independientes $\{1, x, x^2, x^3\}$, para encontrar la base ortonormal utilizamos el método de Gram Smith, con lo cual tendremos que

$$|e_n\rangle \equiv |v_n\rangle - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\langle v_n | e_i \rangle}{\langle e_i | e_i \rangle} |e_i\rangle,$$

esto es

$$|e_1\rangle = |v_1\rangle = 1$$

$$|e_2\rangle = |v_2\rangle - \frac{\langle v_2 | e_1 \rangle}{\langle e_1 | e_1 \rangle} |e_1\rangle = x - \frac{\int_0^1 x \, dx}{\int_0^1 dx} = x - \frac{1}{2}$$

$$|e_3\rangle = |v_3\rangle - \frac{\langle v_3 | e_1 \rangle}{\langle e_1 | e_1 \rangle} |e_1\rangle - \frac{\langle v_3 | e_2 \rangle}{\langle e_2 | e_2 \rangle} |e_2\rangle = x^2 - \frac{\int_0^1 x^2 \, dx}{\int_0^1 dx} - \frac{\int_0^1 x^2 (x - \frac{1}{2}) \, dx}{\int_0^1 (x - \frac{1}{2})^2 \, dx} \left(x - \frac{1}{2} \right)$$

$$= x^2 - x + \frac{1}{6}$$

$$|e_4\rangle = |v_4\rangle - \frac{\langle v_4 | e_1 \rangle}{\langle e_1 | e_1 \rangle} |e_1\rangle - \frac{\langle v_4 | e_2 \rangle}{\langle e_2 | e_2 \rangle} |e_2\rangle - \frac{\langle v_4 | e_3 \rangle}{\langle e_3 | e_3 \rangle} |e_3\rangle$$

$$= x^3 - \frac{\int_0^1 x^3 \, dx}{\int_0^1 dx} - \frac{\left(\int_0^1 x^3 (x - \frac{1}{2}) \, dx \right) \left(x - \frac{1}{2} \right)}{\int_0^1 (x - \frac{1}{2})^2 \, dx} - \frac{\left(\int_0^1 x^3 (x^2 + \frac{1}{6} - x) \, dx \right) \left(x^2 + \frac{1}{6} - x \right)}{\int_0^1 (x^2 + \frac{1}{6} - x)^2 \, dx}$$

$$= x^3 - \frac{1}{20} + \frac{3}{5}x - \frac{3}{2}x^2$$

Normalizando

$$|\xi_1\rangle = \frac{|e_1\rangle}{\sqrt{\langle e_1 | e_1 \rangle}} = \frac{1}{\sqrt{\int_0^1 dx}} = 1$$

$$|\xi_2\rangle = \frac{|e_2\rangle}{\sqrt{\langle e_2 | e_2 \rangle}} = \frac{x - \frac{1}{2}}{\sqrt{\int_0^1 (x - \frac{1}{2})^2 dx}} = 2\sqrt{3} \left(x - \frac{1}{2}\right)$$

$$|\xi_3\rangle = \frac{|e_3\rangle}{\sqrt{\langle e_3 | e_3 \rangle}} = \frac{x^2 + \frac{1}{6} - x}{\sqrt{\int_0^1 (x^2 + \frac{1}{6} - x)^2 dx}} = 6\sqrt{5} \left(x^2 + \frac{1}{6} - x\right)$$

$$|\xi_4\rangle = \frac{|e_4\rangle}{\sqrt{\langle e_4 | e_4 \rangle}} = \frac{x^3 - \frac{1}{20} + \frac{3}{5}x - \frac{3}{2}x^2}{\sqrt{\int_0^1 (x^3 - \frac{1}{20} + \frac{3}{5}x - \frac{3}{2}x^2)^2 dx}} = 20\sqrt{7} \left(x^3 - \frac{1}{20} + \frac{3}{5}x - \frac{3}{2}x^2\right)$$

- 2) Encuentre las componentes del polinomio $g(x) = 5 + 3x^2 - x^3 + x^5$ proyectado sobre esa base ortonormal que expande a \mathcal{S}^3

Solución: Las componentes de la proyección de $g(x)$ en \mathcal{S}^3 serían

$$c^1 = \langle g | \xi_1 \rangle = \int_0^1 (1) (5 + 3x^2 - x^3 + x^5) dx = \frac{71}{12}$$

$$c^2 = \langle g | \xi_2 \rangle = \int_0^1 \left(2\sqrt{3} \left(x - \frac{1}{2}\right)\right) (5 + 3x^2 - x^3 + x^5) dx = \frac{197}{420}\sqrt{3}$$

$$c^3 = \langle g | \xi_3 \rangle = \int_0^1 \left(6\sqrt{5} \left(x^2 + \frac{1}{6} - x\right)\right) (5 + 3x^2 - x^3 + x^5) dx = \frac{23}{210}\sqrt{5}$$

$$c^4 = \langle g | \xi_4 \rangle = \int_0^1 \left(20\sqrt{7} \left(x^3 - \frac{1}{20} + \frac{3}{5}x - \frac{3}{2}x^2\right)\right) (5 + 3x^2 - x^3 + x^5) dx = \frac{4}{315}\sqrt{7},$$

con lo cual

$$|g\rangle_{\mathcal{S}^3} = \frac{71}{12} |\xi_1\rangle + \frac{197}{420}\sqrt{3} |\xi_2\rangle + \frac{23}{210}\sqrt{5} |\xi_3\rangle + \frac{4}{315}\sqrt{7} |\xi_4\rangle.$$

Finalmente la proyección del polinomio en \mathcal{S}^3 será

$$g_{\mathcal{S}^3}(x) = \frac{71}{12} + \frac{197\sqrt{3}}{420} \left[2\sqrt{3} \left(x - \frac{1}{2}\right)\right] + \frac{23\sqrt{5}}{210} \left[6\sqrt{5} \left(x^2 + \frac{1}{6} - x\right)\right] + \frac{4\sqrt{7}}{315} \left[20\sqrt{7} \left(x^3 - \frac{1}{20} + \frac{3}{5}x - \frac{3}{2}x^2\right)\right]$$

$$g_{\mathcal{S}^3}(x) = \frac{71}{12} + \frac{197}{70} \left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{23}{7} \left(x^2 + \frac{1}{6} - x\right) + \frac{16}{9} \left(x^3 - \frac{1}{20} + \frac{3}{5}x - \frac{3}{2}x^2\right)$$

es decir

$$g_{\mathcal{S}^3}(x) = \frac{313}{63} + \frac{25}{42}x + \frac{13}{21}x^2 + \frac{16}{9}x^3$$

La norma será

$$\| |g\rangle_{\mathcal{S}^3} \|^2 = \left(\frac{71}{12}\right)^2 + \left(\frac{197}{420}\sqrt{3}\right)^2 + \left(\frac{23}{210}\sqrt{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{315}\sqrt{7}\right)^2 = \frac{1,418,047}{39,690} \cong 35,728.$$

2. Encuentre la mínima distancia desde el subespacio \mathcal{S}^3 al polinomio $g(x)$

Solución: La distancia mínima será la norma del vector ortogonal a \mathcal{S}^3 tal que

$$|g\rangle = |g\rangle_{\mathcal{S}^3} + |g\rangle_{\perp\mathcal{S}^3} \quad \text{donde } |g\rangle_{\mathcal{S}^3} \in \mathcal{S}^3$$

y $|g\rangle_{\perp\mathcal{S}^3}$ es un vector de su complemento ortogonal. Por lo tanto el Teorema de Pitágoras nos dice que

$$\| |g\rangle \|^2 = \| |g\rangle_{\mathcal{S}^3} \|^2 + \| |g\rangle_{\perp\mathcal{S}^3} \|^2$$

con lo cual tendremos que la mínima distancia será

$$\| |g\rangle_{\perp\mathcal{S}^3} \| = \sqrt{\| |g\rangle \|^2 - \| |g\rangle_{\mathcal{S}^3} \|^2}$$

$$\| |g\rangle \|^2 = \int_0^1 (5 + 3x^2 - x^3 + x^5)^2 dx = \frac{495193}{13860}$$

$$\| |g\rangle_{\mathcal{S}^3} \|^2 = \frac{1418047}{39690}$$

con lo cual

$$\| |g\rangle_{\perp\mathcal{S}^3} \| = \sqrt{\frac{495193}{13860} - \frac{1418047}{39690}} \approx 1,1965 \times 10^{-2}$$

3. Sea $f(x) = e^{2x}$ una función perteneciente al espacio lineal de funciones continuas y continuamente diferenciables, $\mathcal{C}_{[-1,1]}^\infty$, en el cual el producto interno viene definido por $\langle q|p \rangle = \int_{-1}^1 p(x)q(x) dx$. Encuentre el polinomio lineal más cercano a la función $f(x)$.

Solución: En el subespacio S^1 de polinomios lineales, los vectores base son $\{1, x\}$. Es una base ortogonal pero no es normal, con lo cual la normalizamos

$$|e_1\rangle = |v_1\rangle = 1 \Rightarrow |\xi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{\langle e_1|e_1\rangle}} = \frac{1}{\sqrt{\int_{-1}^1 dx}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$|e_2\rangle = |v_2\rangle - \frac{\langle v_2|e_1\rangle}{\langle e_1|e_1\rangle} |e_1\rangle = x - \frac{\int_{-1}^1 x dx}{\int_{-1}^1 dx} = x \Rightarrow |\xi_2\rangle = \frac{x}{\sqrt{\int_{-1}^1 x^2 dx}} = \frac{\sqrt{6}}{2}x$$

y la proyección ortogonal de esta función será

$$c^0 = \int_{-1}^1 e^{2x} \left(\frac{1}{2}\sqrt{2} \right) dx = -\frac{\sqrt{2}}{4} (-e^2 + e^{-2}) \quad \text{y} \quad c^1 = \int_{-1}^1 \left(\frac{\sqrt{6}}{2}x \right) e^{2x} dx = \frac{\sqrt{6}}{8} (e^2 + 3e^{-2})$$

con lo cual la función lineal será

$$\mathcal{P}^n = \left(\frac{\sqrt{6}}{8} (e^2 + 3e^{-2}) \right) x - \frac{\sqrt{2}}{4} (-e^2 + e^{-2}) .$$

Bibliografía

- [1] Arfken, G. B., Weber, H., Weber, H.J. (2000) **Mathematical Methods for Physicists** 5ta Edición (Academic Press, Nueva York)
- [2] Borisenko, A.I. y Tarapov I.E. (1968) **Vector and Tensor Analysis** (Dover Publications Inc, Nueva York)
- [3] Dennery, P. y Krzywicki, A. (1995) **Mathematics for Physicists** (Dover Publications Inc, Nueva York)
- [4] Harper, C. (1971) **Introduction to Mathematical Physics** (*Prentice Hall, Englewood Cliff, N.J.*)
- [5] Hassani, S. (1991) **Foundations of Mathematical Physics** (*Prentice Hall, International Edition, London:*
- [6] Hauser, W (1971) **Introduction to Principles of Electromagnetism** (*Addison-Wesley Pub Co Reading*)
- [7] Riley, K.F., Hobson, M.P. y Bence, S.J. (2002) **Mathematical Methods for Physics and Engineering** (*Cambridge University Press*)
- [8] Santaló, L.A (1969) **Vectores y Tensores** (*Editorial Universitaria, Buenos Aires*)
- [9] Schutz, B. (1980) **Geometrical Methods in Mathematical Physics** (*Cambridge University Press, Londres*)
- [10] Spiegel, M. (1959) **Vector Analysis** (*Schaums Outline Series, McGraw Hill New York*)

Capítulo **3**

Vectores Duales y Tensores

Borrador Preliminar

3.1. Funcionales lineales

Definiremos funcionales lineales como aquella operación que asocia un número complejo (o real) a un vector $|v\rangle \in \mathbf{V}$ y cumple con la linealidad, vale decir:

- $\forall |v\rangle \in \mathbf{V} \rightarrow \mathcal{F}[|v\rangle] \in \mathfrak{C}$,
- $\mathcal{F}[\alpha |v_1\rangle + \beta |v_2\rangle] \equiv \alpha \mathcal{F}[|v_1\rangle] + \beta \mathcal{F}[|v_2\rangle] \quad \forall |v\rangle, |v_1\rangle, |v_2\rangle \in \mathbf{V}$.

El conjunto de funcionales lineales $\{\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3, \dots, \mathcal{F}_n, \dots\}$ constituyen a su vez un espacio vectorial, el cual se denomina espacio vectorial dual de \mathbf{V} y se denotará como \mathbf{V}^* . Es fácil convencerse que los funcionales lineales forman un espacio vectorial ya que dados $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \in \mathbf{V}^*$ se tiene

$$\left. \begin{aligned} (\mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2)[|v\rangle] &= \mathcal{F}_1[|v\rangle] + \mathcal{F}_2[|v\rangle] \\ (\alpha \mathcal{F})[|v\rangle] &= \alpha^* \mathcal{F}[|v\rangle] \end{aligned} \right\} \quad \forall |v\rangle \in \mathbf{V}.$$

A este espacio lineal también se le llama espacio de formas lineales y a los funcionales 1-formas.

En aquellos espacios lineales con producto interno definido (Espacios de Hilbert), el mismo producto interno constituye la expresión natural del funcional. Así tendremos que

$$\mathcal{F}_a[|v\rangle] \equiv \langle a | v \rangle \quad \forall |v\rangle \in \mathbf{V} \quad \wedge \quad \forall \langle a | \in \mathbf{V}^*.$$

Es claro comprobar que el producto interno garantiza que los $\{\mathcal{F}_a, \mathcal{F}_b, \dots\}$ forman un espacio vectorial:

$$\left. \begin{aligned} (\mathcal{F}_a + \mathcal{F}_b)[|v\rangle] &= \mathcal{F}_a[|v\rangle] + \mathcal{F}_b[|v\rangle] = \langle a | v \rangle + \langle b | v \rangle \\ (\alpha \mathcal{F}_a)[|v\rangle] &= \langle \alpha a | v \rangle = \alpha^* \langle a | v \rangle = \alpha^* \mathcal{F}_a[|v\rangle] \end{aligned} \right\} \quad \forall |v\rangle \in \mathbf{V}.$$

Esta última propiedad se conoce como antilinealidad.

Se establece entonces una correspondencia 1 a 1 entre *kets* y *bras*, entre vectores y funcionales lineales (o formas diferenciales):

$$\lambda_1 |v_1\rangle + \lambda_2 |v_2\rangle \quad \rightleftharpoons \quad \lambda_1^* \langle v_1| + \lambda_2^* \langle v_2|,$$

que ahora podemos precisar:

$$\begin{aligned} \langle a | v \rangle &= \langle v | a \rangle^*, \\ \langle a | \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \rangle &= \lambda_1 \langle a | v_1 \rangle + \lambda_2 \langle a | v_2 \rangle, \\ \langle \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 | v \rangle &= \lambda_1^* \langle a_1 | v \rangle + \lambda_2^* \langle a_2 | v \rangle. \end{aligned}$$

Más aún, dada una base $\{|e_1\rangle, |e_2\rangle, |e_3\rangle, \dots, |e_n\rangle\}$ para \mathbf{V} siempre es posible asociar una base para \mathbf{V}^* de tal manera que

$$|v\rangle = \lambda^i |e_i\rangle \quad \rightleftharpoons \quad \langle v| = \lambda_i^* \langle e^i|, \quad \text{con } \lambda^i = \langle e^i | v \rangle \quad \wedge \quad \lambda_i^* = \langle v | e_i \rangle \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, n$$

En un lenguaje arcaico (y muchos textos de Mecánica todavía lo reproducen) denominan a la base del espacio dual $\{\langle e^i|\}$ la base recíproca de $\{|e_i\rangle\}$.

Nótese que estamos utilizando la notación de Einstein en la que índices repetidos indican suma, y en donde las bases del espacio dual de formas diferenciales $\langle e^k|$ llevan los índices arriba. Los índices arriba se llamarán contravariantes y los índices abajo covariantes. Las componentes de las formas diferenciales en una base dada, llevan índices abajo $\langle a| = a_i \langle e^i|$ mientras que las componentes de los vectores los llevan arriba $|a\rangle = a^j |e_j\rangle$.

3.2. Paréntesis tensorial

La extensión natural al concepto de funcional lineal es el concepto de tensor.

3.2.1. Tensores, una definición funcional

Definiremos como un tensor a un funcional lineal que asocia un número complejo (o real) a un vector $|v\rangle \in V$, a una forma $\langle u| \in \mathbf{V}^*$, o ambas y cumple con la linealidad. Esto es:

- $\forall |v\rangle \in \mathbf{V} \wedge \langle u| \in \mathbf{V}^* \rightarrow \mathcal{T}[\langle u|; |v\rangle] \in \mathfrak{C}$
- $\mathcal{T}[\langle u|; \alpha |v_1\rangle + \beta |v_2\rangle] \equiv \alpha \mathcal{T}[\langle u|; |v_1\rangle] + \beta \mathcal{T}[\langle u|; |v_2\rangle] \quad \forall |v_1\rangle, |v_2\rangle \in \mathbf{V} \wedge \langle u| \in \mathbf{V}^*$
- $\mathcal{T}[\zeta \langle u_1| + \xi \langle u_2|; |v\rangle] \equiv \zeta \mathcal{T}[\langle u_1|; |v\rangle] + \xi \mathcal{T}[\langle u_2|; |v\rangle] \quad \forall |v\rangle \in \mathbf{V} \wedge \langle u_1|, \langle u_2| \in \mathbf{V}^*$

En pocas palabras: un tensor es un funcional generalizado cuyos argumentos son vectores y/o formas, lo que significa que $\mathcal{T}[\bullet; \bullet]$ es una cantidad con dos “puestos” y una vez “cubiertos” se convierte en un escalar (complejo o real). Un tensor, con un argumento correspondiente a un vector y un argumento correspondiente a una forma, lo podremos representar de la siguiente manera:

$$\mathcal{T} \left[\begin{array}{c} |v\rangle \langle u| \\ \circ \downarrow ; \bullet \downarrow \end{array} \right] \in \mathfrak{C}$$

Un tensor con dos argumentos correspondientes a vectores y uno a una forma sería

$$\mathcal{T}[o, o; \bullet] \Rightarrow \mathcal{T} \left[\begin{array}{c} |v_1\rangle |v_2\rangle \langle u| \\ \circ \downarrow , \circ \downarrow ; \bullet \downarrow \end{array} \right] \in \mathfrak{C} \Rightarrow \text{tensor de tipo } \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix};$$

y el caso contrario

$$\mathcal{T}[o; \bullet, \bullet] \Rightarrow \mathcal{T} \left[\begin{array}{c} |v\rangle \langle u_1| \langle u_2| \\ \circ \downarrow ; \bullet \downarrow , \bullet \downarrow \end{array} \right] \in \mathfrak{C} \Rightarrow \text{tensor de tipo } \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

En general

$$\mathcal{T} \left[\begin{array}{c} |v_1\rangle |v_2\rangle \dots |v_n\rangle \langle u_1| \langle u_2| \dots \langle u_m| \\ \circ \downarrow , \circ \downarrow , \dots , \circ \downarrow ; \bullet \downarrow , \bullet \downarrow \dots , \bullet \downarrow \end{array} \right] \Rightarrow \text{tensor de tipo } \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}.$$

En esta notación el punto y coma (;) separa las “entradas” formas de las “entradas” vectores. Es importante recalcar que **el orden si importa**, no sólo para las cantidades separadas por ;, sino el orden de los “puestos” vectores y “puestos” formas separados por coma y repercutirá en las propiedades de los tensores. Por ejemplo: **si el orden de las “entradas” vectores no importa**, podremos permutarlas sin alterar al tensor, **tendremos entonces tensores simétricos respecto a esos “puestos” o “entradas”**; del mismo modo, serán tensores antisimétricos aquellos en los cuales **si el orden importa** y al permutar esos “puestos” o “entradas” hay un cambio de signo en el tensor. Todos estos casos serán tratados con detalle más adelante, pero vale la pena recalcar que en general, para un tensor genérico el orden de la “entradas” o “puestos” si importa pero no necesariamente se comporta como los casos reseñados anteriormente.

Obviamente las formas pueden ser representadas por tensores ya que son funcionales lineales de vectores, es decir:

$$\text{Un vector es un tensor del tipo } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathcal{T} \begin{bmatrix} \langle a | \\ \bullet \end{bmatrix} \in \mathfrak{C}.$$

los vectores constituyen un caso especial de tensores.

$$\text{Una forma es un tensor del tipo } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathcal{T} \begin{bmatrix} |a\rangle \\ \circ \end{bmatrix} \in \mathfrak{C}.$$

porque son funcionales lineales para las formas diferenciales.

Un tensor $\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$ es un funcional lineal que asocia m 1-formas y n vectores en \mathfrak{C} .

3.2.2. Producto tensorial

Como será evidente más adelante, los tensores (*simples*) pueden provenir del *producto tensorial* (exterior o directo) de espacios vectoriales. Esto es, dados \mathbf{E}_1 y \mathbf{E}_2 dos espacios vectoriales con dimensiones n_1 y n_2 , respectivamente y vectores genéricos, $|\varphi(1)\rangle$ y $|\chi(2)\rangle$ pertenecientes a estos espacios vectoriales: $|\varphi(1)\rangle \in \mathbf{E}_1$ y $|\chi(2)\rangle \in \mathbf{E}_2$. Definiremos el *producto tensorial* (*exterior o directo*) de espacios vectoriales, $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{E}_2$, si a cada par de vectores $|\varphi(1)\rangle$ y $|\chi(2)\rangle$ le asociamos un tensor tipo $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ y si se cumple que

$$|\varphi(1)\chi(2)\rangle = |\varphi(1)\rangle \otimes |\chi(2)\rangle = \mathcal{T} \begin{bmatrix} \langle \zeta(1) | & \langle \xi(2) | \\ \bullet & \bullet \end{bmatrix} = \langle \zeta(1) | \varphi(1)\rangle \langle \xi(2) | \chi(2)\rangle \in \mathfrak{C}$$

y si además se cumplen las siguientes propiedades:

1. La suma entre tensores de \mathbf{E} viene definida como

$$\begin{aligned} |\varphi(1)\chi(2)\rangle + |\zeta(1)\xi(2)\rangle &= |\varphi(1)\rangle \otimes |\chi(2)\rangle + |\zeta(1)\rangle \otimes |\xi(2)\rangle \\ &= |\varphi(1) + \zeta(1)\rangle \otimes |\chi(2) + \xi(2)\rangle \end{aligned}$$

2. El producto tensorial es lineal respecto a la multiplicación con números reales λ y μ

$$\begin{aligned} [|\lambda\varphi(1)\rangle] \otimes |\chi(2)\rangle &= [|\lambda\varphi(1)\rangle] \otimes |\chi(2)\rangle = \lambda [|\varphi(1)\rangle \otimes |\chi(2)\rangle] = \lambda |\varphi(1)\chi(2)\rangle \\ |\varphi(1)\rangle \otimes [|\mu\chi(2)\rangle] &= |\varphi(1)\rangle \otimes [|\mu\chi(2)\rangle] = \mu [|\varphi(1)\rangle \otimes |\chi(2)\rangle] = \mu |\varphi(1)\chi(2)\rangle \end{aligned}$$

3. El producto tensorial es distributivo respecto a la suma:

$$\begin{aligned} |\varphi(1)\rangle \otimes [|\chi_1(2)\rangle + |\chi_2(2)\rangle] &= |\varphi(1)\rangle \otimes |\chi_1(2)\rangle + |\varphi(1)\rangle \otimes |\chi_2(2)\rangle \\ [|\varphi_1(1)\rangle + |\varphi_2(1)\rangle] \otimes |\chi(2)\rangle &= |\varphi_1(1)\rangle \otimes |\chi(2)\rangle + |\varphi_2(1)\rangle \otimes |\chi(2)\rangle \end{aligned}$$

Nótese que los índices (1) y (2) denotan la pertenencia al espacio respectivo.

Es fácil convencerse que los tensores $|\varphi(1)\chi(2)\rangle \in \mathbf{E} = \mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{E}_2$ forman un espacio vectorial y la demostración se basa en comprobar los axiomas o propiedades de los espacios vectoriales tal y como lo describimos en la Sección 2.1.3:

1. La operación suma \boxplus es cerrada en $\mathbf{V} : \forall |v_i\rangle, |v_j\rangle \in \mathbf{V} \Rightarrow |v_k\rangle = |v_i\rangle \boxplus |v_j\rangle \in \mathbf{V}$
 Esto se traduce en demostrar que sumados dos tensores $|\varphi(1)\chi(2)\rangle$, y $|\zeta(1)\xi(2)\rangle \in \mathbf{E}$ el tensor suma también pertenece a \mathbf{E} , con a y b pertenecientes al campo del espacio vectorial

$$a|\varphi(1)\chi(2)\rangle + b|\zeta(1)\xi(2)\rangle = |a\varphi(1) + \zeta(1)\rangle \otimes |\chi(2) + b\xi(2)\rangle$$

y esto se cumple siempre ya que, el producto tensorial es lineal respecto a la multiplicación con números reales y por ser \mathbf{E}_1 y \mathbf{E}_2 espacios vectoriales se cumple

$$\left. \begin{array}{l} |a\varphi(1) + \zeta(1)\rangle = a|\varphi(1)\rangle + |\zeta(1)\rangle \in \mathbf{E}_1 \\ |\chi(2) + b\xi(2)\rangle = |\chi(2)\rangle + b|\xi(2)\rangle \in \mathbf{E}_2 \end{array} \right\} \Rightarrow |\varphi(1) + \zeta(1)\rangle \otimes |\chi(2) + \xi(2)\rangle \in \mathbf{E}_2$$

2. La operación suma \boxplus es conmutativa y asociativa
 Conmutativa $\forall |v_i\rangle, |v_j\rangle \in \mathbf{V} \Rightarrow |v_i\rangle \boxplus |v_j\rangle = |v_j\rangle \boxplus |v_i\rangle$
 Esta primera es clara de la definición de suma

$$|\varphi(1)\chi(2)\rangle + |\zeta(1)\xi(2)\rangle = |\varphi(1) + \zeta(1)\rangle \otimes |\chi(2) + \xi(2)\rangle$$

$$|\zeta(1)\xi(2)\rangle + |\varphi(1)\chi(2)\rangle = |\zeta(1) + \varphi(1)\rangle \otimes |\xi(2) + \chi(2)\rangle$$

por ser \mathbf{E}_1 y \mathbf{E}_2 dos espacios vectoriales

$$\forall |v_i\rangle, |v_j\rangle, |v_k\rangle \in \mathbf{V} \Rightarrow (|v_i\rangle \boxplus |v_j\rangle) \boxplus |v_k\rangle = |v_j\rangle \boxplus (|v_i\rangle \boxplus |v_k\rangle)$$

una vez más, esto se traduce en:

$$(|\varphi(1)\chi(2)\rangle + |\zeta(1)\xi(2)\rangle) + |\varkappa(1)\kappa(2)\rangle = |\varphi(1)\chi(2)\rangle + (|\zeta(1)\xi(2)\rangle + |\varkappa(1)\kappa(2)\rangle)$$

con lo cual, por la definición de suma la expresión anterior queda como

$$(|\varphi(1) + \zeta(1)\rangle \otimes |\xi(2) + \chi(2)\rangle) + |\varkappa(1)\kappa(2)\rangle = |\varphi(1)\chi(2)\rangle + (|\zeta(1) + \varkappa(1)\rangle \otimes |\xi(2) + \kappa(2)\rangle)$$

$$(|\varphi(1) + \zeta(1) + \varkappa(1)\rangle \otimes (|\xi(2) + \chi(2) + \kappa(2)\rangle)) = |\varphi(1) + (\zeta(1) + \varkappa(1))\rangle \otimes |\xi(2) + (\chi(2) + \kappa(2))\rangle$$

3. Existe un único elemento neutro: $\exists |0\rangle / |0\rangle \boxplus |v_j\rangle = |v_j\rangle \boxplus |0\rangle = |v_j\rangle \quad \forall |v_j\rangle \in \mathbf{V}$
 Es decir,

$$|\varphi(1)\chi(2)\rangle + |0(1)0(2)\rangle = |\varphi(1) + 0(1)\rangle \otimes |\chi(2) + 0(2)\rangle = |\varphi(1)\rangle \otimes |\chi(2)\rangle = |\varphi(1)\chi(2)\rangle$$

4. Existe un elemento simétrico para cada elemento de \mathbf{V} :

$$\forall |v_j\rangle \in \mathbf{V} \quad \exists | -v_j\rangle / |v_j\rangle \boxplus | -v_j\rangle = |0\rangle \Rightarrow$$

$$|\varphi(1)\chi(2)\rangle - |\varphi(1)\chi(2)\rangle = |\varphi(1) - \varphi(1)\rangle \otimes |\chi(2) - \chi(2)\rangle = |0(1)\rangle \otimes |0(2)\rangle = |0(1)0(2)\rangle$$

5. $\alpha(\beta|v_i\rangle) = (\alpha\beta)|v_i\rangle \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \alpha(\beta|\varphi(1)\chi(2)\rangle) &= \alpha(|\beta\chi(2)\rangle \otimes |\varphi(1)\rangle) = |\alpha\beta\chi(2)\rangle \otimes |\varphi(1)\rangle \\ &= (\alpha\beta)|\chi(2)\rangle \otimes |\varphi(1)\rangle = (\alpha\beta)|\varphi(1)\chi(2)\rangle \end{aligned}$$

$$6. (\alpha + \beta) |v_i\rangle = \alpha |v_i\rangle + \beta |v_i\rangle \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta) |\varphi(1)\chi(2)\rangle &= |\varphi(1)\rangle \otimes |(\alpha + \beta)\chi(2)\rangle = |\varphi(1)\rangle \otimes |\alpha\chi(2) + \beta\chi(2)\rangle \\ &= |\varphi(1)\rangle \otimes [(\alpha|\chi(2)\rangle) + \beta|\chi(2)\rangle] \\ &= \alpha |\varphi(1)\rangle \otimes |\chi(2)\rangle + \beta |\varphi(1)\rangle \otimes |\chi(2)\rangle \end{aligned}$$

$$7. \alpha (|v_i\rangle \boxplus |v_j\rangle) = \alpha |v_i\rangle \boxplus \alpha |v_j\rangle \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \alpha (|\varphi(1)\chi(2)\rangle + |\zeta(1)\xi(2)\rangle) &= \alpha (|\varphi(1) + \zeta(1)\rangle \otimes |\xi(2) + \chi(2)\rangle) \\ &= |\alpha(\varphi(1) + \zeta(1))\rangle \otimes |\xi(2) + \chi(2)\rangle \\ &= |\alpha\varphi(1) + \alpha\zeta(1)\rangle \otimes |\xi(2) + \chi(2)\rangle \\ &= (|\alpha\varphi(1)\chi(2)\rangle + |\alpha\zeta(1)\xi(2)\rangle) \\ &= \alpha |\varphi(1)\chi(2)\rangle + \alpha |\zeta(1)\xi(2)\rangle \end{aligned}$$

Equivalentemente, podemos construir un producto tensorial entre espacios de formas diferenciales. Si \mathbf{E}_1^* y \mathbf{E}_2^* son dos espacios vectoriales duales a \mathbf{E}_1 y \mathbf{E}_2 , con dimensiones n_1 y n_2 , respectivamente. A estos espacios pertenecen las formas diferenciales genéricas $\langle \zeta(1) | \in \mathbf{E}_1^*$ y $\langle \xi(2) | \in \mathbf{E}_2^*$. Definiremos el producto tensorial de espacios vectoriales duales, $\mathbf{E}^* = \mathbf{E}_1^* \otimes \mathbf{E}_2^*$, si a cada par de formas diferenciales $\langle \zeta(1) | \in \mathbf{E}_1^*$ y $\langle \xi(2) | \in \mathbf{E}_2^*$ le asociamos un tensor tipo $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$. Esto es

$$\langle \zeta(1)\xi(2) | = \langle \zeta(1) | \otimes \langle \xi(2) |$$

3.2.3. La tentación del producto interno

A partir de las definiciones de productos internos en \mathbf{E}_1 y \mathbf{E}_2 , uno puede verse tentado a definir un producto interno de la siguiente forma

$$\langle \tilde{\varphi}(1)\tilde{\chi}(2) | \varphi(1)\chi(2)\rangle = \langle \tilde{\varphi}(1) | \varphi(1)\rangle \cdot \langle \tilde{\chi}(2) | \chi(2)\rangle .$$

Mostraremos, sin embargo, que NO es una buena definición de producto interno, y para ello debemos demostrar que se satisfacen los axiomas o propiedades del producto interno que expusimos en la Sección 2.2.3.

Para facilitar la lectura repetiremos aquí las propiedades que definen el producto interno (expuestas en la Sección 2.2.3) y haremos las “adaptaciones” del caso son:

$$1. \langle x | x \rangle \in \mathfrak{R} \quad \wedge \quad \langle x | x \rangle \geq 0 \quad \forall |x\rangle \in \mathbf{V} \quad \text{si} \quad \langle x | x \rangle = 0 \Rightarrow |x\rangle \equiv |0\rangle$$

Esto es:

$$\langle \varphi(1)\chi(2) | \varphi(1)\chi(2)\rangle = \langle \varphi(1) | \varphi(1)\rangle \cdot \langle \chi(2) | \chi(2)\rangle$$

como $\langle \varphi(1) | \varphi(1)\rangle$ y $\langle \chi(2) | \chi(2)\rangle$ son buenas definiciones de producto interno tendremos que

$$\left. \begin{aligned} \langle \varphi(1) | \varphi(1)\rangle &\geq 0 \\ \langle \chi(2) | \chi(2)\rangle &\geq 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \langle \varphi(1)\chi(2) | \varphi(1)\chi(2)\rangle \geq 0$$

Aquí vale la pena mencionar algunos puntos sutiles sobre la segunda parte de la propiedad a demostrar:

si $\langle x | x \rangle = 0 \Rightarrow |x\rangle \equiv |0\rangle$ lo cual para este caso se traducen en

$$\langle \varphi(1) \chi(2) | \tilde{\varphi}(1) \tilde{\chi}(2) \rangle = \langle \varphi(1) | \tilde{\varphi}(1) \rangle \cdot \langle \chi(2) | \tilde{\chi}(2) \rangle = 0$$

$$\langle \varphi(1) | \tilde{\varphi}(1) \rangle \cdot \langle \chi(2) | \tilde{\chi}(2) \rangle = 0 \Rightarrow \begin{cases} \left. \begin{array}{l} \langle \varphi(1) | \tilde{\varphi}(1) \rangle = 0 \\ \langle \chi(2) | \tilde{\chi}(2) \rangle \neq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow |\tilde{\varphi}(1)\rangle = |0(1)\rangle \\ \left. \begin{array}{l} \langle \varphi(1) | \tilde{\varphi}(1) \rangle \neq 0 \\ \langle \chi(2) | \tilde{\chi}(2) \rangle = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow |\tilde{\chi}(1)\rangle = |0(1)\rangle \\ \left. \begin{array}{l} \langle \varphi(1) | \tilde{\varphi}(1) \rangle = 0 \\ \langle \chi(2) | \tilde{\chi}(2) \rangle = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} |\tilde{\varphi}(1)\rangle = |0(1)\rangle \\ |\tilde{\chi}(1)\rangle = |0(1)\rangle \end{cases}$$

definitivamente, habría que restringir los posibles vectores que intervienen en el producto tensorial, de modo que no fuera posible vectores del tipo

$$|\varphi(1)0(2)\rangle \equiv |\varphi(1)\rangle \otimes |0(2)\rangle \quad \text{o} \quad |0(1)\chi(2)\rangle \equiv |0(1)\rangle \otimes |\chi(2)\rangle$$

sólo así se cumple la propiedad mencionada.

2. $\langle x | y \rangle = \langle y | x \rangle^* \quad \forall |x\rangle, |y\rangle \in \mathbf{V}$

Esto puede ser demostrado fácilmente como sigue

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\varphi}(1) \tilde{\chi}(2) | \varphi(1) \chi(2) \rangle &= \langle \tilde{\varphi}(1) | \varphi(1) \rangle \cdot \langle \tilde{\chi}(2) | \chi(2) \rangle \\ &= \langle \varphi(1) | \tilde{\varphi}(1) \rangle^* \cdot \langle \chi(2) | \tilde{\chi}(2) \rangle^* \\ &= (\langle \varphi(1) | \tilde{\varphi}(1) \rangle \cdot \langle \chi(2) | \tilde{\chi}(2) \rangle)^* \\ &= \langle \varphi(1) \chi(2) | \tilde{\varphi}(1) \tilde{\chi}(2) \rangle^* \end{aligned}$$

3. $\langle x | y + z \rangle = \langle x | y \rangle + \langle x | z \rangle \quad \wedge \quad \langle x + z | y \rangle = \langle x | y \rangle + \langle z | y \rangle \quad \forall |x\rangle, |y\rangle, |z\rangle \in \mathbf{V}$

Partimos del lado derecho de la primera de las igualdades anteriores:

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\varphi}(1) \tilde{\chi}(2) | [\varphi(1) \chi(2) + \zeta(1) \xi(2)] \rangle &= \langle \tilde{\varphi}(1) \tilde{\chi}(2) | [\varphi(1) + \zeta(1)] \otimes [\xi(2) + \chi(2)] \rangle \\ &= \langle \tilde{\varphi}(1) | \varphi(1) + \zeta(1) \rangle \cdot \langle \tilde{\chi}(2) | \xi(2) + \chi(2) \rangle \end{aligned}$$

y otra vez, como $\langle \varphi(1) | \varphi(1) \rangle$ y $\langle \chi(2) | \chi(2) \rangle$ son buenas definiciones de producto interno tendremos que:

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\varphi}(1) | \varphi(1) + \zeta(1) \rangle &= \langle \tilde{\varphi}(1) | \varphi(1) \rangle + \langle \tilde{\varphi}(1) | \zeta(1) \rangle \\ \langle \tilde{\chi}(2) | \xi(2) + \chi(2) \rangle &= \langle \tilde{\chi}(2) | \xi(2) \rangle + \langle \tilde{\chi}(2) | \chi(2) \rangle \end{aligned}$$

y al multiplicar $\langle \tilde{\chi}(2) | \xi(2) + \chi(2) \rangle$ por $\langle \tilde{\varphi}(1) | \varphi(1) + \zeta(1) \rangle$ surgirán cuatro sumandos

$$\langle \tilde{\varphi}(1) | \varphi(1) \rangle \langle \tilde{\chi}(2) | \xi(2) \rangle + \langle \tilde{\varphi}(1) | \varphi(1) \rangle \langle \tilde{\chi}(2) | \chi(2) \rangle + \langle \tilde{\varphi}(1) | \zeta(1) \rangle \langle \tilde{\chi}(2) | \xi(2) \rangle + \langle \tilde{\varphi}(1) | \zeta(1) \rangle \langle \tilde{\chi}(2) | \chi(2) \rangle$$

lo cual contrasta con el lado izquierdo al utilizar la definición dos veces que tienen dos sumandos

$$\langle \tilde{\varphi}(1) \tilde{\chi}(2) | \varphi(1) \chi(2) \rangle + \langle \tilde{\varphi}(1) \tilde{\chi}(2) | \zeta(1) \xi(2) \rangle = \langle \tilde{\varphi}(1) | \varphi(1) \rangle \cdot \langle \tilde{\chi}(2) | \chi(2) \rangle + \langle \tilde{\varphi}(1) | \zeta(1) \rangle \cdot \langle \tilde{\chi}(2) | \xi(2) \rangle$$

por lo cual **NO se cumple esta propiedad** y no hay forma de enmendarla.

3.2.4. Bases para un producto tensorial

Si $\{|u_i(1)\}$ y $\{|v_i(2)\}$ son, respectivamente, bases discretas para \mathbf{E}_1 y \mathbf{E}_2 entonces podremos construir el tensor

$$|u_i(1)v_j(2)\rangle = |u_i(1)\rangle \otimes |v_j(2)\rangle \in \mathbf{E}$$

el cual funcionará como una base para \mathbf{E} y, por lo tanto, podremos construir un tensor genérico de \mathbf{E}

$$|\varphi(1)\chi(2)\rangle = |\varphi(1)\rangle \otimes |\chi(2)\rangle = \varphi^i \chi^j |u_i(1)v_j(2)\rangle$$

donde φ^i y χ^j son las componentes de $|\varphi(1)\rangle$ y $|\chi(2)\rangle$ en sus respectivas bases. En otras palabras, las componentes de un tensor en \mathbf{E} corresponden a la multiplicación de las componentes de los vectores en \mathbf{E}_1 y \mathbf{E}_2 . Recuerde que estamos utilizando la convención de Einstein de suma tácita en índices covariantes y contravariantes, en la cual $c^k |v_k\rangle \equiv \sum_{k=1}^n c^k |v_k\rangle$.

Es importante señalar que si bien un tensor genérico $|\Psi\rangle \in \mathbf{E}$ siempre se puede expandir en la base $|u_i(1)v_j(2)\rangle$ no es cierto que todo tensor de \mathbf{E} provenga del producto tensorial de \mathbf{E}_1 y \mathbf{E}_2 . Es decir, \mathbf{E} tiene más tensores de los que provienen el producto tensorial. Esta afirmación puede intuirse del hecho que si $|\Psi\rangle \in \mathbf{E}$ entonces

$$|\Psi\rangle = c^{i,j} |u_i(1)v_j(2)\rangle$$

por ser $\{|u_i(1)v_j(2)\}$ base para \mathbf{E} . Es claro que dados dos números α_1 y α_2 habrá $c^{i,j}$ que no provienen de la multiplicación de $\alpha_1\alpha_2$.

3.2.5. Tensores, sus componentes y sus contracciones

Componentes de un tensor

Denominaremos componentes de un tensor, aquellos números que surgen de incorporar bases de formas diferenciales y vectores. Así, si $\{|u_i(1)\rangle, |v_j(2)\rangle, |t_k(3)\rangle\}$ y $\{\langle x^m(1)|, \langle y^n(2)|\}$ son bases para los vectores y las formas, respectivamente, las componentes de un tensor $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ serán

$$S_{ijk}^{mn} = \mathcal{S} \left[\begin{array}{ccc|cc} |u_i(1)\rangle & |v_j(2)\rangle & |t_k(3)\rangle & \langle x^m(1)| & \langle y^n(2)| \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \circ & \circ & \circ & \bullet & \bullet \end{array} \right].$$

Claramente, esta definición de componentes contiene a las componentes $c^{i,j}$ de aquellos espacios tensoriales generados por el producto tensorial. Si consideramos un tensor como resultado de un producto tensorial y consideramos las bases $\{|u_i(1)\rangle, \langle x^m(1)|\}$, sus componentes se pueden expresar $\{\varphi^m(1)\chi_i(1)\}$, vale decir,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \iff |\varphi(1)\rangle \otimes \langle \Delta(1)| \Rightarrow \langle x^m(1) | \varphi(1)\rangle \otimes \langle \Delta(1) | u_i(1)\rangle \Rightarrow \{\varphi^m(1)\delta_i(1)\}$$

Combinaciones lineales de tensores

Es claro que podremos sumar (componentes) de tensores como lo hemos hecho con la suma de (componentes) de vectores

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_x + b_x)\mathbf{i} + (a_y + b_y)\mathbf{j} + (a_z + b_z)\mathbf{k} = (a^1 + b^1)\mathbf{i} + (a^2 + b^2)\mathbf{j} + (a^3 + b^3)\mathbf{k} = (a^i + b^i) |e_i\rangle$$

esto es:

$$R_{kl}^{ij} = \alpha Q_{kl}^{ij} + \beta P_{kl}^{ij}.$$

Producto tensorial de tensores

Podemos extender aún más la idea del producto directo y extenderla para tensores. Así, para dos tensores tipo $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ se tiene que

$$\left. \begin{aligned} |\varphi(1)\chi(2)\rangle &= |\varphi(1)\rangle \otimes |\chi(2)\rangle = \mathcal{T} \left[\begin{array}{c|c} \langle \zeta(1) | & \langle \xi(2) | \\ \bullet & \bullet \end{array} \right] \\ |\mu(1)\kappa(2)\Theta(1)\rangle &= |\mu(1)\rangle \otimes |\kappa(2)\rangle \otimes \langle \Theta(1) | = \mathcal{P} \left[\begin{array}{c|c|c} |u_i(1)\rangle & \langle \varepsilon(1) | & \langle \phi(2) | \\ \circ & \bullet & \bullet \end{array} \right] \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$|\varphi(1)\chi(2)\rangle \otimes |\mu(1)\kappa(2)\Theta(1)\rangle = |\varphi(1)\rangle \otimes |\chi(2)\rangle \otimes |\mu(1)\rangle \otimes |\kappa(2)\rangle \otimes \langle \Theta(1) |$$

$$= \mathcal{T} \left[\begin{array}{c|c} \langle \zeta(1) | & \langle \xi(2) | \\ \bullet & \bullet \end{array} \right] \otimes \mathcal{P} \left[\begin{array}{c|c|c} |u_i(1)\rangle & \langle \varepsilon(1) | & \langle \phi(2) | \\ \circ & \bullet & \bullet \end{array} \right]$$

$$= \mathcal{R} \left[\begin{array}{c|c|c|c|c} |u_i(1)\rangle & \langle \varepsilon(1) | & \langle \phi(2) | & \langle \zeta(3) | & \langle \xi(4) | \\ \circ & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{array} \right]$$

Por ejemplo, en componentes:

$$S_k^{ijlm} = Q^{ij} P_k^{lm}.$$

Contracción de un tensor

Denominaremos una contracción cuando sumamos las componentes covariantes y contravariantes, esto es, si tenemos $\varphi^i(1)\chi_i(1)$ entonces se genera un escalar independiente de la base. Esta situación será más evidente cuando definamos métricas y contracción de tensores. Por analogía y considerando un caso más general, dada una componente S_{ijk}^{mn} correspondiente a un tensor $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ podremos construir un nuevo tensor $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ a partir de una contracción. Las componentes de este nuevo tensor serán: $S_{ijk}^{mn} \Rightarrow S_{ijk}^n \equiv S_{jk}^n$.

Del mismo modo, dadas las componentes de dos tensores, P^{lm} y Q_{zk}^{ij} generarán componentes de nuevos tensores $R_k^{lij} = P^{lm} Q_{mk}^{ij}$. Así

$$\left. \begin{aligned} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} &\Rightarrow P^{lm} \\ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} &\Rightarrow Q_{zk}^{ij} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow R_k^{lij} = P^{lm} Q_{mk}^{ij}$$

Es claro que si dos tensores derivan de productos tensoriales y si $\{|u_i(1)\rangle\}$, $\{\langle u^m(1) | \}$ y $\{|v_i(2)\rangle\}$ son bases

ortonormales para \mathcal{E}_1 , \mathcal{E}_1^* y \mathcal{E}_2 , entonces sus productos podrán ser expresados como

$$\left. \begin{aligned} |\gamma(1)\delta(2)\rangle &= \underbrace{(\gamma^i(1)\delta^j(2))}_{P^{ij}} |u_i(1)\rangle \otimes |v_j(2)\rangle \\ |\alpha(1)\beta(1)\rangle &= \underbrace{(\alpha^l(1)\beta_m(2))}_{Q_m^l} |u_l(1)\rangle \otimes \langle u^m(1)| \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$[(\alpha^l(1)\beta_m(2)) |u_l(1)\rangle \otimes \langle u^m(1)|] [(\gamma^i(1)\delta^j(2)) |u_i(1)\rangle \otimes |v_j(2)\rangle] \Rightarrow$$

$$\alpha^l(1)\beta_m(2) (\gamma^i(1)\delta^j(2)) \underbrace{\{\langle u^m(1) |u_i(1)\rangle\}}_{\delta_i^m} |v_j(2)\rangle \otimes |u_l(1)\rangle \Rightarrow$$

$$\alpha^l(1)\beta_k(2) (\gamma^k(1)\delta^j(2)) |v_j(2)\rangle \otimes |u_l(1)\rangle = P^{ij} Q_i^l |v_j(2)u_l(1)\rangle = R^{jl} |v_j(2)u_l(1)\rangle .$$

Pero más aún, si $|u_i(1)v_j(2)\rangle = |u_i(1)\rangle \otimes |v_j(2)\rangle \in \mathcal{E}$ es base de \mathcal{E} entonces se puede demostrar lo anterior sin circunscribirnos a tensores cuyas componentes provengan de multiplicación de las componentes en cada espacio vectorial.

Simetrización de tensores

Un tensor (las componentes) será simétrico respecto a dos de sus índices si su permutación no cambia su valor:

$$S_{ij} = S_{ji}; \quad S^{ij} = S^{ji}; \quad S_{ij\dots kl\dots mn} = S_{ij\dots lk\dots mn} \quad S^{ij\dots kl\dots mn} = S^{ij\dots lk\dots mn}$$

y será antisimétrico si

$$A_{ij} = -A_{ji}; \quad A^{ij} = -A^{ji} \quad A_{ij\dots kl\dots mn} = -A_{ij\dots lk\dots mn} \quad A^{ij\dots kl\dots mn} = -A^{ij\dots lk\dots mn} .$$

Un tensor de rango 2, viene representado por una matriz. La matriz que representa un tensor de rango 2, tendrá como máximo 6 componentes distintas

$$S_j^i = S_i^j = \begin{pmatrix} S_1^1 & S_2^1 & S_3^1 \\ S_1^2 & S_2^2 & S_3^2 \\ S_1^3 & S_2^3 & S_3^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_1^1 & S_2^1 & S_3^1 \\ S_2^1 & S_2^2 & S_3^2 \\ S_3^1 & S_2^3 & S_3^3 \end{pmatrix}$$

mientras que un tensor antisimétrico de segundo orden tendrá, cuando máximo, tres componentes con valor absoluto distintos de cero

$$A_j^i = -A_i^j = \begin{pmatrix} 0 & A_2^1 & A_3^1 \\ -A_1^2 & 0 & A_3^2 \\ -A_1^3 & -A_2^3 & 0 \end{pmatrix}$$

Siempre es posible construir tensores simétricos y antisimétricos a partir de un tensor genérico. Esto es:

$$S_{ij} = \frac{1}{2} (T_{ij} + T_{ji}) \equiv T_{(ij)} \iff S_{ij\dots kl\dots mn} = \frac{1}{2} (T_{ij\dots kl\dots mn} + T_{ij\dots lk\dots mn}) = T_{ij\dots (kl)\dots mn}$$

$$A_{ij} = \frac{1}{2} (T_{ij} - T_{ji}) \equiv T_{[ij]} \iff A_{ij\dots kl\dots mn} = \frac{1}{2} (T_{ij\dots kl\dots mn} - T_{ij\dots lk\dots mn}) = T_{ij\dots [kl]\dots mn}$$

Más aún, es evidente que las componentes de un tensor genérico T_{ij} , pueden expresarse como una combinación de su parte simétrica y antisimétrica

$$T_{ij} = S_{ij} + A_{ij}.$$

Obviamente que algo equivalente se puede realizar para componentes contravariantes de tensores.

3.2.6. Tensor métrico, índices y componentes

Para una base genérica, $\{|u_j\rangle\}$, no necesariamente ortogonal, de un espacio vectorial con producto interno, podemos definir la expresión de un tensor simétrico $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ que hemos denominado tensor métrico de la siguiente manera

$$\mathbf{g} \left[\begin{array}{c} |u_i\rangle \quad |u_j\rangle \\ \downarrow \quad \downarrow \\ \circ \quad \circ \end{array} \right] = g_{ij} \equiv g_{ji} \Rightarrow g_{ij} \equiv g_{ji} = \mathbf{g} [|u_i\rangle, |u_j\rangle]$$

$$\mathbf{g} \left[\begin{array}{c} \langle u^i | \quad \langle u^j | \\ \bullet \quad \bullet \end{array} \right] = g^{ij} \equiv g^{ji} \Rightarrow g^{ij} \equiv g^{ji} = (g_{ij})^{-1}$$

Nótese que las $g_{ij} \equiv g_{ji}$ son las componentes del tensor $\mathbf{g} [\circ, \circ]$ una vez que la base $\{|u_j\rangle\}$ ha actuado.

La denominación de tensor **métrico**, no es gratuita, $\mathbf{g} [\circ, \circ]$ cumple con todas las propiedades de la métrica definida para un **Espacio Vectorial Euclidiano** expuestas en la Sección 2.2.1.

Una vez más, para facilitar la lectura, transcribiremos a continuación esas propiedades :

1. $\mathbf{g} [|u_i\rangle, |u_j\rangle] = g_{ij} \equiv g_{ji} \geq 0 \quad \forall |u_j\rangle$, y si $\mathbf{g} [|u_i\rangle, |u_j\rangle] = 0 \Rightarrow i = j$
2. $\mathbf{g} [|u_i\rangle, |u_j\rangle] = \mathbf{g} [|u_j\rangle, |u_i\rangle] \Rightarrow g_{ij} \equiv g_{ji}$
3. $\mathbf{g} [|u_i\rangle, |u_j\rangle] \leq \mathbf{g} [|u_i\rangle, |u_k\rangle] + \mathbf{g} [|u_k\rangle, |u_j\rangle]$: La desigualdad Triangular

Si la base genérica, $\{|u_i\rangle\} = \{|e_i\rangle\}$, es ortonormal, entonces estas propiedades emergen de manera natural

$$\mathbf{g} [\circ, \circ] \equiv g_{ij} \langle e^i | \otimes \langle e^j | \equiv g_{ji} \langle e^j | \otimes \langle e^i | \quad \text{y} \quad \mathbf{g} [\bullet, \bullet] \equiv g^{ij} |e_i\rangle \otimes |e_j\rangle \equiv g^{ji} |e_j\rangle \otimes |e_i\rangle,$$

con lo cual sus componentes serán matrices simétricas $g_{ij} = g_{ji}$ e igualmente $g^{ij} = g^{ji}$.

En general impondremos que

$$(g_{ij} \langle u^i | \otimes \langle u^j |) (g^{km} |u_k\rangle \otimes |u_m\rangle) = g_{ij} g^{km} \langle u^i |u_k\rangle \langle u^j |u_m\rangle = g_{ij} g^{km} \delta_k^i \delta_m^j = g_{ij} g^{ji} = \delta_i^i = n,$$

ya que $i, j = 1, 2, 3, \dots, n$. Con lo cual g_{ij} es la matriz inversa de g^{ij} . Es decir, hemos definido las componentes contravariantes del tensor de modo que cumplan con $g_{ik} g^{kj} = \delta_i^j$

Adicionalmente, también es claro que

$$(g_{ij} \langle u^i | \otimes \langle u^j |) |a\rangle = a^k (g_{ij} \langle u^i | \otimes \langle u^j |) |u_k\rangle = a^k g_{ij} \langle u^j |u_k\rangle \langle u^i | = a^k g_{ij} \delta_k^j \langle u^i | = a^k g_{ik} \langle u^i | \equiv a_i \langle u^i |,$$

con lo cual $a_i = a^k g_{ik}$. De la misma forma

$$\langle a | (g^{ij} |u_i\rangle \otimes |u_j\rangle) = \langle a | (g^{ij} |u_i\rangle \otimes |u_j\rangle) = g^{ij} \langle a |u_i\rangle \otimes |u_j\rangle = a_k g^{ij} \langle u^k |u_i\rangle |u_j\rangle = a_k g^{kj} |u_j\rangle \equiv a^j |u_j\rangle,$$

otra vez $a^j = a_k g^{kj}$, ahora subimos el índice correspondiente.

De esta manera, el tensor métrico nos permite asociar formas con vectores, componentes covariantes (formas) a componentes contravariantes (vectores) y dicho rápido y mal, pero de uso muy frecuente: el tensor métrico nos permite subir y bajar índices.

Otra forma de verlo es combinando las propiedades del producto directo de tensores y contracción de índices

$$g^{ij} |u_i\rangle \otimes |u_j\rangle \otimes P_k^{lmn} |u_l\rangle \otimes |u_m\rangle \otimes |u_n\rangle \otimes \langle u^k| \Rightarrow g^{ij} P_k^{lmn} |u_j\rangle \otimes P_k^{lmn} |u_l\rangle \otimes |u_m\rangle \otimes |u_n\rangle \otimes \langle u^k| u_i\rangle$$

$$g^{ij} P_k^{lmn} |u_j\rangle \otimes |u_l\rangle \otimes |u_m\rangle \otimes |u_n\rangle \cdot \underbrace{\langle u^k| u_i\rangle}_{\delta_i^k} = P^{jlmn} |u_j\rangle \otimes |u_l\rangle \otimes |u_m\rangle \otimes |u_n\rangle$$

$$g^{ij} P_i^{lmn} \equiv P^{jlmn}$$

Adicionalmente, el tensor métrico permite la contracción de índices. Así, dado un producto tensorial de dos vectores que se pueden expresar en una base ortonormal $\{|e_i\rangle\}$

$$|a, b\rangle = |a\rangle \otimes |b\rangle = a^k b^m |e_k\rangle \otimes |e_m\rangle$$

↓

$$(g_{ij} \langle e^i| \otimes \langle e^j|) (a^k |e_k\rangle \otimes b^m |e_m\rangle) = a^k b^m g_{ij} \delta_k^i \delta_m^j = a^k b^m g_{km} = a^k b_k = \langle b | a \rangle = \langle a | b \rangle .$$

Es decir, el producto interno de dos vectores involucra, de manera natural, la métrica del espacio,

$$\langle b | a \rangle = \langle a | b \rangle = a^k b_k = a_k b^k = a^k b^m g_{km} = a_k b_m g^{km} .$$

Obviamente la norma de un vector, también incluirá al tensor métrico:

$$\| |a\rangle \|^2 = \langle a | a \rangle = a_i a^j \langle e^i | e_j \rangle = a_i a^i = a_i a_j g^{ij} = a^i a^j g_{ij} .$$

El caso más emblemático lo constituye la norma de un desplazamiento infinitesimal. Para una base genérica, $\{|u_j\rangle\}$ no necesariamente ortogonal de un espacio vectorial con producto interno, el desplazamiento infinitesimal puede expresarse como

$$(ds)^2 \equiv \langle dr | dr \rangle = (dx_k \langle u^k |) (dx^m |u_m\rangle) = \langle u^k | u_m \rangle dx_k dx^m = dx_m dx^m = g_{km} dx^k dx^m .$$

Si la base $\{|e_j\rangle\}$ es ortogonal (cosa más o menos común pero no necesariamente cierta siempre) las matrices g_{ij} y g^{ij} son diagonales y cumplen que

$$g_{ii} = \frac{1}{g^{ii}} \Rightarrow (ds)^2 = (h_1 dx^1)^2 + (h_2 dx^2)^2 + (h_3 dx^3)^2$$

donde $h_i = \sqrt{g_{ii}}$, con $i, j = 1, 2, 3$ (aquí no hay suma), se denominan los factores de escala.

3.3. Un par de tensores

En esta sección vamos a ejemplificar la utilización de los tensores en varios ámbitos de la Física, en particular de la Mecánica. En la próxima sección 3.3.1 consideraremos el tensor de esfuerzos para describir las tensiones internas de cuerpos sometidos a fuerzas externas. Haremos el análisis tanto para el caso de dos como de tres dimensiones. Luego en la Sección 3.3.2 consideraremos el tensor de inercia y su impacto en la dinámica de cuerpos en movimiento.

3.3.1. El tensor de esfuerzos (stress)

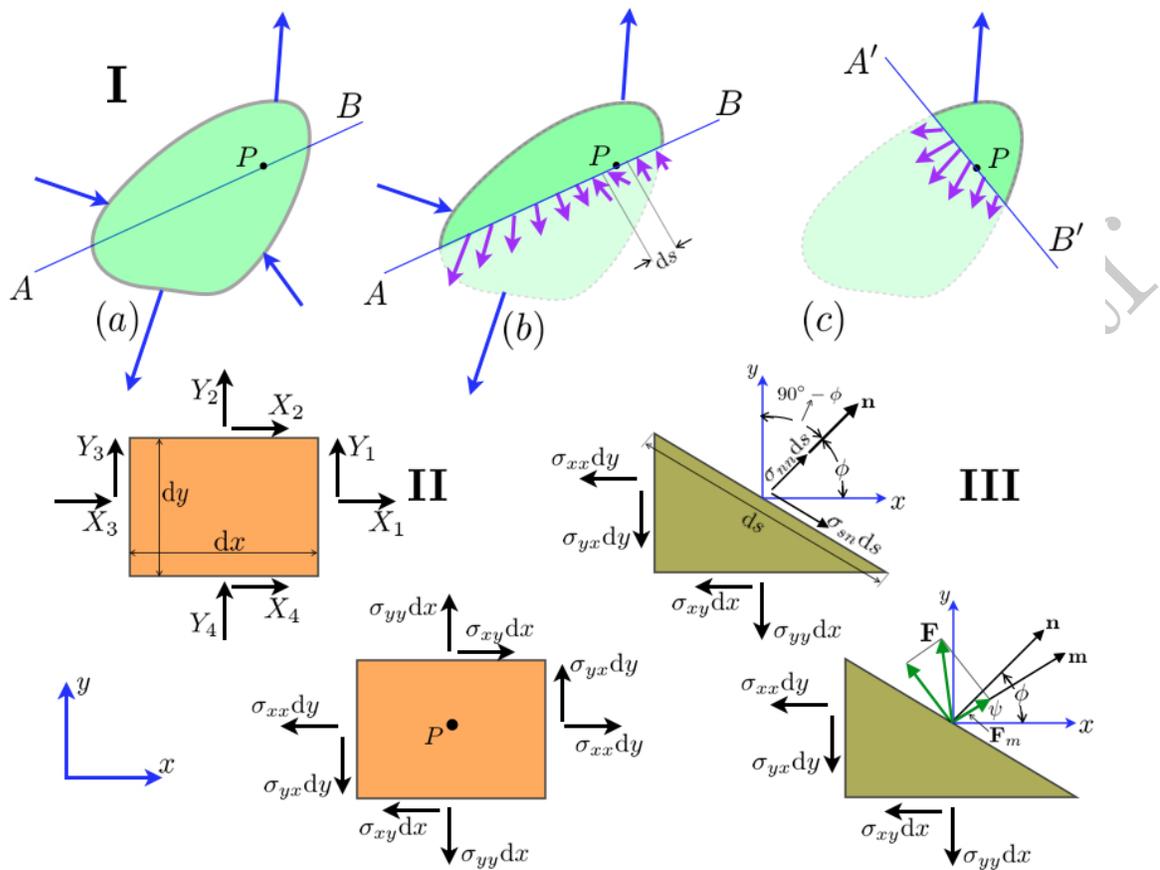


Figura 3.1: Tensor de Esfuerzos (*stress*) en 2 dimensiones

El caso 2D

Supongamos un cuerpo que se encuentra en equilibrio y está sometido a un conjunto de fuerzas externas. Para facilitar las cosas consideremos el efecto de esas fuerzas sobre un plano que contiene a un determinado punto P (ver figura 3.1 cuadrante Ia) Es decir, vamos a considerar los efectos de las componentes de todas las fuerzas sobre ese plano y obviaremos el efecto del resto de las componentes.

Como observamos en la figura 3.1 Ib y Ic, si cortamos la superficie en dos líneas (AB y $A'B'$), podemos ver que el efecto del conjunto de fuerzas externas es distinto sobre P en la dirección perpendicular a cada una de esas líneas. De hecho, al “cortar” la superficie las fuerzas que aparecen sobre las líneas AB (y $A'B'$) eran fuerzas internas y ahora son externas al nuevo cuerpo “cortado”. Así, estas fuerzas por unidad de longitud¹

¹En el caso tridimensional, las fuerzas que generan los esfuerzos serán definidas como fuerzas por unidad de área. Ese caso lo veremos en la próxima sección.

sobre el punto P existen como un conjunto de fuerzas que generan esfuerzos (*stress*). Por lo tanto, es claro que los esfuerzos sobre un punto dependen del punto, de las fuerzas externas y de la dirección del efecto.

Para irnos aclarando consideremos un elemento de área infinitesimal ds sobre la cual actúa un conjunto de fuerzas externas, las cuales las podemos descomponer como normales y tangenciales a la línea sobre la cual están aplicadas (ver figura 3.1 cuadrante II). Es costumbre denotar los esfuerzos normales y tangenciales

$$dA = dx dy \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \uparrow Y_2 = \sigma_2 dx \quad \rightarrow X_2 = \tau_2 dx \\ Y_3 = \tau_3 dy \uparrow \\ X_3 = \sigma_3 dy \rightarrow \\ \uparrow Y_4 = \sigma_4 dx \quad \rightarrow X_4 = \tau_4 dx \end{array} \right. \begin{array}{l} dx \\ dy \\ ds \\ dy \\ dx \end{array} \begin{array}{l} \uparrow Y_1 = \tau_1 dy \\ \rightarrow X_1 = \sigma_1 dy \end{array}$$

Consideramos la segunda ley de Newton aplicada a cada diferencial de masa dm y obtendremos

$$\sum \mathbf{F}_i^{ext} = dm \mathbf{a} = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \tau_1 dy + \sigma_2 dx + \tau_3 dy + \sigma_4 dx = 0 = (\sigma_2 + \sigma_4) dx + (\tau_1 + \tau_3) dy; \\ \sigma_1 dy + \tau_2 dx + \sigma_3 dy + \tau_4 dx = 0 = (\tau_2 + \tau_4) dx + (\sigma_1 + \sigma_3) dy \end{array} \right.$$

con lo cual

$$\sigma_2 = -\sigma_4; \quad \tau_1 = -\tau_3$$

$$\tau_2 = -\tau_4 \quad \sigma_1 = -\sigma_3$$

como se está en equilibrio, también la sumatoria de torques se tendrá que anular. Esto es

$$\left. \begin{array}{l} (\tau_1 dy) \frac{dx}{2} - (\tau_2 dx) \frac{dy}{2} = 0 \\ (\tau_3 dy) \frac{dx}{2} - (\tau_4 dx) \frac{dy}{2} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = \tau_4$$

entonces, nos damos cuenta que existen sólo tres cantidades independientes: dos esfuerzos normales σ_1 y σ_2 ; y un esfuerzo tangencial τ_1 . Adicionalmente notamos que los esfuerzos tienen que ver con la dirección de la fuerza y la superficie sobre la cual va aplicada. Con ello podemos diseñar la siguiente notación para los esfuerzos: σ_{ij} . El primer índice indica la dirección de la fuerza y el segundo dirección de la normal de la superficie donde está aplicada. Así, tal y como muestra la figura (ver figura 3.1 cuadrante II)

$$\sigma_1 \equiv \sigma_{xx}; \quad -\sigma_4 \equiv \sigma_{yy}; \quad \tau_2 \equiv \sigma_{xy} \equiv \sigma_{yx}$$

El cambio de signo se debe a lo incómodo de la notación: $\sigma_4 \equiv \sigma_{y-y}$ ya que la normal de lado 4 apunta en la dirección $-y$. Es importante también señalar que los esfuerzos en cualquier punto contenido en el diferencial de área $dA = dx dy$ deben ser considerado constantes. O, lo que es lo mismo, que podemos hacer tender a cero el área del diferencial y con ello asociar los esfuerzos σ_{ij} a un punto P contenido en dA sobre la cual hemos calculado los esfuerzos.

En esta misma línea de razonamiento, nos podemos preguntar cual es la expresión de los esfuerzos cuando se miden respecto a una superficie genérica, definida por un vector normal \mathbf{n} (ver figura 3.1 cuadrante III). Es decir, queremos conocer los esfuerzos medidos en el punto P y en la dirección \mathbf{n} , es decir, σ_{nn} .

Tendremos que

$$x \rightarrow \sigma_{xx} dy + \sigma_{xy} dx = \sigma_{nn} ds \cos(\phi) + \sigma_{sn} ds \sin(\phi); \quad y \rightarrow \sigma_{yy} dx + \sigma_{yx} dy = \sigma_{nn} ds \sin(\phi) - \sigma_{sn} ds \cos(\phi)$$

Ahora bien, dado que $dy = ds \cos(\phi)$ y $dx = ds \sin(\phi)$, entonces podemos expresar

$$\sigma_{nn} = \sigma_{xx} \cos^2(\phi) + \sigma_{xy} \sin(\phi) \cos(\phi) + \sigma_{yx} \sin(\phi) \cos(\phi) + \sigma_{yy} \sin^2(\phi)$$

$$\sigma_{sn} = \sigma_{xx} \sin(\phi) \cos(\phi) + \sigma_{xy} \sin^2(\phi) - \sigma_{yx} \cos^2(\phi) - \sigma_{yy} \sin(\phi) \cos(\phi)$$

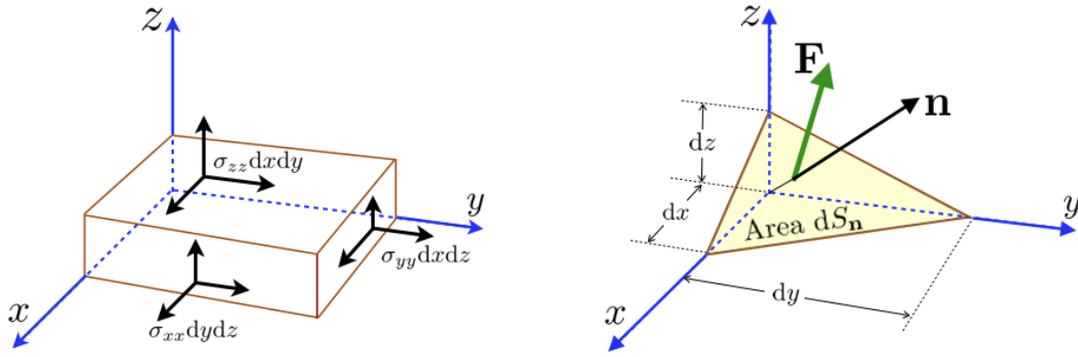


Figura 3.2: Tensor de Esfuerzos en 3 dimensiones

y si ahora nos damos cuenta que si construimos una matriz

$$A_j^i = \begin{pmatrix} A_n^x & A_s^x \\ A_n^y & A_s^y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & \text{sen}(\phi) \\ \text{sen}(\phi) & -\cos(\phi) \end{pmatrix}$$

entonces podemos expresar

$$\sigma_{nn} = A_n^x A_n^x \sigma_{xx} + A_n^x A_n^y \sigma_{xy} + A_n^y A_n^x \sigma_{yx} + A_n^y A_n^y \sigma_{yy} \Rightarrow \sigma_{nn} = A_n^i A_n^j \sigma_{ij} \quad \text{con } i, j = n, s$$

$$\sigma_{sn} = A_s^x A_n^x \sigma_{xx} + A_s^x A_n^y \sigma_{xy} + A_s^y A_n^x \sigma_{yx} + A_s^y A_n^y \sigma_{yy} \Rightarrow \sigma_{sn} = A_s^i A_n^j \sigma_{ij} \quad \text{con } i, j = n, s$$

es decir,

$$\sigma_{kl} = A_k^i A_l^j \sigma_{ij}, \quad \text{con } i, j, k, l = n, s.$$

Como veremos más adelante, cualquier objeto que transforme como $\sigma_{kl} = A_k^i A_l^j \sigma_{ij}$ lo llamaremos tensor de segundo orden.

El caso 3D

Podemos proceder como en el caso anterior estableciendo las condiciones de equilibrio

$$\sum \mathbf{F}_i^{ext} = 0 \quad \text{y} \quad \sum \boldsymbol{\tau}_i^{ext} = 0,$$

con ello construimos un volumen (cúbico) diferencial y construimos los esfuerzos normales y tangenciales, los cuales serán

$$\sigma_{xx} dydz; \quad \sigma_{yy} dxdz; \quad \sigma_{zz} dxdy; \quad \sigma_{xz} dxdy; \quad \sigma_{yz} dxdy; \quad \sigma_{xy} dxdz;$$

Siguiendo el mismo proceso que involucra imponer el equilibrio, es fácil demostrar que al igual que el caso anterior, el tensor de esfuerzos σ_{ij} cumple con:

$$\sigma_{xz} = \sigma_{zx}; \quad \sigma_{yz} = \sigma_{zy}; \quad \sigma_{xy} = \sigma_{yx}.$$

Tendremos 6 componentes (tres normales y tres tangenciales) independientes. Es decir, si bien el tensor de esfuerzos σ_{ij} viene representado por una matriz 3×3 y por lo tanto tiene 9 elementos, sólo 6 son independientes. Vayamos ahora al caso general para un tensor de esfuerzos en un medio elástico. Para ello construimos un tetraedro regular tal y como muestra la figura 3.2, y sobre su cara genérica asociada a un vector normal \mathbf{n} una fuerza \mathbf{F}

$$\mathbf{F} = F^i \mathbf{i}_i = F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} + F_z \mathbf{k} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} F_x = \sigma_{xn} dS_n \\ F_y = \sigma_{yn} dS_n \\ F_z = \sigma_{zn} dS_n \end{array} \right\} \Rightarrow F^i = \sigma_j^i n^j dS \Rightarrow \mathbf{F} = \boldsymbol{\sigma} \cdot d\mathbf{S}$$

de esta manera se especifica como la fuerza actúa sobre un determinado elemento de superficie. Es claro que la condición de equilibrio se traduce en

$$\sum F_{xi} = 0 \Rightarrow \sigma_{xn} dS_n - \frac{1}{2} \sigma_{xx} dy dz - \frac{1}{2} \sigma_{xy} dx dz - \frac{1}{2} \sigma_{xz} dx dy = 0$$

$$\sum F_{yi} = 0 \Rightarrow \sigma_{yn} dS_n - \frac{1}{2} \sigma_{yx} dy dz - \frac{1}{2} \sigma_{yy} dx dz - \frac{1}{2} \sigma_{yz} dx dy = 0$$

$$\sum F_{zi} = 0 \Rightarrow \sigma_{zn} dS_n - \frac{1}{2} \sigma_{zx} dy dz - \frac{1}{2} \sigma_{zy} dx dz - \frac{1}{2} \sigma_{zz} dx dy = 0$$

Si consideramos la proyección de dS_n sobre cada uno de los planos del sistema cartesiano tendremos que

$$\left. \begin{array}{l} dS^n \cos(\mathbf{i}; \mathbf{n}) = \frac{1}{2} dy dz = dS^n A_n^x \\ dS^n \cos(\mathbf{j}; \mathbf{n}) = \frac{1}{2} dx dz = dS^n A_n^y \\ dS^n \cos(\mathbf{k}; \mathbf{n}) = \frac{1}{2} dx dy = dS^n A_n^z \end{array} \right\} \Rightarrow \sigma_{xn} = \sigma_{xx} A_n^x + \sigma_{xy} A_n^y + \sigma_{xz} A_n^z$$

y equivalentemente

$$\sigma_{yn} = \sigma_{yx} A_n^x + \sigma_{yy} A_n^y + \sigma_{yz} A_n^z; \quad \text{y} \quad \sigma_{zn} = \sigma_{zx} A_n^x + \sigma_{zy} A_n^y + \sigma_{zz} A_n^z,$$

las cuales se conocen como las relaciones de Cauchy, y representan los esfuerzos sobre la superficie con normal \mathbf{n} .

Ahora bien, dado que $\mathbf{F} = \boldsymbol{\sigma} \cdot d\mathbf{S}$ es una relación vectorial podemos proyectar en la dirección $\hat{\mathbf{u}}_m$

$$\hat{\mathbf{u}}_m \cdot \mathbf{F} = \hat{\mathbf{u}}_m \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot d\mathbf{S}) \Rightarrow F^m = \sigma_n^m dS^n = (\sigma_i^m A_n^i) dS^n = (\sigma_i^m A_n^i) dS^n$$

$$\sigma_{mn} dS^n = (\sigma_{mi} A_n^i) dS^n \Rightarrow \sigma_{mn} dS^n = (\sigma_{ki} A_m^k A_n^i) dS^n \quad \text{con } i, j = x, y, z$$

Una vez más vemos que transforma como un tensor.

3.3.2. El Tensor de inercia

Consideremos el caso de un sistema de n partículas. La cantidad de movimiento angular para este sistema vendrá dada por

$$\mathbf{L} = \sum_i m_{(i)} (\mathbf{r}_{(i)} \times \mathbf{v}_{(i)})$$

donde hemos indicado que la i -ésima partícula que está en la posición $\mathbf{r}_{(i)}$ tiene una velocidad $\mathbf{v}_{(i)}$. Si las distancias entre las partículas y entre las partículas y el origen de coordenadas es constante podremos expresar la velocidad de cada una de ellas como

$$\mathbf{v}_{(i)} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{(i)}$$

(¿por qué?). Donde $\boldsymbol{\omega}$ es la velocidad angular instantánea del sistema. Entonces tendremos que

$$\mathbf{L} = \sum_i m_{(i)} [\mathbf{r}_{(i)} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{(i)})] = \sum_i m_{(i)} [\boldsymbol{\omega} (\mathbf{r}_{(i)} \cdot \mathbf{r}_{(i)}) - \mathbf{r}_{(i)} (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}_{(i)})],$$

y para cada partícula se cumple que las componentes de la cantidad de movimiento angular serán

$$L^k = \sum_i m_{(i)} \left[\omega^k (r_{(i)}^m r_{(i)m}) - r_{(i)}^k (\omega^m r_{(i)m}) \right].$$

Si vemos que $\omega_{(i)}^k = \delta_l^k \omega_l^i$ entonces

$$L^k = \sum_i m_{(i)} \left[\delta_l^k \omega_l^i (r_{(i)}^m r_{(i)m}) - r_{(i)}^k (\omega^m r_{(i)m}) \right] = \omega_l^i \underbrace{\left[\sum_i m_{(i)} (\delta_l^k (r_{(i)}^m r_{(i)m}) - r_{(i)}^k (r_{(i)l})) \right]}_{I_l^k}$$

es decir

$$L^k = \omega_l^i I_l^k, \quad \text{donde } I_l^k = \sum_i m_{(i)} (\delta_l^k (r_{(i)}^m r_{(i)m}) - r_{(i)}^k (r_{(i)l})).$$

El objeto I_l^k se conoce como el tensor de inercia y corresponde a 9 cantidades (a pesar que sólo 6 son independientes porque es un tensor simétrico)

$$I_l^k = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_i m_{(i)} (y_{(i)}^2 + z_{(i)}^2) & -\sum_i m_{(i)} (x_{(i)} y_{(i)}) & -\sum_i m_{(i)} (x_{(i)} z_{(i)}) \\ -\sum_i m_{(i)} (x_{(i)} y_{(i)}) & \sum_i m_{(i)} (x_{(i)}^2 + z_{(i)}^2) & -\sum_i m_{(i)} (y_{(i)} z_{(i)}) \\ -\sum_i m_{(i)} (x_{(i)} z_{(i)}) & -\sum_i m_{(i)} (y_{(i)} z_{(i)}) & \sum_i m_{(i)} (z_{(i)}^2 + y_{(i)}^2) \end{pmatrix}$$

Por ahora, nos contentaremos en suponer que esta construcción es un tensor y lo demostraremos más adelante.

La ilustración más sencilla de que la masa en rotación se comporta como un tensor y no como un escalar lo vemos en la rotación de dos masas iguales: m_1 y m_2 (con lo cual $m_1 = m_2 = m$) unidas por una varilla sin masa de longitud l . Si el sistema (masas + varillas) se encuentra girando alrededor su centro de masa y ambas masas se encuentran sobre el plano xy , vale decir que la barra sin masa forma un ángulo de $\alpha = \frac{\pi}{2}$ con el eje z , entonces tendremos que

$$\mathbf{r} = \frac{l}{2} \cos(\theta) \mathbf{i} + \frac{l}{2} \sin(\theta) \mathbf{j} \Rightarrow \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = -\frac{l}{2} \frac{d\theta}{dt} \sin(\theta) \mathbf{i} + \frac{l}{2} \frac{d\theta}{dt} \cos(\theta) \mathbf{j}$$

con lo cual

$$\mathbf{L} = m_1 (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{v}_1) + m_2 (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{v}_2) = m (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{v}_1) + m ((-\mathbf{r}_1) \times (-\mathbf{v}_1)) = 2m (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{v}_1) = \left(\frac{l}{2}\right)^2 \frac{d\theta}{dt} \mathbf{k}$$

ya que

$$m_1 = m_2 = m; \quad \mathbf{r}_2 = -\mathbf{r}_1 \quad \text{y} \quad \mathbf{v}_2 = -\mathbf{v}_1.$$

Ejercicios

1. En el caso 3D tenemos que si $\{\mathbf{e}_i\}$ define un sistema de coordenadas (dextrógiro) no necesariamente ortogonal, entonces, demuestre que

$$\mathbf{e}^i = \frac{\mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_k}{\mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_i} \quad i, j, k = 1, 2, 3 \text{ y sus permutaciones cíclicas}$$

2. Demuestre que

$$g^{ij} = \mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}^j$$

3. Si la base $\{\mathbf{e}_i\}$ es ortogonal, demuestre que

- a) g_{ij} es diagonal.
- b) $g^{ii} = 1/g_{ii}$ (no hay suma).
- c) $|\mathbf{e}^i| = 1/|\mathbf{e}_i|$.

3.4. Repensando los vectores nuevamente

3.4.1. Vectores, covectores y leyes de transformación

Hemos visto que un determinado vector $|a\rangle \in V$ puede expresarse en una base ortogonal $\{|e_j\rangle\}$ como: $a^j |e_j\rangle$ donde las a^j son las componentes del vector *contravariantes* en la base que se ha indicado. En general, como es muy largo decir “componentes del vector contravariante” uno se refiere (y nos referiremos de ahora en adelante) al conjunto $\{a^j\}$ como un *vector contravariante* obviando la precisión de *componente*, pero realmente las a^j **son** las componentes del vector.

Adicionalmente, en esta etapa pensaremos a las bases como distintos observadores o sistemas de referencias. Con ello tendremos (algo que ya sabíamos) que un vector se puede expresar en distintas bases y tendrá distintas componentes referidas a esa base

$$|a\rangle = a^j |e_j\rangle = \tilde{a}^j |\tilde{e}_j\rangle .$$

Así una misma cantidad física vectorial se verá distinta (tendrá distintas componentes) desde diferentes sistemas de coordenadas. Las distintas “visiones” están conectadas mediante un transformación de sistema de referencia como veremos más adelante.

Igualmente hemos dicho que una forma diferencial $\langle b| \in V^*$ es susceptible de expresarse en una base $\{\langle e^i|\}$ del espacio dual V^* como $b_i \langle e^i|$ y, como el espacio está equipado con un producto interno entonces

$$\langle a|b\rangle = \langle b|a\rangle = (b_i \langle e^i|) \cdot (a^j |e_j\rangle) = b_i a^j \delta_j^i = a^i b_i$$

Con lo cual avanzamos otra vez en la interpretación de cantidades físicas: una cantidad física escalar se verá igual (será invariante) desde distintos sistemas de referencia.

Además sabemos que unas y otras componentes se relacionan como

$$\left. \begin{aligned} \langle e^i | a \rangle &= a^j \langle e^i | e_j \rangle = a^j \delta_j^i = \tilde{a}^j \langle e^i | \tilde{e}_j \rangle \\ \langle \tilde{e}^i | a \rangle &= \tilde{a}^j \langle \tilde{e}^i | \tilde{e}_j \rangle = \tilde{a}^j \delta_j^i = a^j \langle \tilde{e}^i | e_j \rangle \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} a^i = A_j^i \tilde{a}^j \\ \tilde{a}^i = \tilde{A}_j^i a^j \end{cases}$$

donde claramente

$$\langle e^i | \tilde{e}_j \rangle = A_j^i; \quad \langle \tilde{e}^i | e_j \rangle = \tilde{A}_j^i \quad \text{y} \quad A_k^i \tilde{A}_j^k = \delta_j^i \iff \tilde{A}_j^i = (A_j^i)^{-1}$$

Diremos entonces que aquellos objetos cuyas componentes transforman como $a^i = A_j^i \tilde{a}^j$ o equivalentemente $\tilde{a}^i = \tilde{A}_j^i a^j$ serán vectores, o en un lenguaje un poco más antiguo, vectores contravariantes. Algunos autores prefieren utilizar la siguiente notación para las transformaciones: $a^i = A_j^i a^{j'}$ y $a^{i'} = \tilde{A}_j^i a^j$, por lo que $\delta_j^i = A_k^i \tilde{A}_j^k$.

Tradicionalmente, e inspirados en la ley de transformación, la representación matricial de las componentes contravariantes de un vector, $\langle e^i | a \rangle = a^j$, para una base determinada $\{|e_j\rangle\}$ se estructuran en una columna

$$|a\rangle \Rightarrow \langle e^i | a \rangle \quad \text{con } i = 1, 2, 3, \dots, n \iff \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ \vdots \\ a^n \end{pmatrix}$$

De la misma manera, en el espacio dual, V^* , las formas diferenciales se podrán expresar en término de una base de ese espacio vectorial como $\langle b | = b_i \langle e^i | = \tilde{b}_i \langle \tilde{e}^i |$. Las $\{b_i\}$ serán las componentes de las formas diferenciales o las componentes *covariantes* de un vector $\langle b |$, o dicho rápidamente un *vector covariante* o *covector*. Al igual que en el caso de las componentes contravariantes las componentes covariantes transforman de un sistema de referencia a otro mediante la siguiente ley de transformación:

$$\left. \begin{aligned} \langle b | e_j \rangle = b_i \langle e^i | e_j \rangle = b_i \delta_j^i = \tilde{b}_i \langle \tilde{e}^i | e_j \rangle \\ \langle b | \tilde{e}_j \rangle = \tilde{b}_i \langle \tilde{e}^i | \tilde{e}_j \rangle = \tilde{b}_i \delta_j^i = b_i \langle e^i | \tilde{e}_j \rangle \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} b_j = \tilde{b}_i A_j^i \\ \tilde{b}_j = b_i \tilde{A}_j^i \end{cases}$$

Otra vez, objetos cuyas componentes transformen como $b_j = \tilde{b}_i A_j^i$ los denominaremos formas diferenciales o *vectores covariantes* o *covectores* y serán representados matricialmente como un arreglo tipo fila

$$\langle b | \Rightarrow \langle b | e_i \rangle \quad \text{con } i = 1, 2, 3, \dots, n \iff (b_1 \quad b_2 \quad \dots \quad b_n)$$

3.4.2. Cartesianas y polares, otra vez

El ejemplo más simple, y por ello, clásico y emblemático de lo anterior lo constituye las expresiones de un mismo vector en dos sistemas de coordenadas en el plano: Cartesianas $\{|i\rangle, |j\rangle\}$ y polares $\{|u_r\rangle, |u_\theta\rangle\}$. Esto es

$$|a\rangle = a_x |i\rangle + a_y |j\rangle = a^1 |e_1\rangle + a^2 |e_2\rangle \quad \text{y} \quad |a\rangle = a_r |u_r\rangle + a_\theta |u_\theta\rangle = \tilde{a}^1 |\tilde{e}_1\rangle + \tilde{a}^2 |\tilde{e}_2\rangle .$$

Al expresar una base en términos de la otra obtenemos

$$|u_r\rangle = \cos(\theta) |i\rangle + \sin(\theta) |j\rangle \quad \text{y} \quad |u_\theta\rangle = -\sin(\theta) |i\rangle + \cos(\theta) |j\rangle ,$$

con lo cual

$$\langle e^i | \tilde{e}_j \rangle = A_j^i \iff A_j^i = \begin{pmatrix} \langle i | u_r \rangle & \langle i | u_\theta \rangle \\ \langle j | u_r \rangle & \langle j | u_\theta \rangle \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

$$\langle \tilde{e}^i | e_j \rangle = \tilde{A}_j^i \iff \tilde{A}_j^i = \begin{pmatrix} \langle u_r | i \rangle & \langle u_r | j \rangle \\ \langle u_\theta | i \rangle & \langle u_\theta | j \rangle \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

cumpliendo además

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \iff A_k^i \tilde{A}_j^k = \delta_j^i .$$

De este modo si

$$|a\rangle = a_r |u_r\rangle + a_\theta |u_\theta\rangle = \tilde{a}^1 |\tilde{e}_1\rangle + \tilde{a}^2 |\tilde{e}_2\rangle = a_x |i\rangle + a_y |j\rangle = a^1 |e_1\rangle + a^2 |e_2\rangle$$

tendremos que

$$\tilde{a}^i = \tilde{A}_j^i a^j \iff \begin{pmatrix} a_r \\ a_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \text{sen}(\theta) \\ -\text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x \cos(\theta) + a_y \text{sen}(\theta) \\ -a_x \text{sen}(\theta) + a_y \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

con lo cual

$$a_r = a_x \cos(\theta) + a_y \text{sen}(\theta) \quad \text{y} \quad a_\theta = -a_x \text{sen}(\theta) + a_y \cos(\theta).$$

Del mismo modo

$$a^i = A_j^i \tilde{a}^j \iff \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_r \\ a_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_r \cos(\theta) - a_\theta \text{sen}(\theta) \\ a_r \text{sen}(\theta) + a_\theta \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

y

$$a_x = a_r \cos(\theta) - a_\theta \text{sen}(\theta) \quad \text{y} \quad a_y = a_r \text{sen}(\theta) + a_\theta \cos(\theta).$$

3.4.3. Repensando las componentes

En general, podemos pensar que las componentes de los vectores pueden ser funciones de las otras. Consideremos el ejemplo anterior con esta visión. Tendremos que un punto en el plano viene representado en coordenadas cartesianas por dos números (x, y) y en coordenadas polares por otros dos números (r, θ) . Siguiendo el ejemplo anterior un punto P , en el plano lo describimos como

$$|P\rangle = r_P |u_r\rangle = x_P |i\rangle + y_P |j\rangle.$$

Veamos como están relacionadas estas dos descripciones, para este caso las ecuaciones de transformación son

$$\left. \begin{aligned} x_P = x_P(r, \theta) = x^1 = x^1(\tilde{x}^1, \tilde{x}^2) \\ y_P = y_P(r, \theta) = x^2 = x^2(\tilde{x}^1, \tilde{x}^2) \end{aligned} \right\} \iff \left\{ \begin{aligned} r_P = r_P(x, y) = \tilde{x}^1 = \tilde{x}^1(x^1, x^2) \\ \theta = \theta_P(x, y) = \tilde{x}^2 = \tilde{x}^2(x^1, x^2) \end{aligned} \right.$$

y explícitamente

$$\begin{aligned} x_P = r_P \cos(\theta) &\Rightarrow x^1 = \tilde{x}^1 \cos(\tilde{x}^2) \\ y_P = r_P \text{sen}(\theta) &\Rightarrow x^2 = \tilde{x}^1 \text{sen}(\tilde{x}^2) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} r_P = \sqrt{x_P^2 + y_P^2} &\Rightarrow \tilde{x}^1 = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2} \\ \theta = \arctan\left(\frac{y_P}{x_P}\right) &\Rightarrow \tilde{x}^2 = \arctan\left(\frac{x^2}{x^1}\right) \end{aligned}$$

Es claro que ambas coordenadas están relacionadas y que se puede invertir la relación

$$\left. \begin{aligned} \tilde{x}^1 = \tilde{x}^1(x^1, x^2) \\ \tilde{x}^2 = \tilde{x}^2(x^1, x^2) \end{aligned} \right\} \iff \left\{ \begin{aligned} x^1 = x^1(\tilde{x}^1, \tilde{x}^2) \\ x^2 = x^2(\tilde{x}^1, \tilde{x}^2) \end{aligned} \right.$$

Si se piden cosas razonables:

- que las funciones $x^i = x^i(\tilde{x}^m)$ y $\tilde{x}^j = \tilde{x}^j(x^m)$ sean al menos \mathcal{C}^2 (función y derivada continua)

- que el determinante de la matriz Jacobiana sean finito y distinto de cero, para garantizar que existe la función inversa.

$$\det \left(\frac{\partial x^i(\tilde{x}^k)}{\partial \tilde{x}^j} \right) \neq 0.$$

Más aún, si

$$x^i = x^i(\tilde{x}^j(x^k)) \Rightarrow \frac{\partial x^i}{\partial x^k} = \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^j} \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^k} = \delta_k^i \Rightarrow dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^j} d\tilde{x}^j,$$

con lo cual intuimos dos cosas:

1. que las componentes de un vector, deben transformar bajo un cambio de coordenadas como

$$x^i = \frac{\partial x^i(\tilde{x}^k)}{\partial \tilde{x}^j} \tilde{x}^j.$$

2. Las matrices jacobianas $\frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^k}$ y $\frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^k}$ son una la inversa de la otra.

Veamos si es cierto para el caso de vectores en el plano. Para ello calculamos la matriz jacobiana (matriz de derivadas) la cual será

$$\left(\frac{\partial x^i(\tilde{x}^1, \tilde{x}^2)}{\partial \tilde{x}^j} \right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x^1(\tilde{x}^1, \tilde{x}^2)}{\partial \tilde{x}^1} & \frac{\partial x^1(\tilde{x}^1, \tilde{x}^2)}{\partial \tilde{x}^2} \\ \frac{\partial x^2(\tilde{x}^1, \tilde{x}^2)}{\partial \tilde{x}^1} & \frac{\partial x^2(\tilde{x}^1, \tilde{x}^2)}{\partial \tilde{x}^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\tilde{x}^2) & -\tilde{x}^1 \sin(\tilde{x}^2) \\ \sin(\tilde{x}^2) & \tilde{x}^1 \cos(\tilde{x}^2) \end{pmatrix}$$

y seguidamente, identificando

$$x^i = \frac{\partial x^i(\tilde{x}^1, \tilde{x}^2)}{\partial \tilde{x}^j} \tilde{x}^j \Rightarrow \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\tilde{x}^2) & -\tilde{x}^1 \sin(\tilde{x}^2) \\ \sin(\tilde{x}^2) & \tilde{x}^1 \cos(\tilde{x}^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}^1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Igualmente, si calculamos la inversa de la matriz jacobiana

$$\left(\frac{\partial x^i(\tilde{x}^1, \tilde{x}^2)}{\partial \tilde{x}^j} \right)^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(\tilde{x}^2) & \sin(\tilde{x}^2) \\ -\frac{\sin(\tilde{x}^2)}{\tilde{x}^1} & \frac{\cos(\tilde{x}^2)}{\tilde{x}^1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x^1}{\sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2}} & \frac{x^2}{\sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2}} \\ \frac{-x^2}{(x^1)^2 + (x^2)^2} & \frac{x^1}{(x^1)^2 + (x^2)^2} \end{pmatrix}$$

tendremos

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}^1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x^1}{\sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2}} & \frac{x^2}{\sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2}} \\ \frac{-x^2}{(x^1)^2 + (x^2)^2} & \frac{x^1}{(x^1)^2 + (x^2)^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} \Rightarrow \tilde{x}^i = \frac{\partial \tilde{x}^i(x^1, x^2)}{\partial x^j} x^j.$$

Es decir

$$\tilde{x}^1 = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2} \Rightarrow r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{y} \quad 0 = 0.$$

Consideremos ahora el caso tridimensional en esos mismos dos sistemas de coordenadas: uno cartesiano ($x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z$) y otro esférico ($\tilde{x}^1 = r, \tilde{x}^2 = \theta, \tilde{x}^3 = \phi$).

Tal y como hemos supuesto anteriormente el punto P vendrá descrito por

$$|P\rangle = r_P |u_r\rangle = x_P |i\rangle + y_P |j\rangle + z_P |k\rangle$$

de nuevo

$$\left. \begin{aligned} x = x(r, \theta, \phi) = x^1 = x^1(\tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \tilde{x}^3) \\ y = y(r, \theta, \phi) = x^2 = x^2(\tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \tilde{x}^3) \\ z = z(r, \theta, \phi) = x^3 = x^3(\tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \tilde{x}^3) \end{aligned} \right\} \iff \begin{cases} r = r(x, y, z) = \tilde{x}^1 = \tilde{x}^1(x^1, x^2, x^3) \\ \theta = \theta(x, y, z) = \tilde{x}^2 = \tilde{x}^2(x^1, x^2, x^3) \\ \phi = \phi(x, y, z) = \tilde{x}^3 = \tilde{x}^3(x^1, x^2, x^3) \end{cases}$$

Las ecuaciones de transformación serán

$$\begin{aligned} x_P = r_P \operatorname{sen}(\theta) \cos(\phi) &\Rightarrow x^1 = \tilde{x}^1 \operatorname{sen}(\tilde{x}^2) \cos(\tilde{x}^3) \\ y_P = r_P \operatorname{sen}(\theta) \operatorname{sen}(\phi) &\Rightarrow x^2 = \tilde{x}^1 \operatorname{sen}(\tilde{x}^2) \operatorname{sen}(\tilde{x}^3) \\ z_P = r_P \cos(\theta) &\Rightarrow x^3 = \tilde{x}^1 \cos(\tilde{x}^2) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} r_P = \sqrt{x_P^2 + y_P^2 + z_P^2} &\Rightarrow \tilde{x}^1 = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2} \\ \phi = \arctan\left(\frac{y_P}{x_P}\right) &\Rightarrow \tilde{x}^2 = \arctan\left(\frac{x^2}{x^1}\right) \\ \theta = \arctan\left(\frac{\sqrt{x_P^2 + y_P^2}}{z_P}\right) &\Rightarrow \tilde{x}^3 = \arctan\left(\frac{\sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2}}{x^3}\right), \end{aligned}$$

con lo cual la matriz de las derivadas será para esta transformación en particular será

$$\frac{\partial x^i(\tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \tilde{x}^3)}{\partial \tilde{x}^j} = \begin{pmatrix} \operatorname{sen}(\theta) \cos(\phi) & -r \operatorname{sen}(\theta) \operatorname{sen}(\phi) & r \cos(\theta) \cos(\phi) \\ \operatorname{sen}(\theta) \operatorname{sen}(\phi) & r \operatorname{sen}(\theta) \cos(\phi) & r \cos(\theta) \operatorname{sen}(\phi) \\ \cos(\theta) & 0 & -r \operatorname{sen}(\theta) \end{pmatrix}$$

es decir

$$\frac{\partial x^i(\tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \tilde{x}^3)}{\partial \tilde{x}^j} = \begin{pmatrix} \operatorname{sen}(\tilde{x}^2) \cos(\tilde{x}^3) & -\tilde{x}^1 \operatorname{sen}(\tilde{x}^2) \operatorname{sen}(\tilde{x}^3) & \tilde{x}^1 \cos(\tilde{x}^2) \cos(\tilde{x}^3) \\ \operatorname{sen}(\tilde{x}^2) \operatorname{sen}(\tilde{x}^3) & \tilde{x}^1 \operatorname{sen}(\tilde{x}^2) \cos(\tilde{x}^3) & \tilde{x}^1 \cos(\tilde{x}^2) \operatorname{sen}(\tilde{x}^3) \\ \cos(\tilde{x}^2) & 0 & -\tilde{x}^1 \operatorname{sen}(\tilde{x}^2) \end{pmatrix}$$

y su inversa

$$\frac{\partial \tilde{x}^i(x^1, x^2, x^3)}{\partial x^j} = \begin{pmatrix} \operatorname{sen}(\theta) \cos(\phi) & \operatorname{sen}(\theta) \operatorname{sen}(\phi) & \cos(\theta) \\ -\frac{\operatorname{sen}(\phi)}{r \operatorname{sen}(\theta)} & \frac{\cos(\phi)}{r \operatorname{sen}(\theta)} & 0 \\ \frac{\cos(\theta) \cos(\phi)}{r} & \frac{\cos(\theta) \operatorname{sen}(\phi)}{r} & -\frac{\operatorname{sen}(\theta)}{r} \end{pmatrix}$$

o lo que es lo mismo

$$\frac{\partial \tilde{x}^i(x^1, x^2, x^3)}{\partial x^j} = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} & \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ \frac{-y}{x^2 + y^2} & \frac{x}{x^2 + y^2} & 0 \\ \frac{xz}{(x^2 + y^2 + z^2)\sqrt{x^2 + y^2}} & \frac{yz}{(x^2 + y^2 + z^2)\sqrt{x^2 + y^2}} & \frac{-\sqrt{x^2 + y^2}}{(x^2 + y^2 + z^2)} \end{pmatrix}$$

Dejaremos al lector comprobar que, efectivamente,

$$x^i = \frac{\partial x^i(\tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \tilde{x}^3)}{\partial \tilde{x}^j} \tilde{x}^j \iff \tilde{x}^i = \frac{\partial \tilde{x}^i(x^1, x^2, x^3)}{\partial x^j} x^j.$$

3.5. Transformaciones, vectores y tensores

En general las afirmaciones anteriores se pueden generalizar considerando que las coordenadas que definen un determinado punto, P , expresado en un sistema de coordenadas particular, son (x^1, x^2, \dots, x^n) y las coordenadas de ese mismo punto P , expresado en otro sistema de coordenadas es $(\tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \dots, \tilde{x}^n)$ ambas coordenadas estarán relacionadas por

$$\left. \begin{aligned} \tilde{x}^1 &= \tilde{x}^1(x^1, x^2, \dots, x^n) \\ \tilde{x}^2 &= \tilde{x}^2(x^1, x^2, \dots, x^n) \\ &\vdots \\ \tilde{x}^n &= \tilde{x}^n(x^1, x^2, \dots, x^n) \end{aligned} \right\} \iff \left\{ \begin{aligned} x^1 &= x^1(\tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \dots, \tilde{x}^n) \\ x^2 &= x^2(\tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \dots, \tilde{x}^n) \\ &\vdots \\ x^n &= x^n(\tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \dots, \tilde{x}^n) \end{aligned} \right.$$

es decir $\tilde{x}^i = \tilde{x}^i(x^j) \iff x^i = x^i(\tilde{x}^j)$ con $i, j = 1, 2, 3, \dots, n$. Otra vez, sólo exigiremos (y es bastante) que:

1. las funciones $x^i = x^i(\tilde{x}^m)$ y $\tilde{x}^j = \tilde{x}^j(x^m)$ sean al menos \mathcal{C}^2 (función y derivada continua)
2. que el determinante de la matriz jacobiana sean finito y distinto de cero, esto es

$$\det \left(\frac{\partial x^i(\tilde{x}^1, \tilde{x}^2)}{\partial \tilde{x}^j} \right) \neq 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial \tilde{x}^1} & \frac{\partial x^1}{\partial \tilde{x}^2} & \dots & \frac{\partial x^1}{\partial \tilde{x}^n} \\ \frac{\partial x^2}{\partial \tilde{x}^1} & \frac{\partial x^2}{\partial \tilde{x}^2} & \dots & \frac{\partial x^2}{\partial \tilde{x}^n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial x^n}{\partial \tilde{x}^1} & \frac{\partial x^n}{\partial \tilde{x}^2} & \dots & \frac{\partial x^n}{\partial \tilde{x}^n} \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow x^i = x^i(\tilde{x}^m) \iff \tilde{x}^j = \tilde{x}^j(x^m)$$

Ahora bien, una vez más, derivando y utilizando la regla de la cadena

$$x^i = x^i(\tilde{x}^j(x^m)) \Rightarrow \frac{\partial x^i}{\partial x^l} = \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^k} \frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^l} = \delta_l^i \Rightarrow dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^k} d\tilde{x}^k,$$

como hemos comprobado para los dos casos particulares estudiados con anterioridad. De ahora en adelante tendremos las siguientes **ReDefiniciones**:

- Un conjunto de cantidades $\{a^1, a^2, \dots, a^n\}$ se denominarán componentes *contravariantes* de un vector $|a\rangle \in \mathbf{V}$ en un punto P de coordenadas (x^1, x^2, \dots, x^n) si

1. dada dos bases ortonormales de vectores coordenados. $\{|\hat{e}_1\rangle, |\hat{e}_2\rangle, \dots, |\hat{e}_n\rangle\}$ y $\{|\tilde{e}_1\rangle, |\tilde{e}_2\rangle, \dots, |\tilde{e}_n\rangle\}$ se cumple que

$$|a\rangle = a^i |\hat{e}_i\rangle = \tilde{a}^i |\tilde{e}_i\rangle \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \langle \hat{e}^i | a \rangle &= a^i \\ \langle \tilde{e}^i | a \rangle &= \tilde{a}^i \end{aligned} \right\} \Rightarrow \tilde{a}^i = a^j \langle \tilde{e}^i | \hat{e}_j \rangle$$

2. o equivalentemente, bajo una transformación de coordenadas $x^i = x^i(\tilde{x}^j)$ con $i, j = 1, 2, 3, \dots, n$, estas cantidades transforman como

$$\tilde{a}^i = \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^k} a^k \iff a^i = \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^k} \tilde{a}^k \quad \text{con} \quad \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^k} \frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^l} = \delta_l^i$$

y donde las cantidades $\frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^k}$ y $\frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^k}$ deberán ser evaluadas en el punto P .

- Un conjunto de cantidades $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ se denominarán componentes *covariantes* de un vector $\langle b | \in \mathbf{V}^*$ en un punto P de coordenadas (x^1, x^2, \dots, x^n) si

1. dada dos bases de formas $\{\langle \hat{e}^1 |, \langle \hat{e}^2 |, \dots, \langle \hat{e}^n | \}$ y $\{\langle \hat{e}^1 |, \langle \hat{e}^2 |, \dots, \langle \hat{e}^n | \}$ se cumple que

$$\langle b | = b_i \langle \hat{e}^i | = \bar{b}_i \langle \hat{e}^i | \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \langle b | \hat{e}^i = b^i \\ \langle b | \hat{e}^i = \bar{b}^i \end{array} \right\} \Rightarrow \bar{b}^i = b^j \langle \hat{e}_j | \hat{e}^i .$$

2. o equivalentemente, bajo una transformación de coordenadas $x^i = x^i(\tilde{x}^j)$ (con $i, j = 1, 2, 3, \dots, n$) estas cantidades transforman como

$$\bar{b}_k = \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^k} b_i \iff b_k = \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^k} \bar{b}_i \quad \text{con} \quad \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^k} \frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^l} = \delta_l^i$$

y donde las cantidades: $\frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^k}$ y $\frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^k}$ deberán ser evaluadas en el punto P .

- Generalizamos los conceptos anteriores de la siguiente manera. Dado un conjunto bases para de formas diferenciales $\{\langle x^m(1) |, \langle y^n(2) | \}$ hemos definido las componentes *contravariantes* de un tensor

$$T^{ij} = \mathcal{T} \left[\begin{array}{c} \langle x^i(1) | \quad \langle y^j(2) | \\ \bullet \quad , \quad \bullet \\ \downarrow \quad , \quad \downarrow \end{array} \right] \in \mathbf{V} \iff \{T^{ij}\} \equiv \{T^{11}, T^{12}, \dots, T^{1n}, T^{21}, T^{22}, \dots, T^{2n}, \dots, T^{nn}\}$$

ahora, en esta visión, las componentes contravariantes en un punto P de coordenadas (x^1, x^2, \dots, x^n) , serán aquella que bajo una transformación de coordenadas $x^i = x^i(\tilde{x}^j)$ (con $i, j = 1, 2, 3, \dots, n$) transforman como

$$\tilde{T}^{ij} = \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^k} \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^m} T^{km} \iff T^{ij} = \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^k} \frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^m} \tilde{T}^{km} \quad \text{con} \quad \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^k} \frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^l} = \delta_l^i,$$

donde $\frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^k}$ y $\frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^k}$ deberán ser evaluadas en el punto P . Esta generalización nos permite construir el caso más general.

- Si $\{|t_i(1)\rangle, |u_j(2)\rangle, \dots, |v_k(m)\rangle\}$ y $\{\langle x^e(1) |, \langle y^f(2) |, \dots, \langle z^g(n) | \}$ son bases para los vectores y las formas, respectivamente. Las componentes de un tensor

$$T_{ijk}^{mn} = \mathcal{T} \left[\begin{array}{c} |t_i(1)\rangle \quad |u_j(2)\rangle \quad |v_k(m)\rangle \quad \langle x^e(1) | \quad \langle y^f(2) | \quad \langle z^g(n) | \\ \circ \quad , \quad \circ \quad , \dots , \quad \circ \quad ; \quad \bullet \quad , \quad \bullet \quad , \dots , \quad \bullet \\ \downarrow \quad , \quad \downarrow \quad , \dots , \quad \downarrow \end{array} \right]$$

serán un conjunto de cantidades $\{T_{1\dots 1}^{1\dots 1}, T_{1\dots 1}^{2\dots 1}, \dots, T_{1\dots 1}^{n\dots 1}, T_{1\dots 1}^{\bar{n}\dots 1}, T_{2\dots 1}^{\bar{n}\dots 1}, \dots, T_{\bar{m}\dots 1}^{1\dots 1}, \dots, T_{\bar{m}\dots \bar{m}}^{\bar{n}\dots \bar{n}}\}$ que se denominarán las componentes *contravariantes* y *covariantes* respectivamente, de un tensor mixto en un punto P de coordenadas (x^1, x^2, \dots, x^n) si bajo una transformación de coordenadas $x^i = x^i(\tilde{x}^j)$ (con $i, j = 1, 2, 3, \dots, n$) estas cantidades transforman como

$$\tilde{T}_{e\dots g}^{i\dots k} = \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^p} \dots \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^q} \frac{\partial x^a}{\partial \tilde{x}^e} \dots \frac{\partial x^d}{\partial \tilde{x}^g} T_{a\dots d}^{p\dots q} \iff T_{e\dots g}^{i\dots k} = \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^p} \dots \frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^q} \frac{\partial \tilde{x}^a}{\partial x^e} \dots \frac{\partial \tilde{x}^d}{\partial x^g} T_{a\dots d}^{p\dots q}$$

nuevamente con: $\frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^k} \frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^l} = \delta_l^i$ y donde las cantidades $\frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^k}$ y $\frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^k}$ deberán ser evaluadas en el punto P .

3.6. Un ejemplo detallado

Ilustremos ahora las transformaciones de tensores bajo cambios de la base del espacio vectorial. Una vez más consideremos dos bases de vectores coordenados $\{|e_1\rangle, |e_2\rangle, |e_3\rangle\}$ y $\{|\tilde{e}_1\rangle, |\tilde{e}_2\rangle, |\tilde{e}_3\rangle\}$ para el espacio vectorial \mathfrak{R}^3 . La expresión de un determinado tensor en la base será

$$\{|e_1\rangle, |e_2\rangle, |e_3\rangle\} \equiv \{|i\rangle, |j\rangle, |k\rangle\} \Rightarrow T_j^i = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Si consideramos una nueva base: $\{|w_1\rangle, |w_2\rangle, |w_3\rangle\}$

$$\begin{cases} |w_1\rangle = |i\rangle \\ |w_2\rangle = |i\rangle + |j\rangle \\ |w_3\rangle = |i\rangle + |j\rangle + |k\rangle \end{cases} \iff \begin{pmatrix} \langle w^1 | w_1 \rangle = 1 & \langle w^1 | w_2 \rangle = 1 & \langle w^1 | w_3 \rangle = 1 \\ \langle w^2 | w_1 \rangle = 1 & \langle w^2 | w_2 \rangle = 2 & \langle w^2 | w_3 \rangle = 2 \\ \langle w^3 | w_1 \rangle = 1 & \langle w^3 | w_2 \rangle = 2 & \langle w^3 | w_3 \rangle = 3 \end{pmatrix}$$

para ese mismo espacio \mathfrak{R}^3 encontraremos una nueva expresión para T_j^i en esa base.

Encontraremos ahora las expresiones para los siguientes tensores: \tilde{T}_i^j , \hat{T}_{ij} y \tilde{T}^{ij} . Nótese que esta nueva base **no es ortogonal**, $\langle w^k | w_i \rangle \neq \delta_i^k$, con lo cual no se cumplen muchas cosas, entre ellas: $|w_k\rangle \langle w^k| \neq 1$.

Para encontrar \tilde{T}_j^i expresamos los vectores base: $\{|e_1\rangle = |i\rangle, |e_2\rangle = |j\rangle, |e_3\rangle = |k\rangle\}$ en términos de la base $\{|w_1\rangle, |w_2\rangle, |w_3\rangle\}$, esto es:

$$\begin{cases} |e_1\rangle = |i\rangle = |w_1\rangle \\ |e_2\rangle = |j\rangle = |w_2\rangle - |w_1\rangle \\ |e_3\rangle = |k\rangle = |w_3\rangle - |w_2\rangle \end{cases}$$

Recordamos que un vector genérico transforma de la siguiente manera

$$|a\rangle = a^j |e_j\rangle = \tilde{a}^j |w_j\rangle$$

por lo tanto

$$|a\rangle = a^j |e_j\rangle = \tilde{a}^1 |w_1\rangle + \tilde{a}^2 |w_2\rangle + \tilde{a}^3 |w_3\rangle = \tilde{a}^1 |e_1\rangle + \tilde{a}^2 (|e_1\rangle + |e_2\rangle) + \tilde{a}^3 (|e_1\rangle + |e_2\rangle + |e_3\rangle)$$

con lo cual

$$a^1 |e_1\rangle + a^2 |e_2\rangle + a^3 |e_3\rangle = (\tilde{a}^1 + \tilde{a}^2 + \tilde{a}^3) |e_1\rangle + (\tilde{a}^2 + \tilde{a}^3) |e_2\rangle + \tilde{a}^3 |e_3\rangle$$

y podemos ver que

$$\left. \begin{cases} a^1 = \tilde{a}^1 + \tilde{a}^2 + \tilde{a}^3 \\ a^2 = \tilde{a}^2 + \tilde{a}^3 \\ a^3 = \tilde{a}^3 \end{cases} \right\} \Rightarrow a^i = \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^k} \tilde{a}^k \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial x^1}{\partial \tilde{x}^1} = 1; & \frac{\partial x^1}{\partial \tilde{x}^2} = 1; & \frac{\partial x^1}{\partial \tilde{x}^3} = 1 \\ \frac{\partial x^2}{\partial \tilde{x}^1} = 0; & \frac{\partial x^2}{\partial \tilde{x}^2} = 1; & \frac{\partial x^2}{\partial \tilde{x}^3} = 1 \\ \frac{\partial x^3}{\partial \tilde{x}^1} = 0; & \frac{\partial x^3}{\partial \tilde{x}^2} = 0; & \frac{\partial x^3}{\partial \tilde{x}^3} = 1 \end{cases}$$

Es de hacer notar que dado que la base ortonormal $\{|e_1\rangle, |e_2\rangle, |e_3\rangle\} \equiv \{|i\rangle, |j\rangle, |k\rangle\}$ se tiene que

$$|a\rangle = a^j |e_j\rangle = \tilde{a}^i |w_i\rangle \Rightarrow \langle e^i | a \rangle = a^j \langle e^i | e_j \rangle = a^j \delta_j^i = a^i = \tilde{a}^k \langle e^i | w_k \rangle \Rightarrow \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^k} = \langle e^i | w_k \rangle$$

Este mismo procedimiento se puede aplicar para expresar el vector $|a\rangle$ como una combinación lineal de los vectores $|w_j\rangle$:

$$|a\rangle = \tilde{a}^j |\tilde{e}_j\rangle = a^j |e_j\rangle = a^1 |w_{e1}\rangle + a^2 |e_2\rangle + a^3 |e_3\rangle = a^1 |w_1\rangle + a^2 (|w_2\rangle - |w_1\rangle) + a^3 (|w_3\rangle - |w_2\rangle)$$

esto es

$$\left. \begin{array}{l} \tilde{a}^1 = a^1 - a^2 \\ \tilde{a}^2 = a^2 - a^3 \\ \tilde{a}^3 = a^3 \end{array} \right\} \Rightarrow \tilde{a}^k = a^i \frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^i} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \tilde{x}^1}{\partial x^1} = 1; \quad \frac{\partial \tilde{x}^1}{\partial x^2} = -1; \quad \frac{\partial \tilde{x}^1}{\partial x^3} = 0 \\ \frac{\partial \tilde{x}^2}{\partial x^1} = 0; \quad \frac{\partial \tilde{x}^2}{\partial x^2} = 1; \quad \frac{\partial \tilde{x}^2}{\partial x^3} = -1 \\ \frac{\partial \tilde{x}^3}{\partial x^1} = 0; \quad \frac{\partial \tilde{x}^3}{\partial x^2} = 0; \quad \frac{\partial \tilde{x}^3}{\partial x^3} = 1 \end{array} \right.$$

Nótese que, como era de esperarse,

$$\frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^k} \frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^j} = \delta_j^i \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Con las expresiones matriciales para las transformaciones, estamos en capacidad de calcular, componente a componente, las representación del tensor en la nueva base

$$\tilde{T}_m^k = \frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^m} T_j^i$$

con lo cual

$$\begin{aligned} \tilde{T}_1^1 &= \frac{\partial \tilde{x}^1}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^1} T_j^i \\ &= \frac{\partial \tilde{x}^1}{\partial x^1} \left(\frac{\partial x^1}{\partial \tilde{x}^1} T_1^1 + \frac{\partial x^2}{\partial \tilde{x}^1} T_2^1 + \frac{\partial x^3}{\partial \tilde{x}^1} T_3^1 \right) + \frac{\partial \tilde{x}^1}{\partial x^2} \left(\frac{\partial x^1}{\partial \tilde{x}^1} T_1^2 + \frac{\partial x^2}{\partial \tilde{x}^1} T_2^2 + \frac{\partial x^3}{\partial \tilde{x}^1} T_3^2 \right) \\ &+ \frac{\partial \tilde{x}^1}{\partial x^3} \left(\frac{\partial x^1}{\partial \tilde{x}^1} T_1^3 + \frac{\partial x^2}{\partial \tilde{x}^1} T_2^3 + \frac{\partial x^3}{\partial \tilde{x}^1} T_3^3 \right) \end{aligned}$$

Es decir

$$\begin{aligned} \tilde{T}_1^1 &= 1 \cdot (1 T_1^1 + 0 T_2^1 + 0 T_3^1) - 1 \cdot (1 T_1^2 + 0 T_2^2 + 0 T_3^2) + 0 (1 T_1^3 + 0 T_2^3 + 0 T_3^3) \\ &= T_1^1 - T_1^2 = 2 - 2 = 0 \end{aligned}$$

Del mismo modo

$$\begin{aligned} \tilde{T}_2^1 &= \frac{\partial \tilde{x}^1}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^2} T_j^i \\ &= \frac{\partial \tilde{x}^1}{\partial x^1} \left(\frac{\partial x^1}{\partial \tilde{x}^2} T_1^1 + \frac{\partial x^2}{\partial \tilde{x}^2} T_2^1 + \frac{\partial x^3}{\partial \tilde{x}^2} T_3^1 \right) + \frac{\partial \tilde{x}^1}{\partial x^2} \left(\frac{\partial x^1}{\partial \tilde{x}^2} T_1^2 + \frac{\partial x^2}{\partial \tilde{x}^2} T_2^2 + \frac{\partial x^3}{\partial \tilde{x}^2} T_3^2 \right) \\ &+ \frac{\partial \tilde{x}^1}{\partial x^3} \left(\frac{\partial x^1}{\partial \tilde{x}^2} T_1^3 + \frac{\partial x^2}{\partial \tilde{x}^2} T_2^3 + \frac{\partial x^3}{\partial \tilde{x}^2} T_3^3 \right) \end{aligned}$$

resultando

$$\begin{aligned}\tilde{T}_2^1 &= 1 \cdot (1 T_1^1 + 1 T_2^1 + 0 T_3^1) - 1 \cdot (1 T_1^2 + 1 T_2^2 + 0 T_3^2) + 0 (1 T_1^3 + 1 T_2^3 + 0 T_3^3) \\ &= (T_1^1 + T_2^1) - (T_1^2 + T_2^2) = (2 + 1) - (2 + 3) = -2\end{aligned}$$

Se puede continuar término a término o realizar la multiplicación de las matrices $\frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^i}$, T_j^i y $\frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^m}$ provenientes de la transformación de componentes de tensores. Vale decir

$$\tilde{T}_m^k = \frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^i} T_j^i \frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^m} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Hay que resaltar el especial cuidado que se tuvo en la ubicación de las matrices para su multiplicación. Si bien en la expresión $\tilde{T}_m^k = \frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^m} T_j^i$ las cantidades $\frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^i}$ son números y no importa el orden con el cual se multipliquen, cuando se escriben como matrices debe respetarse la “concatenación interna de índices”. Esto es, cuando querramos expresar \tilde{T}_m^k como una matriz, donde el índice contravariante k indica filas y el índice covariante m las columnas, fijamos primero estos índices y luego respetamos la “concatenación de índices” covariantes con los contravariantes. Esta es la convención para expresar la multiplicación de matrices en la notación de índices². Esto es

$$\tilde{T}_m^k = \frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^m} T_j^i \Rightarrow \tilde{T}_m^k = \frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^i} T_j^i \frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^m}$$

Ahora los objetos $\frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^i}$, T_j^i y $\frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^m}$ pueden ser sustituidos (en sus puestos correspondientes) por su representación matricial.

Con lo cual hemos encontrado la representación matricial \tilde{T}_m^k de las componentes del tensor \mathbf{T} en la base $\{|w_1\rangle, |w_2\rangle, |w_3\rangle\}$;

$$\begin{pmatrix} \tilde{T}_1^1 & \tilde{T}_2^1 & \tilde{T}_3^1 \\ \tilde{T}_1^2 & \tilde{T}_2^2 & \tilde{T}_3^2 \\ \tilde{T}_1^3 & \tilde{T}_2^3 & \tilde{T}_3^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Para encontrar la expresión para \tilde{T}_{km} recordamos que $\tilde{T}_{km} = \tilde{g}_{kn} \tilde{T}_m^n$, es decir, requerimos las componentes covariantes y contravariantes del tensor métrico \tilde{g}_{kn} que genera esta base. Para ello recordamos que para una base genérica, $\{|w_j\rangle\}$, no necesariamente ortogonal, de un espacio vectorial con producto interno, podemos definir la expresión de un tensor $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ que denominaremos tensor métrico como

$$\tilde{g}_{ij} = \frac{\partial x^m}{\partial \tilde{x}^i} \frac{\partial x^n}{\partial \tilde{x}^j} g_{mn} \equiv \langle e^m | w_i \rangle \langle e^n | w_j \rangle g_{mn}$$

Recordemos también que la métrica covariante g_{ij} de una base ortonormal $\{|e_1\rangle, |e_2\rangle, |e_3\rangle\} \equiv \{|i\rangle, |j\rangle, |k\rangle\}$ es

$$g_{11} = 1; \quad g_{12} = 0; \quad g_{13} = 0;$$

$$g_{21} = 0; \quad g_{22} = 1; \quad g_{23} = 0;$$

$$g_{31} = 0; \quad g_{32} = 0; \quad g_{33} = 1.$$

²Quizá una forma de comprobar si los índices están bien concatenados se observa si se “bajan” los índices contravariantes pero se colocan antes que los covariantes. Esto es, $T_j^i \rightarrow T_{ij}$. Así, la multiplicación de matrices queda representada de la siguiente forma: $C_j^i = A_k^i B_j^k \rightarrow C_{ij} = A_{ik} B_{kj}$ y aquí es claro que índices consecutivos están “concatenados” e indican multiplicación.

Con lo cual, para el caso de la base genérica no ortonormal $\{|w_j\rangle\}$ tenemos dos formas de calcular las componentes covariantes y contravariantes del tensor métrico. La primera es la forma directa

$$\begin{aligned}\tilde{g}_{11} &= \langle e^n | w_1 \rangle \langle e^m | w_1 \rangle g_{nm} = \langle e^1 | w_1 \rangle \langle e^1 | w_1 \rangle + \langle e^2 | w_1 \rangle \langle e^2 | w_1 \rangle + \langle e^3 | w_1 \rangle \langle e^3 | w_1 \rangle = \langle e^1 | w_1 \rangle^2 = 1 \\ \tilde{g}_{12} &= \langle e^n | w_1 \rangle \langle e^m | w_2 \rangle g_{nm} = \langle e^1 | w_1 \rangle \langle e^1 | w_2 \rangle + \langle e^2 | w_1 \rangle \langle e^2 | w_2 \rangle + \langle e^3 | w_1 \rangle \langle e^3 | w_2 \rangle = \langle e^1 | w_1 \rangle \langle e^1 | w_2 \rangle = 1 \\ \tilde{g}_{13} &= \langle e^n | w_1 \rangle \langle e^m | w_3 \rangle g_{nm} = \langle e^1 | w_1 \rangle \langle e^1 | w_3 \rangle + \langle e^2 | w_1 \rangle \langle e^2 | w_3 \rangle + \langle e^3 | w_1 \rangle \langle e^3 | w_3 \rangle = \langle e^1 | w_1 \rangle \langle e^1 | w_3 \rangle = 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{g}_{21} &= \langle e^n | w_2 \rangle \langle e^m | w_1 \rangle g_{nm} = \langle e^1 | w_2 \rangle \langle e^1 | w_1 \rangle + \langle e^2 | w_2 \rangle \langle e^2 | w_1 \rangle + \langle e^3 | w_2 \rangle \langle e^3 | w_1 \rangle = \langle e^1 | w_2 \rangle \langle e^1 | w_1 \rangle = 1 \\ \tilde{g}_{22} &= \langle e^n | w_2 \rangle \langle e^m | w_2 \rangle g_{nm} = \langle e^1 | w_2 \rangle \langle e^1 | w_2 \rangle + \langle e^2 | w_2 \rangle \langle e^2 | w_2 \rangle + \langle e^3 | w_2 \rangle \langle e^3 | w_2 \rangle \Rightarrow \\ \tilde{g}_{22} &= \langle e^1 | w_2 \rangle \langle e^1 | w_2 \rangle + \langle e^2 | w_2 \rangle \langle e^2 | w_2 \rangle = 2 \\ \tilde{g}_{23} &= \langle e^n | w_2 \rangle \langle e^m | w_3 \rangle g_{nm} = \langle e^1 | w_2 \rangle \langle e^1 | w_3 \rangle + \langle e^2 | w_2 \rangle \langle e^2 | w_3 \rangle + \langle e^3 | w_2 \rangle \langle e^3 | w_3 \rangle \Rightarrow \\ \tilde{g}_{23} &= \langle e^1 | w_2 \rangle \langle e^1 | w_3 \rangle + \langle e^2 | w_2 \rangle \langle e^2 | w_3 \rangle = 2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{g}_{31} &= \langle e^n | w_3 \rangle \langle e^m | w_1 \rangle g_{nm} = \langle e^1 | w_3 \rangle \langle e^1 | w_1 \rangle + \langle e^2 | w_3 \rangle \langle e^2 | w_1 \rangle + \langle e^3 | w_3 \rangle \langle e^3 | w_1 \rangle = \langle e^1 | w_3 \rangle \langle e^1 | w_1 \rangle = 1 \\ \tilde{g}_{32} &= \langle e^n | w_3 \rangle \langle e^m | w_2 \rangle g_{nm} = \langle e^1 | w_3 \rangle \langle e^1 | w_2 \rangle + \langle e^2 | w_3 \rangle \langle e^2 | w_2 \rangle + \langle e^3 | w_3 \rangle \langle e^3 | w_2 \rangle \Rightarrow \\ \tilde{g}_{32} &= \langle e^1 | w_3 \rangle \langle e^1 | w_2 \rangle + \langle e^2 | w_3 \rangle \langle e^2 | w_2 \rangle = 2 \\ \tilde{g}_{33} &= \langle e^n | w_3 \rangle \langle e^m | w_3 \rangle g_{nm} = \langle e^1 | w_3 \rangle \langle e^1 | w_3 \rangle + \langle e^2 | w_3 \rangle \langle e^2 | w_3 \rangle + \langle e^3 | w_3 \rangle \langle e^3 | w_3 \rangle \Rightarrow \\ \tilde{g}_{33} &= \langle e^1 | w_3 \rangle \langle e^1 | w_3 \rangle + \langle e^2 | w_3 \rangle \langle e^2 | w_3 \rangle + \langle e^3 | w_3 \rangle \langle e^3 | w_3 \rangle = 3\end{aligned}$$

$$\tilde{g}_{11} = 1; \quad \tilde{g}_{12} = 1; \quad \tilde{g}_{13} = 1;$$

$$\tilde{g}_{21} = 1; \quad \tilde{g}_{22} = 2; \quad \tilde{g}_{23} = 2;$$

$$\tilde{g}_{31} = 1 \quad \tilde{g}_{32} = 2; \quad \tilde{g}_{33} = 3.$$

y, consecuentemente podemos “arreglarlo como una matriz”³ de la siguiente forma

$$\tilde{g}_{ij} \equiv \tilde{g}_{ji} \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \tilde{g}^{ij} \equiv \tilde{g}^{ji} = (\tilde{g}_{ij})^{-1} \iff \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Con lo cual, en términos “matriciales” tendremos

$$g_{ij} \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad g^{ij} \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad g_j^i \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

y

$$\tilde{g}_{km} = \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^k} g_{ij} \frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^m} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Nótese que para conservar la convención de índices y poder representar la multiplicación de matrices, los índices deben estar consecutivos, por tanto hay que trasponer la representación matricial para poder multiplicarlas.

$$\tilde{g}_{km} = \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^k} g_{ij} \frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^m} \longrightarrow \tilde{g}_{km} = \Pi_{ik} g_{ij} \Pi_{jm} \longrightarrow \tilde{g}_{km} = \bar{\Pi}_{ki} g_{ij} \Pi_{jm}.$$

³Recordemos que hemos insistido que las matrices representan tensores mixtos

Finalmente, estamos en capacidad de obtener las representaciones matriciales para los tensores: $\tilde{T}_i^j, \tilde{T}_{ij}, \tilde{T}^{ij}$.

$$\tilde{T}_i^j = (\tilde{T}_j^i)^T \iff \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 3 \\ -3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \tilde{T}_i^j$$

$$\tilde{T}_{km} = \tilde{g}_{kn} \tilde{T}_m^n \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 4 & 8 & 15 \\ 5 & 11 & 20 \end{pmatrix} \Rightarrow \tilde{T}_{km}$$

$$\tilde{T}^{kn} = \tilde{T}_m^n \tilde{g}^{mk} \iff \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -10 & -13 \\ 7 & 13 & 17 \\ 9 & 17 & 22 \end{pmatrix} \Rightarrow \tilde{T}^{kn}$$

Antes de pasar a la próxima sección, quisiéramos ejemplificar una forma “rápida y furiosa” (pero sucia) de calcular la métrica generada por una determinada base genérica de vectores base. La idea es que violentando toda nuestra notación e idea de tensores construimos la métrica a partir de los vectores base definiéndola como $\tilde{g}_{ij} = \langle w_i | w_j \rangle$, de esta manera

$$\tilde{g}_{11} = \langle w_1 | w_1 \rangle = \langle i | i \rangle = 1;$$

$$\tilde{g}_{12} = \langle w_1 | w_2 \rangle = \langle j | (i) + (j) \rangle = 1;$$

$$\tilde{g}_{21} = \langle w_2 | w_1 \rangle = \langle (i) + (j) | i \rangle = 1;$$

$$\tilde{g}_{22} = \langle w_2 | w_2 \rangle = \langle (i) + (j) | (i) + (j) \rangle = 2$$

$$\tilde{g}_{31} = \langle w_3 | w_1 \rangle = \langle (i) + (j) + (k) | i \rangle = 1;$$

$$\tilde{g}_{32} = \langle w_3 | w_2 \rangle = \langle (i) + (j) + (k) | (i) + (j) \rangle = 2;$$

y

$$\tilde{g}_{13} = \langle w_1 | w_3 \rangle = \langle i | (i) + (j) + (k) \rangle = 1;$$

$$\tilde{g}_{23} = \langle w_2 | w_3 \rangle = \langle (i) + (j) | (i) + (j) + (k) \rangle = 2$$

$$\tilde{g}_{33} = \langle w_3 | w_3 \rangle = \langle (i) + (j) + (k) | (i) + (j) + (k) \rangle = 3$$

Dejamos al lector, la reflexión si esta forma “rápida de calcular la métrica” a partir de unos vectores base es general o, si en su defecto, es una coincidencia únicamente válida para este caso.

3.7. Teorema del cociente

Al igual que existe el producto directo entre tensores, cabe preguntarse si es posible multiplicar una componente de un tensor por otra de otro tensor y el producto: ¿será un tensor? Existe importantes situaciones físicas en las cuales es aplicable esta pregunta. Si T_{ij} son las componentes de un tensor de rango 2 y V^i las de un vector ¿el producto $T_{ij}V^i = B_j$ serán componentes de un vector? La respuesta no es siempre afirmativa, y puede ser utilizado como un criterio de cuando una componente es la componente de un tensor. Este criterio se denomina el *Teorema del Cociente*.

La respuesta a esta pregunta surge de la respuesta a una pregunta distinta pero equivalente. Supongamos que nos dan n^2 números a_{ij} y un (una componente de un) vector genérico V^i , si la cantidad $a_{ij}V^iV^j$ es un escalar entonces la parte simétrica $a_{(ij)} = \frac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji})$ será un (una componente de) tensor del tipo: $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$. La demostración involucra algunos de las ideas antes expuestas y la haremos para fijar conceptos.

Dados dos sistemas de coordenadas $x^i = x^i(\tilde{x}^m)$ y $\tilde{x}^j = \tilde{x}^j(x^m)$ (con $i, j = 1, 2, 3, \dots, n$) se cumple que

$$a_{ij} x^i x^j = \psi = \tilde{\psi} = \tilde{a}_{ij} \tilde{x}^i \tilde{x}^j \quad \text{donde } \psi = \tilde{\psi} \text{ constituye un escalar}$$

y por lo tanto, derivando y utilizando la regla de la cadena

$$x^i = x^i(\tilde{x}^j(x^m)) \Rightarrow \frac{\partial x^i}{\partial x^l} = \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^k} \frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^l} = \delta_l^i,$$

por lo que

$$(a_{ij} x^i x^j - \tilde{a}_{ij} \tilde{x}^i \tilde{x}^j) \equiv \left(a_{ij} - \tilde{a}_{kl} \frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^i} \frac{\partial \tilde{x}^l}{\partial x^j} \right) x^i x^j = 0,$$

como hay una suma en ij no se puede afirmar que la cantidad del paréntesis se anula. Como esta afirmación vale para cualquier sistema de coordenadas, seleccionaremos las componentes coordenadas en la base canónica.

$$x^1 = (1, 0, 0, \dots, 0); \quad x^2 = (0, 1, 0, \dots, 0); \dots \quad \dots x^n = (0, 0, 0, \dots, 1)$$

con lo cual

$$a_{11} - \tilde{a}_{kl} \frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^1} \frac{\partial \tilde{x}^l}{\partial x^1} = 0; \quad a_{22} - \tilde{a}_{kl} \frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^2} \frac{\partial \tilde{x}^l}{\partial x^2} = 0; \dots \quad \dots a_{nn} - \tilde{a}_{kl} \frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^n} \frac{\partial \tilde{x}^l}{\partial x^n} = 0,$$

Como siempre podemos hacer $\tilde{a}_{(kl)} = \frac{1}{2}(\tilde{a}_{kl} + \tilde{a}_{lk})$ y $\tilde{a}_{[kl]} = \frac{1}{2}(\tilde{a}_{kl} - \tilde{a}_{lk})$ y separar el tensor

$$\tilde{a}_{kl} = \tilde{a}_{(kl)} + \tilde{a}_{[kl]} \Rightarrow a_{(mm)} - (\tilde{a}_{(kl)} + \tilde{a}_{[kl]}) \frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^m} \frac{\partial \tilde{x}^l}{\partial x^m} = 0 \Rightarrow a_{(mm)} = \tilde{a}_{(kl)} \frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^m} \frac{\partial \tilde{x}^l}{\partial x^m},$$

con lo cual se garantiza que la parte simétrica de un tensor transforma como un verdadero tensor una vez que se contrae con un par de vectores.

3.8. Vectores, tensores y espacios pseudo-euclidianos

Hasta este punto ha sido casi estética la descripción de formas representadas por *bra*: $\langle a | \equiv a_k \langle e^k |$, en las cuales sus componentes tienen subíndices, mientras que los vectores bases, $\langle e^k |$, deben tener superíndices. Quizá el ejemplo más emblemático y simple, donde se observa la diferencia entre formas (*bras*) y vectores (*kets*) es el caso de los espacios minkowskianos. Estos espacios, también llamados pseudo-euclidianos, presentan una variante en la definición de producto interno, de tal forma que: $\langle x | x \rangle$ no necesariamente es positivo, y si $\langle x | x \rangle = 0$ no necesariamente implica que $|x\rangle \equiv |0\rangle$.

La consecuencia inmediata es que la definición de norma $\mathcal{N}(|v_i\rangle) \equiv |||v_i\rangle||$, que vimos anteriormente, no necesariamente es positiva. Vale decir que tendremos vectores con norma positiva, $|||v_i\rangle|| > 0$, pero también vectores con norma negativa o cero: $|||v_i\rangle|| \leq 0$. Con lo cual la definición de distancia, entendida como la norma de la resta de vectores, $d(|x\rangle, |y\rangle) \equiv |||x\rangle - |y\rangle||$, tampoco será necesariamente positiva. Esto es, que las distancias serán negativas, positivas o nulas: $d(|x\rangle, |y\rangle) < 0$, $d(|x\rangle, |y\rangle) = 0$ y $d(|x\rangle, |y\rangle) > 0$.

Si extendemos la noción de distancia para que albergue las posibilidades de distancias nula y negativas, entonces la definición del tensor métrico para espacios pseudo-euclidianos debe cambiar también.

$$\mathbf{g}[|x_i\rangle, |x_j\rangle] = g_{ij} \equiv g_{ji} \begin{cases} < 0 \\ = 0 \\ > 0 \end{cases}$$

En resumen

$$\langle x | x \rangle = \begin{cases} < 0 \\ = 0 \\ > 0 \end{cases} \Rightarrow d(|x\rangle, |y\rangle) = \begin{cases} < 0 \\ = 0 \\ > 0 \end{cases} \Rightarrow \mathbf{g}[|x_i\rangle, |x_j\rangle] = \begin{cases} < 0 \\ = 0 \\ > 0 \end{cases}$$

Este tipo de espacios luce como un excentricidad más de los matemáticos. Una curiosidad de estudio de ver como organizar los conceptos que aprendimos de los espacios euclidianos y extenderlos a otros espacios. Quizá se hubiera quedado así, como una curiosidad matemática si la Física no hubiera sacado partido de estas particularidades para describir el comportamiento de la naturaleza. En la próxima sección analizaremos el caso de espacios minkowskianos de dimensión 4: \mathfrak{M}^4 .

3.8.1. Espacios minkowskianos

Consideremos un espacio tetradimensional expandido por una base ortonormal $\{|e_0\rangle, |e_1\rangle, |e_2\rangle, |e_3\rangle\}$. Los vectores $\{|e_1\rangle, |e_2\rangle, |e_3\rangle\}$ corresponden con la base canónica de \mathfrak{R}^3 .

Este espacio vectorial \mathfrak{M}^4 tendrá asociado un espacio dual $\{\langle e^0|, \langle e^1|, \langle e^2|, \langle e^3|\}$ a través de una métrica

$$\eta_{\alpha\beta} \langle e^\alpha| \otimes \langle e^\beta| \equiv \eta_{\beta\alpha} \langle e^\beta| \otimes \langle e^\alpha| \quad \text{y} \quad \eta^{\alpha\beta} |e_\alpha\rangle \otimes |e_\beta\rangle \equiv \eta^{\beta\alpha} |e_\beta\rangle \otimes |e_\alpha\rangle$$

con $\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3$ y donde: $\eta_{00} = \eta^{00} = 1$, $\eta_{11} = \eta^{11} = -1$, $\eta_{22} = \eta^{22} = -1$, $\eta_{33} = \eta^{33} = -1$ (con $\eta_{\alpha\beta} = 0$ para $\alpha \neq \beta$), con lo cual se dice que η tiene signo -2 .⁴

Tal y como presentamos en (3.2.6), podemos asociar componentes covariantes y contravariantes a través de la métrica de la forma

$$(\eta_{\alpha\beta} \langle e^\alpha| \otimes \langle e^\beta|) |a\rangle = a^\sigma (\eta_{\alpha\beta} \langle e^\alpha| \otimes \langle e^\beta|) |e_\sigma\rangle = a^\sigma \eta_{\alpha\beta} \langle e^\beta| |e_\sigma\rangle \langle e^\alpha| = a^\sigma \eta_{\alpha\beta} \delta_\sigma^\beta \langle e^\alpha| = a^\sigma \eta_{\alpha\sigma} \langle e^\alpha| \equiv a_\alpha \langle e^\alpha|$$

Lo interesante del caso es que

$$a^\sigma \eta_{\sigma\alpha} = a_\alpha \Rightarrow a^0 = a_0, \quad a^1 = -a_1, \quad a^2 = -a_2, \quad a^3 = -a_3.$$

Es decir, en este caso, porque la métrica tiene signo -2 , entonces bajar los índices espaciales ($\mu = i = 1, 2, 3$) le cambia de signo a las componentes⁵. Dicho con más propiedad, las componentes espaciales contravariantes ($\mu = i = 1, 2, 3$) tienen signos contrarios a las componentes covariantes.

De la misma manera que se expuso anteriormente en (3.2.6)

$$\langle a | (\eta^{\alpha j} |e_\alpha\rangle \otimes |e_\beta\rangle) = \langle a | (\eta^{\alpha\beta} |e_\alpha\rangle \otimes |e_\beta\rangle) = \eta^{\alpha\beta} \langle a | e_\alpha\rangle \otimes |e_\beta\rangle = a_\sigma \eta^{\alpha j} \langle e^\sigma | e_\alpha\rangle |e_\beta\rangle = a_\sigma \eta^{\sigma\beta} |e_\beta\rangle \equiv a^\beta |e_\beta\rangle$$

y otra vez, $a^\sigma = \eta^{\sigma\alpha} a_\alpha$, y habría cambio de signo cuando se bajan los índices 1, 2, 3 para la métrica con signo -2 que hemos considerado anteriormente. Del mismo modo se “suben” y se “bajan” índices para componentes de tensores

$$\eta^{\alpha\beta} P_\alpha^{\gamma\sigma\epsilon} \equiv P^{\beta\gamma\sigma\epsilon}$$

Por su parte, el producto interno de dos vectores en un espacio de Minkowski involucra, de manera natural, la métrica del espacio. Esto es

$$\langle x | y \rangle = \langle y | x \rangle = x^\alpha y_\alpha = y^\alpha x_\alpha = x^\alpha y^\beta \eta_{\alpha\beta} = x_\alpha y_\beta \eta^{\alpha\beta} = x^0 y^0 - x^1 y^1 - x^2 y^2 - x^3 y^3 = x_0 y_0 - x_1 y_1 - x_2 y_2 - x_3 y_3$$

⁴Realmente el signo -2 es una convención, se puede también considerar $\eta_{\mu\nu}$ de signo $+2$, con $\eta_{00} = -1$, $\eta_{11} = +1$, $\eta_{22} = +1$, $\eta_{33} = +1$.

⁵Otra vez, para la métrica con signo -2 , el cambio de signo entre componentes covariantes y contravariantes se da para la componente, $\mu = 0$

Una vez más, la norma de un vector, también incluirá al tensor métrico:

$$\| |x\rangle \|^2 = \langle x | x \rangle = x_\alpha x^\beta \langle e^\alpha | e_\beta \rangle = x_\alpha x^\alpha = x_\alpha x_\beta \eta^{\alpha\beta} = x^\alpha x^\beta \eta_{\alpha\beta} = x^0 x^0 - x^1 x^1 - x^2 x^2 - x^3 x^3$$

El caso más conocido lo constituye la norma de un desplazamiento infinitesimal, en un espacio tetradimensional. Para una base genérica, $\{|u_\beta\rangle\}$ (no necesariamente ortogonal) de un espacio vectorial con producto interno, el desplazamiento infinitesimal puede expresarse como

$$(ds)^2 \equiv \langle dr | dr \rangle = (d\tilde{x}_\alpha \langle \tilde{u}^\alpha |) (d\tilde{x}^\beta | \tilde{u}_\beta \rangle) = d\tilde{x}_\beta d\tilde{x}^\beta = \tilde{\eta}_{\alpha\beta} d\tilde{x}^\alpha d\tilde{x}^\beta = dt^2 - d\mathbf{x}^2,$$

$$\text{con } d\mathbf{x}^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2$$

3.8.2. Un toque de Relatividad Especial

La genialidad de Einstein fue haber entendido que tenía que incorporar el tiempo como otra coordenada más, vale decir, que los eventos que ocurren en la naturaleza están etiquetados por cuatro números: $(t, x, y, z) \equiv (x^0, x^1, x^2, x^3)$. El rápido desarrollo de la comprensión de las ideas relativistas, muestra que estaban en el ambiente de la época de comienzos de 1900. Una vez más la simplicidad como prejuicio se impuso. Solo dos suposiciones están en el corazón de la Relatividad Especial:

1. *El principio de la Relatividad:* Esto es que las leyes de la Física son idénticas en todos los sistemas de referencias inerciales.
2. *La universalidad de la velocidad de la luz en el vacío:* La velocidad de la luz en el vacío es siempre la misma, y es independiente de la velocidad de la fuente de luz respecto a un observador en particular.

En términos matemáticos estas dos audaces suposiciones se concretan en una simple suposición matemática: el producto interno entre dos elementos de este espacio tetradimensional, debe conservarse para una familia de vectores base. Luego vendrá la asociación de observadores físicos -o sistemas de coordenadas- con los miembros de la familia de vectores base, pero la idea es la misma que planteamos para los espacios euclidianos en 2.2.3: el producto interno -y consecuentemente, la norma de los elementos del espacio vectorial y la distancia entre éstos - en el mismo independientemente de la base en la cual expanda el espacio vectorial.

La primera de las interpretaciones es el cómo representamos los eventos en el espacio-tiempo. Supongamos el caso unidimensional en el espacio, vale decir los eventos ocurren en un punto de la recta real $x = x^1$ y en un tiempo determinado, por lo tanto podremos asociar al evento un vector *Evento* $\rightarrow (x^0, x^1)$.

A continuación nos preguntamos que representan las distancias (espacio-temporales) entre estos dos eventos. Tal y como vimos, las distancias entre dos elementos de un espacio vectorial puede ser construida a partir de la norma de la resta y la norma a partir del producto interno:

$$\| |y - x\rangle \|^2 \equiv \langle y - x | y - x \rangle \begin{cases} < 0 & \text{conexión tipo espacio} & \Rightarrow \text{eventos desconectados causalmente} \\ = 0 & \text{conexión tipo luz} & \Rightarrow \text{posible conexión causal a través de rayos de luz} \\ > 0 & \text{conexión tipo tiempo} & \Rightarrow \text{posible conexión causal} \end{cases}$$

Con esta primera interpretación de los valores de la norma y la visión tetradimensional, el espacio-tiempo, dividido en pasado, presente y futuro, se puebla de eventos que pueden estar o no relacionados causalmente tal y como muestra la figura 3.3.

La preservación del producto interno para todos los observadores⁶ era intuitiva en los espacios euclidianos y, al mantenerla para los pseudo-euclidianos nos traerá consecuencias nada intuitivas en nuestra idea intuitiva

⁶Estamos suponiendo que observadores, sistemas de coordenadas y sistemas de referencia son conceptos equivalentes.

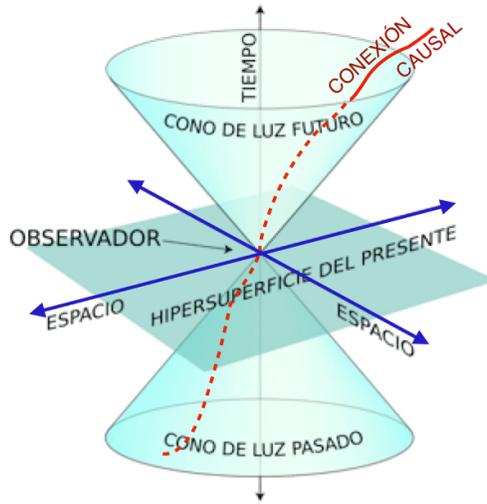


Figura 3.3: Cono de luz, espacio-tiempo y eventos

de “realidad”. Para el caso de la formulación de la Relatividad Especial, añadimos un supuesto más: las componentes del tensor métricos son invariantes bajo transformaciones de coordenadas, esto es

$$\mathbf{g} [|e_\mu\rangle, |e_\nu\rangle] \equiv \mathbf{g} [|\tilde{e}_\mu\rangle, |\tilde{e}_\nu\rangle] \Leftrightarrow \eta_{\alpha\beta} = \tilde{\eta}_{\alpha\beta}, \quad \text{con } \{|e_\mu\rangle\} \text{ y } \{|\tilde{e}_\mu\rangle\}$$

dos bases que se conectan a través de una transformación de coordenadas $x^\mu = x^\mu(\tilde{x}^\alpha) \Leftrightarrow \tilde{x}^\mu = \tilde{x}^\mu(x^\alpha)$
 Construyamos el tipo de transformación de coordenadas que mantiene estos dos supuestos:

- el producto interno de dos vectores es independiente de la base que expanda el espacio vectorial y
- las componentes del tensor métricos son invariantes bajo transformaciones de coordenadas.

Si el producto interno de dos vectores es independiente de la base que expanda el espacio vectorial, tendremos

$$\langle x | y \rangle = \langle \tilde{x} | \tilde{y} \rangle \Leftrightarrow x^\alpha y_\alpha = \tilde{x}^\alpha \tilde{y}_\alpha \Leftrightarrow x^\alpha y^\beta \eta_{\alpha\beta} = \tilde{x}^\alpha \tilde{y}^\beta \tilde{\eta}_{\alpha\beta},$$

y como lo vimos en 3.5 las componentes de vectores, bajo cambio de coordenadas, transforman como

$$\tilde{a}^i = \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^k} a^k \Rightarrow x^\alpha y_\alpha = \tilde{x}^\alpha \tilde{y}_\alpha \Leftrightarrow x^\alpha y^\beta \eta_{\alpha\beta} = \frac{\partial \tilde{x}^\nu}{\partial x^\alpha} x^\alpha \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\beta} y^\beta \tilde{\eta}_{\nu\mu} = x^\alpha y^\beta \frac{\partial \tilde{x}^\nu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\beta} \tilde{\eta}_{\nu\mu},$$

con lo cual concluimos que

$$\eta_{\alpha\beta} = \frac{\partial \tilde{x}^\nu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\beta} \tilde{\eta}_{\nu\mu} \equiv \frac{\partial \tilde{x}^\nu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\beta} \eta_{\nu\mu}.$$

Si derivamos respecto a x^γ tendremos que

$$0 = \eta_{\nu\mu} \left(\frac{\partial^2 \tilde{x}^\nu}{\partial x^\alpha \partial x^\gamma} \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\beta} + \frac{\partial \tilde{x}^\nu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial^2 \tilde{x}^\mu}{\partial x^\beta \partial x^\gamma} \right).$$

Como la cantidad dentro del paréntesis se anula podemos jugar con ésta para descubrir algunas consecuencias ocultas. Es de hacer notar que esa cantidad tiene tres índices libres y por lo tanto son 64 ecuaciones que se

anulan. Eso significa que le podemos añadir y sustraer cualesquieras otras con los índices intercambiados. Supongamos que al paréntesis anulado le añadimos una con los índices α y γ intercambiados y, adicionalmente, le sustraemos una con los índices γ y β intercambiados. Claramente, estamos añadiendo y sustrayendo ceros.

$$0 = \eta_{\nu\mu} \left(\frac{\partial^2 \tilde{x}^\nu}{\partial x^\alpha \partial x^\gamma} \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\beta} + \frac{\partial \tilde{x}^\nu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial^2 \tilde{x}^\mu}{\partial x^\beta \partial x^\gamma} + \frac{\partial^2 \tilde{x}^\nu}{\partial x^\gamma \partial x^\alpha} \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\beta} + \frac{\partial \tilde{x}^\nu}{\partial x^\gamma} \frac{\partial^2 \tilde{x}^\mu}{\partial x^\beta \partial x^\alpha} - \frac{\partial^2 \tilde{x}^\nu}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\gamma} - \frac{\partial \tilde{x}^\nu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial^2 \tilde{x}^\mu}{\partial x^\gamma \partial x^\beta} \right).$$

Con este truco, vemos que el último término anula el segundo y el penúltimo el cuarto, de forma y manera que nos queda

$$0 = 2\eta_{\nu\mu} \frac{\partial^2 \tilde{x}^\nu}{\partial x^\alpha \partial x^\gamma} \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\beta},$$

Con lo cual la única posibilidad que nos queda es

$$0 = \frac{\partial^2 \tilde{x}^\nu}{\partial x^\alpha \partial x^\gamma} \Rightarrow \tilde{x}^\nu = \Lambda_\mu^\nu x^\mu + a^\nu \quad \text{con } \Lambda_\mu^\nu \text{ y } a^\nu \text{ constantes.}$$

Estas transformaciones lineales se conocen como *las transformaciones (inhomogéneas) de Lorentz* o también las transformaciones de Poincaré. Estas transformaciones forman grupo y, uno de los posibles subgrupos lo constituye el conjunto de transformaciones propias de Lorentz de la forma

$$\Lambda_0^0 = 1, \quad \Lambda_0^i = \Lambda_j^0 = 0, \quad \text{y} \quad \Lambda_j^i = R_j^i \quad \text{con } i, j = 1, 2, 3; \quad \text{y}$$

donde R_j^i es una matriz de rotación.

Supongamos el caso más sencillo de este grupo de transformaciones: $a^\nu = 0$. Explícitamente hemos identificado una transformación de la forma

$$\tilde{x}^\alpha = \Lambda_0^\alpha x^0 + \Lambda_1^\alpha x^1 + \Lambda_2^\alpha x^2 + \Lambda_3^\alpha x^3,$$

la cual, por construcción, deja invariante el intervalo tetra dimensional

$$ds^2 = dt^2 - d\mathbf{x}^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad \text{con } d\mathbf{x} = dx^0 \hat{i} + dx^1 \hat{j} + dx^2 \hat{k} + dx^3 \hat{y}$$

con $\eta_{\mu\nu}$ el tensor métrico. Es inmediato demostrar que este tipo de transformaciones deja invariante el intervalo. Primero, notemos que

$$\tilde{\eta}^{\mu\nu} = \Lambda_\alpha^\mu \Lambda_\beta^\nu \eta^{\alpha\beta} \Rightarrow \eta^{\mu\nu} \eta_{\nu\gamma} = \delta_\gamma^\mu = \Lambda_\alpha^\mu \Lambda_\beta^\nu \eta^{\alpha\beta} \eta_{\nu\gamma} \Rightarrow \Lambda_\alpha^\mu \Lambda_\gamma^\alpha = \delta_\gamma^\mu$$

entonces, como

$$d\tilde{x}^\mu = \Lambda_\alpha^\mu dx^\alpha \Rightarrow d\tilde{s}^2 = \tilde{\eta}_{\mu\nu} d\tilde{x}^\mu d\tilde{x}^\nu \equiv \eta_{\mu\nu} \Lambda_\alpha^\mu dx^\alpha \Lambda_\beta^\nu dx^\beta = \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = ds^2.$$

Para construir una de las expresiones más utilizadas del grupo de Lorentz consideramos la siguiente situación física. Un observador, \tilde{x}^μ , ve moverse una partícula con una velocidad \mathbf{v} , mientras que un segundo observador, x^μ , la percibe en reposo. Entonces, para el observador que registra la partícula en reposo $d\mathbf{x} = dx^i = 0$

$$d\tilde{x}^\mu = \Lambda_\alpha^\mu dx^\alpha \Rightarrow \begin{cases} d\tilde{t} &= \Lambda_0^0 dt \\ d\tilde{x}^i &= \Lambda_\alpha^i dx^\alpha = \Lambda_0^i dt \quad \text{con } i = 1, 2, 3. \end{cases}$$

Ahora bien, como

$$\mathbf{v} = \frac{d\tilde{\mathbf{x}}}{d\tilde{t}} \Rightarrow v^i = \frac{d\tilde{x}^i}{d\tilde{t}} \Rightarrow \Lambda_0^i = v^i \Lambda_0^0,$$

y

$$\tilde{\eta}_{\alpha\beta} = \Lambda_{\alpha}^{\mu} \Lambda_{\beta}^{\nu} \eta_{\mu\nu} \Rightarrow 1 = \Lambda_0^{\mu} \Lambda_0^{\nu} \eta_{\mu\nu} = (\Lambda_0^0)^2 - (\Lambda_0^1)^2 - (\Lambda_0^2)^2 - (\Lambda_0^3)^2,$$

con una solución de la forma

$$\Lambda_0^0 = \gamma, \quad \Lambda_0^i = \gamma v^i \quad \text{donde } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (\mathbf{v})^2}} \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - v^i v_i}} \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - ((v^1)^2 + (v^2)^2 + (v^3)^2)}},$$

los otros términos Λ_j^i no quedan unívocamente determinados porque está de por medio la arbitrariedad de una rotación R_j^i . Por ello, una selección arbitraria pero razonable de todos los términos Λ_j^i es

$$\Lambda_j^i = \delta_j^i + v^i v_j \frac{\gamma - 1}{(\mathbf{v})^2} \equiv \delta_j^i + v^i v_j \frac{\gamma - 1}{v^k v_k}$$

De esta forma quedan determinados todos los elementos de las transformaciones de Lorentz.

Los observadores lorentzianos son los equivalentes a los observadores galileanos en las teorías newtonianas: son observadores que se mueven uno respecto al otro con una velocidad constante y, desempeñan el mismo papel que los observadores inerciales. Quizá la consecuencia más impactante de la necesidad de vincular mediciones de distintos observadores lorentzianos a través de transformaciones de Lorentz, lo ilustra la evolución distinta del tiempo medido por los diferentes observadores. Un observador en reposo respecto a un reloj, ve avanzar el tiempo con *tic* separados $dt = \Delta t$ ya que su reposo respecto al reloj implica $d\mathbf{x} = dx^i = 0$, por lo tanto la separación espacio temporal será:

$$ds^2 = dt^2 - d\mathbf{x}^2 = (\Delta t)^2$$

mientras que un segundo observador tendrá el mismo elemento de línea pero expresado como

$$d\tilde{s}^2 = d\tilde{t}^2 - d\tilde{\mathbf{x}}^2 = (1 - \mathbf{v}^2) d\tilde{t} \Rightarrow d\tilde{t} = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2}}$$

y claramente indica que tiempo evoluciona más lento para relojes en movimiento.

3.8.3. Ejercicios

1. Si A_{ijk} es un tensor covariante de orden 3 y B^{lmno} un tensor contravariante de orden 4, pruebe que $A_{ijk} B^{jkn}$ es un tensor mixto de orden 3.
2. En el espacio euclideo 3D y en coordenadas cartesianas no distinguimos entre vectores y uno-formas debido a que sus componentes transforman de la misma manera. Demuestre que
 - a) $\tilde{a}^i = \Lambda_j^i a^j \wedge \tilde{b}_j = \Lambda_j^i b_i$ son la misma transformación si la matriz Λ_j^i es igual a la transpuesta de su inversa, es decir, si es ortogonal.
 - b) Considere dos observadores $O \rightarrow x, y \leftrightarrow x^1, x^2$ y $\tilde{O} \rightarrow \tilde{x}, \tilde{y} \leftrightarrow \tilde{x}^1, \tilde{x}^2$ y sus sistemas de coordenadas asociados.
 - 1) Considere la siguiente transformación de coordenadas de Galileo

$$\tilde{x}^1 = V^1 t + \frac{\sqrt{2}}{2} x^1 - \frac{\sqrt{2}}{2} x^2 \quad \text{y} \quad \tilde{x}^2 = \frac{\sqrt{2}}{2} x^1 + \frac{\sqrt{2}}{2} x^2$$

con V^1 una constante que representa la velocidad relativa entre $O - \tilde{O}$ y t al tiempo, parámetro de esta transformación. A continuación suponga una partícula que describe un movimiento respecto a O siguiendo una trayectoria recta. Esto es $x^2 = \alpha x^1$, donde α es una constante y encuentre cómo lo describiría el observador \tilde{O} respecto a sus coordenadas \tilde{x}^1, \tilde{x}^2 (3ptos).

2) Considere ahora la generalización de la transformación de coordenadas anterior

$$\tilde{x}^1 = V^1 t + \frac{\sqrt{2}}{2} x^1 - \frac{\sqrt{2}}{2} x^2 \quad \text{y} \quad \tilde{x}^2 = V^2 t + \frac{\sqrt{2}}{2} x^1 + \frac{\sqrt{2}}{2} x^2$$

con V^1 y V^2 las componentes de una velocidad relativa entre $O - \tilde{O}$ y t al tiempo, parámetro de esta transformación. Muestre que este tipo de transformaciones de coordenadas forman un grupo (3ptos)

3) Muestre que la norma de cualquier vector queda invariante respecto a una transformación de coordenadas como la anterior y encuentre la matriz de transformación (3ptos).

c) Dado un espacio minkowskiano y un observador O que describe los eventos en el espacio-tiempo respecto a un sistema de coordenadas $\{x^\alpha\}$ donde $\alpha = 0, 1, 2$ y $\eta = \text{diag}[-1, 1, 1, \dots]$ el tensor métrico. Considere entonces la siguiente transformación de coordenadas

$$\tilde{x}^0 = \gamma(x^0 - \beta x^1) \quad \tilde{x}^1 = \gamma(x^1 - \beta x^0) \quad \text{y} \quad \tilde{x}^2 = x^2 \quad \text{con} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

y $\beta = v/c$ es la velocidad relativa entre O y \tilde{O} .

1) Otra vez suponga que una partícula describe una línea recta respecto a O : $x^2 = \alpha x^1$, donde α es una constante. Esta vez encuentre cómo lo describiría el otro observador \tilde{O} respecto a sus coordenadas $\tilde{x}^0, \tilde{x}^1, \tilde{x}^2$ (3ptos)

2) Encuentre la expresión para la transformación de coordenadas, $\frac{\partial \tilde{x}^\alpha}{\partial x^\beta} = \Lambda_{\beta}^{\tilde{\alpha}}$ (transformación de Lorentz) entre estos sistemas relativistas y muestre como la norma, $x^\alpha x_\alpha = x^\alpha x^\beta \eta_{\alpha\beta}$, de cualquier vector se conserva (3ptos)

3) Considere el Tensor de Maxwell definido como

$$F^{\mu\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & E^x & E^y \\ -E^x & 0 & B^z \\ -E^y & -B^z & 0 \end{pmatrix} \quad \text{otra vez con} \quad \eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donde $\vec{E} = (E^x, E^y)$ y $\vec{B} = (B^x, B^y)$ son los campos eléctricos y magnéticos (respectivamente) medidos por un observador O . Si un observador mide un campo eléctrico $\vec{E} = E^x \hat{i}$ y ningún campo magnético. ¿Cuáles campos, $F_{\mu\alpha}$ medirá otro observador que viaja con una velocidad $\vec{\beta} = v \hat{i}$, ? (3ptos)

4) Muestre que las ecuaciones de Maxwell

$$\nabla \times \vec{B} - \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} = 4\pi \vec{J}, \quad \nabla \times \vec{E} - \frac{\partial}{\partial t} \vec{B} = 0, \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad \text{y} \quad \nabla \cdot \vec{E} = 4\pi \rho$$

se pueden escribir como

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu} F^{\mu\nu} = F^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 4\pi J^\mu \quad \text{donde} \quad J^\mu = (\rho, J^1, J^2) \quad \text{y} \quad \vec{J} = (J^1, J^2)$$

(4ptos)

3.9. Bases continuas

Haremos una digresión para fijar conceptos y extender algunos de los razonamientos que hemos desarrollado hasta aquí. Tal y como vimos anteriormente, la representación de un vector $|F\rangle$ en un espacio vectorial abstracto \mathbf{V} puede darse en término de una base ortonormal de vectores (discreta y finita $B_{DF} = \{|e_1\rangle, |e_2\rangle, |e_3\rangle, \dots, |e_n\rangle\}$ o discreta e infinita $B_{DI} = \{|e_1\rangle, |e_2\rangle, |e_3\rangle \dots |e_n\rangle \dots\}$) de la forma:

$$|F\rangle = \begin{cases} c^i |e_i\rangle = \langle e^i | F \rangle |e_i\rangle \Leftarrow B_{DF} = \{|e_1\rangle, |e_2\rangle, |e_3\rangle \dots |e_n\rangle\} \\ c^i |e_i\rangle = \langle e^i | F \rangle |e_i\rangle \Leftarrow B_{DI} = \{|e_1\rangle, |e_2\rangle, |e_3\rangle \dots |e_n\rangle \dots\} \end{cases}$$

donde en ambos casos:

$$c^i = \langle e^i | F \rangle = c^j \langle e^i | e_j \rangle = c^j \delta_j^i$$

Ahora bien, si estamos tratando el espacio vectorial de funciones de cuadrado integrable \mathcal{L}^2 , definidas en \mathfrak{R}^3 tendremos que

$$|F\rangle = c^i |e_i\rangle \equiv \langle e^i | F \rangle |e_i\rangle = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} d^3 r' \xi_i^*(\mathbf{r}') f(\mathbf{r}') \right) |e_i\rangle$$

que se reescribe en términos de funciones como

$$f(\mathbf{r}) = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} d^3 r' \xi_i^*(\mathbf{r}') f(\mathbf{r}') \right) \xi_i(\mathbf{r})$$

Es claro que se pueden intercambiar los símbolos de f y \sum_i por lo cual

$$f(\mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} d^3 r' f(\mathbf{r}') \underbrace{\left[\sum_{i=0}^{\infty} \xi_i^*(\mathbf{r}') \xi_i(\mathbf{r}) \right]}_{\mathcal{G}(\mathbf{r}', \mathbf{r})}$$

la función $\mathcal{G}(\mathbf{r}', \mathbf{r})$ que depende de los argumentos, \mathbf{r}' y \mathbf{r} , vive dentro de las integrales y convierte

$$f(\mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} d^3 r' f(\mathbf{r}') \mathcal{G}(\mathbf{r}', \mathbf{r})$$

Este tipo de funciones (transformadas integrales) se conoce como la función distribución delta de Dirac

$$f(\mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} d^3 r' f(\mathbf{r}') \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r})$$

Esto sugiere la generalización de bases discretas a continua $|w_\alpha\rangle$ de tal forma que transformamos el índice de la sumatoria en la variable de una integral

$$|\Psi\rangle = \int d\alpha c(\alpha) |w_\alpha\rangle$$

donde

$$c(\beta) = \langle w_\beta | \Psi \rangle = \int d\alpha c(\alpha) \langle w_\beta | w_\alpha \rangle = \int d\alpha c(\alpha) \delta(\alpha - \beta)$$

donde $\delta(\alpha - \beta)$ es la Delta de Dirac. Así, los dos conceptos expresados hasta ahora tienen una expresión:

| Propiedad \ Base | Discreta | Continua |
|------------------|--|---|
| Ortogonalidad | $\langle u^i u_j \rangle = \delta_j^i$ | $\langle w_\beta w_\alpha \rangle = \delta(\alpha - \beta)$ |
| Cierre | $1 = \sum_{j=0}^{\infty} u_j\rangle \langle u_j $ | $1 = \int d\alpha w_\alpha\rangle \langle w_\alpha $ |
| Expansión | $ F\rangle = \sum_{i=0}^{\infty} c^i u_i\rangle$ | $ \Psi\rangle = \int d\alpha c(\alpha) w_\alpha\rangle$ |
| Componentes | $c^i = \langle u^i F \rangle$ | $c(\beta) = \langle w_\beta \Psi \rangle$ |
| Producto Interno | $\langle G F \rangle = \sum_{i=0}^{\infty} g^{i*} f_i$ | $\langle G F \rangle = \int d\alpha g^*(\alpha) f(\alpha)$ |
| Norma | $\langle F F \rangle = \sum_{i=0}^{\infty} f_i ^2$ | $\langle F F \rangle = \int d\alpha f(\alpha) ^2$ |

3.9.1. Bases de ondas planas

Como un ejemplo de lo anterior consideraremos la base de las ondas planas. En el capítulo de transformadas integrales consideraremos un caso particular de la transformada de Fourier compleja para una función, vale decir

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i st} f(t) \quad \Leftrightarrow \quad f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} ds e^{-i st} F(s)$$

las cuales podemos re-escribir en términos más familiares a la comunidad de físicos como

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} dp e^{i px/\hbar} \bar{\psi}(p) \quad \Leftrightarrow \quad \bar{\psi}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-i px/\hbar} \psi(x)$$

Hemos tenido cuidado de incluir los factores de normalización adecuados para el caso de las descripciones en mecánica cuántica. Estas fórmulas pueden ser re-interpretadas en función de los conceptos anteriormente expuestos y podemos definir una base continua de la forma

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} dp \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{i px/\hbar} \right)}_{v_p(x)} \bar{\psi}(p) \quad \Leftrightarrow \quad \bar{\psi}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} dx \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{-i px/\hbar} \right)}_{v_p^*(x)} \psi(x)$$

por lo cual

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dp v_p(x) \bar{\psi}(p) \quad \Leftrightarrow \quad \bar{\psi}(p) = \int_{-\infty}^{\infty} dx v_p^*(x) \psi(x)$$

Diremos que la función $\psi(x)$ está expresada en la base de ondas planas $v_p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{i px/\hbar}$.

Nótese:

- El índice p de $v_p(x)$ varía de forma continua entre $-\infty$ a ∞ .
- Que $v_p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{i px/\hbar} \notin \mathcal{L}^2$, es decir, no pertenece al espacio vectorial de funciones de cuadrado integrable ya que su norma diverge

$$\langle v_p | v_p \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx |v_p(x)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{2\pi\hbar} \rightarrow \infty$$

- Que las proyecciones de $\psi(x)$ sobre la base de ondas planas es: $\bar{\psi}(p) = \langle v_p | \psi \rangle$
- La relación de cierre para esta base se expresa como

$$1 = \int d\alpha |v_\alpha\rangle \langle v_\alpha| \quad \Leftrightarrow \quad \int_{-\infty}^{\infty} dp v_p^*(x') v_p(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dp \frac{1}{2\pi\hbar} e^{i p(x'-x)/\hbar} = \delta(x' - x)$$

mientras que de la definición de producto interno uno obtiene

$$\langle v_{p'} | v_p \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx v_{p'}^*(x) v_p(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dp \frac{1}{2\pi\hbar} e^{i x(p'-p)/\hbar} = \delta(p' - p)$$

En este mismo orden de ideas podemos construir otra base continua $\xi_{\mathbf{r}_0}(\mathbf{r})$ a partir de la utilización de las propiedades de la delta de Dirac. Esto es

$$\psi(\mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} d^3r_0 \psi(\mathbf{r}_0) \underbrace{\delta(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r})}_{\xi_{\mathbf{r}_0}(\mathbf{r})} \quad \Leftrightarrow \quad \psi(\mathbf{r}_0) = \int_{-\infty}^{\infty} d^3r \psi(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$$

por lo cual la re-interpretación es inmediata

$$\psi(\mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} d^3r_0 \psi(\mathbf{r}_0) \xi_{\mathbf{r}_0}(\mathbf{r}) \quad \text{con} \quad \psi(\mathbf{r}_0) = \langle \xi_{\mathbf{r}_0} | \psi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} d^3r \xi_{\mathbf{r}_0}^*(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r})$$

más aún la ortogonalidad queda garantizada por la relación de cierre

$$\langle \xi_{\mathbf{r}_0} | \xi_{\mathbf{r}'_0} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} d^3r_0 \xi_{\mathbf{r}_0}^*(\mathbf{r}) \xi_{\mathbf{r}'_0}(\mathbf{r}') = \int_{-\infty}^{\infty} d^3r_0 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0) = \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r})$$

al igual que

$$\langle \xi_{\mathbf{r}_0} | \xi_{\mathbf{r}'_0} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} d^3r \xi_{\mathbf{r}_0}^*(\mathbf{r}) \xi_{\mathbf{r}'_0}(\mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} d^3r \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'_0) = \delta(\mathbf{r}'_0 - \mathbf{r}_0)$$

3.9.2. Las Representaciones $|r\rangle$ y $|p\rangle$

A partir de las bases de ondas planas $v_{p_0}(x)$, y de distribuciones, $\xi_{\mathbf{r}_0}(\mathbf{r})$, construimos las llamadas representaciones $|r\rangle$ y $|p\rangle$ de la forma siguiente. Asociamos

$$\xi_{\mathbf{r}_0}(\mathbf{r}) \quad \Leftrightarrow \quad |r_0\rangle$$

$$v_{p_0}(x) \quad \Leftrightarrow \quad |p_0\rangle$$

De esta forma dada las bases $\{\xi_{\mathbf{r}_0}(\mathbf{r})\}$ y $\{v_{p_0}(x)\}$ para el espacio vectorial \mathbf{V} definiremos dos “representaciones”, la representación de coordenadas, $|r_0\rangle$, y la representación de momentos $|p_0\rangle$ de \mathbf{V} , respectivamente. De tal modo que

$$\langle r_0 | r'_0 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} d^3r \xi_{\mathbf{r}_0}^*(\mathbf{r}) \xi_{\mathbf{r}'_0}(\mathbf{r}) = \delta(r'_0 - r_0)$$

$$1 = \int d^3r_0 |r_0\rangle \langle r_0|$$

$$\langle p_0 | p'_0 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} d^3r v_{p'_0}^*(\mathbf{r}) v_{p_0}(\mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} d^3r \frac{1}{2\pi\hbar} e^{-i \mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{p}_0 / \hbar} = \delta(\mathbf{p}'_0 - \mathbf{p}_0)$$

$$1 = \int d^3p_0 |p_0\rangle \langle p_0|$$

Podemos, entonces expresar el producto interno para la representación de coordenadas como

$$\langle \Phi | \Psi \rangle = \langle \Phi | \underbrace{\left(\int d^3 r_0 |r_0\rangle \langle r_0| \right)}_1 | \Psi \rangle = \int d^3 r_0 \phi^*(\mathbf{r}_0) \psi(\mathbf{r}_0)$$

y equivalentemente para la representación de momentos

$$\langle \Phi | \Psi \rangle = \langle \Phi | \underbrace{\left(\int d^3 p_0 |p_0\rangle \langle p_0| \right)}_1 | \Psi \rangle = \int d^3 p_0 \phi^*(\mathbf{p}_0) \psi(\mathbf{p}_0)$$

por lo cual hemos encontrado que

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle &= \int d^3 r_0 |r_0\rangle \langle r_0| \Psi\rangle = \int d^3 p_0 |p_0\rangle \langle p_0| \Psi\rangle \\ \psi(\mathbf{r}_0) &= \langle r_0 | \Psi\rangle \quad \text{y} \quad \psi(\mathbf{p}_0) = \langle p_0 | \Psi\rangle \end{aligned}$$

que es la representación de $|\Psi\rangle$ en coordenadas, $\psi(r_0)$, y en momentos, $\psi(p_0)$.

Adicionalmente cuando $|\Psi\rangle = |p\rangle$ tendremos que

$$\begin{aligned} \langle r_0 | p_0 \rangle &= \langle r_0 | \underbrace{\left(\int d^3 r'_0 |r'_0\rangle \langle r'_0| \right)}_1 | p_0 \rangle = (2\pi\hbar)^{-3/2} \int d^3 r'_0 \delta(\mathbf{r}'_0 - \mathbf{r}_0) e^{\frac{i}{\hbar} \mathbf{p}_0 \cdot \mathbf{r}_0} \\ \langle r_0 | p_0 \rangle &= (2\pi\hbar)^{-3/2} e^{\frac{i}{\hbar} \mathbf{p}_0 \cdot \mathbf{r}_0} \end{aligned}$$

con lo cual $\psi(p_0)$ puede considerarse la transformada de Fourier de $\psi(r_0)$, y denotaremos de ahora en adelante las bases $|r_0\rangle \equiv |r\rangle$ y $|p_0\rangle \equiv |p\rangle$.

Estos índices continuos, \mathbf{r}_0 y \mathbf{p}_0 , representan tres índices continuos $\mathbf{r} \equiv (x, y, z)$ y $\mathbf{p} \equiv (p_x, p_y, p_z)$. La proyección de un vector abstracto $|\Psi\rangle$ en la representación $|r\rangle$ será considerada como su expresión en el espacio de coordenadas, igualmente su proyección $\langle p | \Psi\rangle$ será su expresión en el espacio de los momentos. Eso nos permitirá hacer corresponder los elementos de espacios vectoriales abstractos con, con elementos de un espacio vectorial de funciones. Por lo tanto todas las fórmulas de proyección quedan como

$$\langle r | \Psi\rangle = \psi(\mathbf{r}) \quad \text{y} \quad \langle p | \Psi\rangle = \psi(\mathbf{p})$$

mientras que las relaciones de cierre y ortonormalización

$$\begin{aligned} \langle r | r'\rangle &= \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \quad \text{y} \quad 1 = \int d^3 r |r\rangle \langle r| \\ \langle p | p'\rangle &= \delta(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \quad \text{y} \quad 1 = \int d^3 p |p\rangle \langle p|, \end{aligned}$$

por su parte, la relación de cierre hará corresponder a la expresión de el producto interno de dos vectores, tanto en la representación de las coordenadas como en la representación de momentos, en la forma

$$\begin{aligned} \langle \Phi | \left(\int d^3 r |r\rangle \langle r| \right) | \Psi \rangle &= \int d^3 r \phi^*(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}) \\ &\quad \Updownarrow \\ &\langle \Phi | \Psi \rangle \\ &\quad \Updownarrow \\ \langle \Phi | \left(\int d^3 p |p\rangle \langle p| \right) | \Psi \rangle &= \int d^3 p \bar{\phi}^*(\mathbf{p}) \bar{\psi}(\mathbf{p}) \end{aligned}$$

donde $\bar{\phi}^*(\mathbf{p})$ y $\bar{\psi}(\mathbf{p})$ son las transformadas de Fourier de $\phi^*(\mathbf{r})$ y $\psi(\mathbf{r})$, respectivamente. La afirmación anterior queda evidentemente demostrada del cambio entre las bases $|r\rangle$ y $|p\rangle$. Esto es

$$\langle r | p \rangle = \langle p | r \rangle^* = (2\pi\hbar)^{-3/2} e^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}$$

por lo cual

$$\psi(\mathbf{r}) = \langle r | \Psi \rangle = \langle r | \left(\int d^3p |p\rangle \langle p| \right) | \Psi \rangle = \int d^3p \langle r | p \rangle \langle p | \Psi \rangle = (2\pi\hbar)^{-3/2} \int d^3p e^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}} \bar{\psi}(\mathbf{p})$$

e inversamente

$$\bar{\psi}(\mathbf{p}) = \langle p | \Psi \rangle = \langle p | \left(\int d^3r |r\rangle \langle r| \right) | \Psi \rangle = \int d^3r \langle p | r \rangle \langle r | \Psi \rangle = (2\pi\hbar)^{-3/2} \int d^3r e^{-\frac{i}{\hbar}\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}} \psi(\mathbf{r}).$$

Borrador Preliminar

3.10. Ejercicios propuestos

1. Dado F_{ijk} un tensor totalmente antisimétrico respecto a sus índices ijk , demuestre que

$$\text{rot}[F_{ijk}] = \partial_m F_{ijk} - \partial_i F_{jkm} + \partial_j F_{kmi} - \partial_k F_{mij} \equiv \frac{\partial F_{ijk}}{\partial x^m} - \frac{\partial F_{jkm}}{\partial x^i} + \frac{\partial F_{kmi}}{\partial x^j} - \frac{\partial F_{mij}}{\partial x^k}$$

$$\text{rot}[F_{ijk}] = F_{ijk,m} - F_{jkm,i} + F_{kmi,j} - F_{mij,k} \equiv \partial_m F_{ijk} - \partial_i F_{jkm} + \partial_j F_{kmi} - \partial_k F_{mij}$$

2. El momento de inercia se define como

$$I_j^i = \int_V dv \rho(\mathbf{r}) (\delta_j^i (x^k x_k) - x^i x_j) \quad \text{con } x^i = \{x, y, z\} \text{ y } dv = dx dy dz$$

a) Muestre que I_j^i es un tensor

b) Encuentre la representación matricial para I_j^i

c) Considere un cubo de lado l y masa total M tal que tres de sus aristas coinciden con un sistema de coordenadas cartesianas. Encuentre el tensor momento de inercia, I_j^i .

3. Para un sistema de n partículas rígidamente unidas, la cantidad de movimiento \mathbf{p} y cantidad de movimiento angular \mathbf{L} vienen definidas por

$$\mathbf{p}_\alpha = m_\alpha \mathbf{v}_\alpha = m_\alpha (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_\alpha) \equiv \epsilon^{ijk} \omega_j x_k |e_i\rangle$$

$$\mathbf{L} = \sum_\alpha (\mathbf{r}_\alpha \times \mathbf{p}_\alpha) \equiv \epsilon^{ijk} x_k p_k |e_i\rangle ;$$

con $\alpha = 1, 2, \dots, n$, $|e_i\rangle = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ y $x^i = \{x, y, z\}$

Muestre que:

a) $\mathbf{L} = \sum_\alpha m_\alpha [(\mathbf{r}_\alpha \cdot \boldsymbol{\omega}) \boldsymbol{\omega} - \mathbf{r}_\alpha (\mathbf{r}_\alpha \cdot \boldsymbol{\omega})]$.

b) $L^i = I_j^i \omega^j$, donde $I_j^i = \sum_\alpha m_\alpha (\delta_j^i (x^k x_k) - x^i x_j)$ es el tensor momento de inercia para un sistema de n partículas rígidamente unidas.

4. Dado un tensor genérico de segundo orden T_{ij} . Demostrar

a) Que el determinante $\det[\mathbf{T}] \equiv \det[T_j^i] = T$ y la traza $\text{tr}[T_j^i] = T_i^i$ son invariantes, en otras palabras, $\det[T_j^i]$ y $\text{tr}[T_j^i]$ son escalares respecto a transformaciones de coordenadas.

b) Si definimos la matriz adjunta $\text{adj}[\mathbf{A}]$, como la traspuesta de la matriz de cofactores

$$\text{adj}[\mathbf{A}] = (\mathbf{A}^c)^T \Rightarrow \text{adj}[A_j^i] = \left((A^c)_j^i \right)^T = (A^c)_i^j$$

donde la matriz de cofactores $(A^c)_j^i$ viene dada por

$$A_j^i = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{pmatrix} \Rightarrow (A^c)_j^i = \begin{pmatrix} (A^c)_1^1 & (A^c)_2^1 & (A^c)_3^1 \\ (A^c)_1^2 & (A^c)_2^2 & (A^c)_3^2 \\ (A^c)_1^3 & (A^c)_2^3 & (A^c)_3^3 \end{pmatrix}$$

y los cofactores son

$$(A^c)_1^1 = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_2^2 & a_3^2 \\ a_2^3 & a_3^3 \end{vmatrix} \quad (A^c)_2^1 = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_1^2 & a_3^2 \\ a_1^3 & a_3^3 \end{vmatrix} \quad (A^c)_3^1 = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_2^2 & a_3^2 \\ a_2^3 & a_3^3 \end{vmatrix}$$

$$(A^c)_1^2 = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} a_2^1 & a_3^1 \\ a_2^3 & a_3^3 \end{vmatrix} \quad (A^c)_2^2 = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} a_1^1 & a_3^1 \\ a_1^3 & a_3^3 \end{vmatrix} \quad (A^c)_3^2 = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} a_1^1 & a_3^1 \\ a_1^3 & a_3^3 \end{vmatrix}$$

$$(A^c)_1^3 = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} a_2^1 & a_3^1 \\ a_2^2 & a_3^2 \end{vmatrix} \quad (A^c)_2^3 = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} a_1^1 & a_3^1 \\ a_1^2 & a_3^2 \end{vmatrix} \quad (A^c)_3^3 = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \end{vmatrix}$$

Para la transformación $\tilde{x}^i = a x^i$ con a un escalar constante, muestre que

- 1) $\tau_j^i = \frac{\text{adj}[T_j^i]}{T}$ es un tensor
- 2) Su determinante $\det[\tau_j^i] = \tau$ y su traza $\text{tr}[\tau_j^i] = \tau_i^i$, también serán invariantes.
- 3) $T_j^i = \frac{\text{adj}[\tau_j^i]}{\tau}$
- 4) $\tau T = 1$

5. Dados dos sistemas de coordenadas ortogonales $O \Rightarrow (x, y, z)$ y $\tilde{O} \Rightarrow (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$, donde el sistema de coordenadas \tilde{O} se obtiene a rotando O , $\frac{\pi}{6}$ alrededor del eje z , para rotarlo $\frac{\pi}{2}$ alrededor del eje \tilde{x} con lo cual los ejes \tilde{y} y z coinciden.

a) Si tenemos los vectores

$$\mathbf{A} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k} \quad \mathbf{B} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$$

Expréselos en el sistema de coordenadas $\tilde{O} \Rightarrow (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$.

b) El tensor de esfuerzos (tensiones normales y tangenciales a una determinada superficie) se expresa en el sistema $O \Rightarrow (x, y, z)$ como

$$P_j^i = \begin{pmatrix} P_1 & 0 & P_4 \\ 0 & P_2 & 0 \\ 0 & 0 & P_3 \end{pmatrix}$$

¿Cuál será su expresión en el sistema de coordenadas $\tilde{O} \Rightarrow (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$?

6. Suponga un sistema de coordenadas ortogonales generalizadas (q^1, q^2, q^3) las cuales tienen la siguiente relación funcional con las coordenadas cartesianas

$$q^1 = x + y; \quad q^2 = x - y; \quad q^3 = 2z;$$

- a) Compruebe que el sistema (q^1, q^2, q^3) conforma un sistema de coordenadas ortogonales
- b) Encuentre los vectores base para este sistema de coordenadas
- c) Encuentre el tensor métrico y el elemento de volumen en estas coordenadas.
- d) Encuentre las expresiones en el sistema (q^1, q^2, q^3) para los vectores

$$\mathbf{A} = 2\mathbf{j}; \quad \mathbf{B} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}; \quad \mathbf{C} = \mathbf{i} + 7\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$$

e) Encuentre en el sistema (q^1, q^2, q^3) la expresión para las siguientes relaciones vectoriales

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B}; \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}; \quad (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}$$

¿Qué puede decir si compara esas expresiones en ambos sistemas de coordenadas?

7. La relación entre las coordenadas cartesianas (x, y) y las coordenadas bipolares (ξ, ζ) viene dada por

$$x = \frac{a \sinh(\xi)}{\cosh(\xi) + \cos(\zeta)}; \quad y = \frac{a \sin(\zeta)}{\cosh(\xi) + \cos(\zeta)}; \quad \text{con } a = \text{const}$$

- a) Compruebe si los vectores base para las coordenadas bipolares son ortogonales
- b) Encuentre el tensor métrico para las coordenadas bipolares
- c) Escriba las componentes covariantes y contravariantes para los vectores \mathbf{i} , \mathbf{j} y $\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$.

Borrador Preliminar

Bibliografía

- [1] Arfken, G. B., Weber, H., Weber, H.J. (2000) **Mathematical Methods for Physicists** 5ta Edición (Academic Press, Nueva York)
- [2] Borisenko, A.I. y Tarapov I.E. (1968) **Vector and Tensor Analysis** (Dover Publications Inc, Nueva York)
- [3] Dennery, P. y Krzywicki, A. (1995) **Mathematics for Physicists** (Dover Publications Inc, Nueva York)
- [4] Harper, C. (1971) **Introduction to Mathematical Physics** (*Prentice Hall, Englewood Cliff, N.J.*)
- [5] Hassani, S. (1991) **Foundations of Mathematical Physics** (*Prentice Hall, International Edition, London:*
- [6] Hauser, W (1971) **Introduction to Principles of Electromagnetism** (*Addison-Wesley Pub Co Reading*)
- [7] Riley, K.F., Hobson, M.P. y Bence, S.J. (2002) **Mathematical Methods for Physics and Engineering** (*Cambridge University Press*)
- [8] Santaló, L.A (1969) **Vectores y Tensores** (*Editorial Universitaria, Buenos Aires*)
- [9] Schutz, B. (1980) **Geometrical Methods in Mathematical Physics** (*Cambridge University Press, Londres*)
- [10] Spiegel, M. (1959) **Vector Analysis** (*Schaums Outline Series, McGraw Hill New York*)

Capítulo **4**

Matrices, Determinantes y Autovectores

Borrador Preliminar

4.1. Operadores Lineales

Definiremos como operador lineal (o transformaciones lineales) a una operación que asocia un vector $|v\rangle \in \mathbf{V}_1$ un vector $|v'\rangle \in \mathbf{V}_2$ y que respeta la linealidad, es decir esta función de $\mathbf{V}_1 \rightarrow \mathbf{V}_2$ cumple con

$$|v'\rangle = \mathbb{A} |v\rangle / \mathbb{A} [\alpha |v_1\rangle + \beta |v_2\rangle] = \alpha \mathbb{A} |v_1\rangle + \beta \mathbb{A} |v_2\rangle \quad \forall |v\rangle, |v_1\rangle \text{ y } |v_2\rangle \in \mathbf{V}_1$$

Sencillamente, algo que actúe sobre una suma de vectores y que sea equivalente a la suma de sus actuaciones sobre los vectores suma.

Ejemplos

1. Las siguientes transformaciones

$$|x'\rangle = \mathbb{T} |x\rangle \rightarrow (x', y', z') = \mathbb{T} \{(x, y, z)\}$$

claramente son lineales

- $\mathbb{T} \{(x, y, z)\} = (x, 2y, 3z) \rightarrow$

$$\begin{aligned} \mathbb{T} \{a(x, y, z) + b(m, n, l)\} &= a\mathbb{T} \{(x, y, z)\} + b\mathbb{T} \{(m, n, l)\} \\ \mathbb{T} \{(ax + bm, ay + bn, az + bl)\} &= a(x, 2y, 3z) + b(m, 2n, 3l) \\ (ax + bm, 2[ay + bn], 3[az + bl]) &= (ax + bm, 2[ay + bn], 3[az + bl]) \end{aligned}$$

- $\mathbb{T} \{(x, y, z)\} = (z, y, x) \rightarrow$

$$\begin{aligned} \mathbb{T} \{a(x, y, z) + b(m, n, l)\} &= a\mathbb{T} \{(x, y, z)\} + b\mathbb{T} \{(m, n, l)\} \\ \mathbb{T} \{(ax + bm, ay + bn, az + bl)\} &= a(z, y, x) + b(l, n, m) \\ (az + bl, ay + bn, ax + bm) &= (az + bl, ay + bn, ax + bm) \end{aligned}$$

2. Cosas tan sencillas como multiplicación por un escalar es una transformación (u operador) lineal $\mathbb{T} : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ tal que

$$\mathbb{T} |v\rangle = |v'\rangle = \alpha |v\rangle$$

Claramente,

$$\mathbb{T} [a |v\rangle + b |w\rangle] = a\mathbb{T} |v\rangle + b\mathbb{T} |w\rangle = a\alpha |v\rangle + b\alpha |w\rangle$$

Obviamente, si $\alpha = 1$ tenemos la transformación identidad que transforma todo vector en sí mismo; si $\alpha = 0$ tendremos la transformación cero, vale decir que lleva a todo $|v\rangle \in \mathbf{V}$ a al elemento cero $|0\rangle$

3. La definición de producto interno también puede ser vista como una transformación (operador) lineal $\mathbb{T} : \mathbf{V} \rightarrow \mathfrak{R}$

$$\mathbb{T} |v\rangle = \alpha \Leftrightarrow \langle c | v \rangle \equiv \alpha$$

Otra vez:

$$\mathbb{T} [a |v\rangle + b |w\rangle] = \langle c | [a |v\rangle + b |w\rangle] = a \langle c | v \rangle + b \langle c | w \rangle$$

por lo tanto es lineal. Esto implica que también la proyección de un determinado $|v\rangle \in \mathbf{V}$ sobre un subespacio \mathbf{S} es un operador lineal, y lo denotaremos como

$$[|s\rangle \langle s|] |v\rangle = \langle s | v \rangle |s\rangle = |v_s\rangle \quad \text{con } |s\rangle \text{ y } |v_s\rangle \in \mathbf{S}$$

esta idea se extiende fácil si para un proyector $\mathbb{T} : \mathbf{V}_m \rightarrow \mathbf{S}_n$ con $m > n$ de tal modo que para un vector $|v\rangle \in \mathbf{V}_m$

$$\mathbb{P}_m |v\rangle \equiv (|u_i\rangle \langle u^i|_m) |v\rangle = \langle u^i | v \rangle_m |u_i\rangle = |v_m\rangle$$

con $\{|u_i\rangle\}$ base de \mathbf{S}_n . Es claro que estamos utilizando la convención de Einstein para la suma de índices.

4. Las ecuaciones lineales también pueden verse como transformaciones lineales. Esto es, considere una transformación lineal $\mathbb{T} : \mathbf{V}_n \rightarrow \mathbf{V}_m$. Por lo tanto asociaremos

$$|y\rangle = \mathbb{T} |x\rangle \Rightarrow (y^1, y^2, y^3, \dots, y^m) = \mathbb{T} \{(x^1, x^2, x^3, \dots, x^n)\}$$

a través de $n \times m$ números, a_j^i , organizados de la siguiente forma

$$y^i = a_j^i x^j \quad \text{con} \quad \begin{cases} i = 1, 2, \dots, m \\ j = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

una vez más,

$$\begin{aligned} \mathbb{T} [\alpha |v\rangle + \beta |w\rangle] &= \mathbb{T} \{ \alpha (v^1, v^2, v^3, \dots, v^n) + \beta (w^1, w^2, w^3, \dots, w^n) \} = \alpha a_j^i v^j + \beta a_j^i w^j \\ &= \mathbb{T} \{ (\alpha v^1 + \beta w^1, \alpha v^2 + \beta w^2, \alpha v^3 + \beta w^3, \dots, \alpha v^n + \beta w^n) \} \\ &= a_j^i (\alpha v + \beta w)^j = \alpha a_j^i v^j + \beta a_j^i w^j = a_j^i (\alpha v^j + \beta w^j) \end{aligned}$$

5. La derivada es un operador lineal. Así podemos representar el operador lineal diferenciación como

$$|v'\rangle = \mathbb{T} |v\rangle \quad \rightarrow \quad |y'\rangle = \mathbb{D} |y\rangle \quad \rightarrow \quad \mathbb{D} [y(x)] \equiv \frac{d}{dx} [y(x)] \equiv \frac{dy(x)}{dx} \equiv y'(x)$$

es claro que

$$\mathbb{D} [\alpha f(x) + \beta g(x)] = \alpha \mathbb{D} [f(x)] + \beta \mathbb{D} [g(x)] \equiv \alpha f'(x) + \beta g'(x)$$

igualmente podemos asociar un operador diferencial de cualquier orden a una derivada del mismo orden, esto es

$$\begin{aligned} |y''\rangle = \mathbb{D}^2 |y\rangle &\rightarrow \mathbb{D}^2 [y(x)] \equiv \frac{d^2}{dx^2} [y(x)] \equiv \frac{d^2 y(x)}{dx^2} \equiv y''(x) \\ |y'''\rangle = \mathbb{D}^3 |y\rangle &\rightarrow \mathbb{D}^3 [y(x)] \equiv \frac{d^3}{dx^3} [y(x)] \equiv \frac{d^3 y(x)}{dx^3} \equiv y'''(x) \\ &\vdots \\ |y^{(n)}\rangle = \mathbb{D}^n |y\rangle &\rightarrow \mathbb{D}^n [y(x)] \equiv \frac{d^n}{dx^n} [y(x)] \equiv \frac{d^n y(x)}{dx^n} \equiv y^{(n)}(x) \end{aligned}$$

6. Igualmente, cualquier ecuación diferencial lineal es un ejemplo de operador lineal, esto es

$$y'' - 3y' + 2y = (\mathbb{D}^2 - 3\mathbb{D} + 2)y(x)$$

es claro que si $y(x) = \alpha f(x) + g(x)$ la linealidad es evidente

$$\begin{aligned} (\alpha f(x) + g(x))'' - 3(\alpha f(x) + g(x))' + 2(\alpha f(x) + g(x)) &= \alpha(f'' - 3f' + 2f) + g'' - 3g' + 2g \\ &\quad \updownarrow \\ (\mathbb{D}^2 - 3\mathbb{D} + 2)(\alpha f(x) + g(x)) &= (\mathbb{D}^2 - 3\mathbb{D} + 2)\alpha f(x) + (\mathbb{D}^2 - 3\mathbb{D} + 2)g(x) . \end{aligned}$$

7. La integral también es un operador lineal

$$g(x) = \int_a^x f(t)dt \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{T}\{f(t)\}$$

8. Otro ejemplo típico son los operadores de transformaciones integrales

$$F(s) = \int_a^b \mathcal{K}(s, t) f(t)dt \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{T}\{f(t)\}$$

donde $\mathcal{K}(s, t)$ es una función conocida de s y t , denominada el *núcleo* de la transformación. Si a y b son finitos la transformación se dirá finita, de lo contrario infinita.

Así, si $f(t) = \alpha f_1(t) + f_2(t)$ con $f_1(t)$ y $f_2(t) \in C_{[a,b]}^\infty$ es obvio que

$$F(s) = \int_a^b \mathcal{K}(s, t) [\alpha f_1(t) + f_2(t)] dt \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{T}\{[\alpha f_1(t) + f_2(t)]\}$$

$$F(s) = \alpha \int_a^b \mathcal{K}(s, t) f_1(t)dt + \int_a^b \mathcal{K}(s, t) f_2(t)dt$$

↓

$$F(s) = \alpha F(s_1) + F(s_2) \Leftrightarrow \mathbb{T}\{[\alpha f_1(t) + f_2(t)]\} = \alpha \mathbb{T}\{f_1(t)\} + \mathbb{T}\{f_2(t)\}$$

Dependiendo de la selección del núcleo y los límites tendremos distintas transformaciones integrales. En Física las más comunes son:

| Nombre | $F(s) = \mathbb{T}\{f(t)\}$ | $f(t) = \mathbb{T}^{-1}\{F(s)\}$ |
|----------------------------|---|--|
| Laplace | $F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$ | $f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{st} F(s)ds$ |
| Fourier de senos y cosenos | $F(s) = \int_0^\infty \frac{\text{sen}(st)}{\cos(st)} f(t)dt$ | $f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\text{sen}(st)}{\cos(st)} F(s)ds$ |
| Fourier compleja | $F(s) = \int_{-\infty}^\infty e^{ist} f(t)dt$ | $f(t) = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^\infty e^{-ist} F(s)ds$ |
| Hankel | $F(s) = \int_0^\infty t J_n(st) f(t)dt$ | $f(t) = \int_0^\infty s J_n(ts) F(s)ds$ |
| Mellin | $F(s) = \int_0^\infty t^{s-1} f(t)dt$ | $f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} s^{-t} F(s)ds$ |

4.1.1. Espacio Vectorial de Operadores Lineales

Un conjunto de operadores lineales $\{\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C} \dots\} : \mathbf{V}_1 \rightarrow \mathbf{V}_2$ puede constituir un espacio vectorial lineal si se dispone entre ellos de la operación suma y la multiplicación por un escalar. Así, claramente, dado $\{\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C} \dots\}$, y definida

$$(\chi \mathbb{A} + \mathbb{B}) |v\rangle \equiv \chi \mathbb{A} |v\rangle + \mathbb{B} |v\rangle \quad / \quad \begin{cases} \mathbb{A} [\alpha |v_1\rangle + \beta |v_2\rangle] = \alpha \mathbb{A} |v_1\rangle + \beta \mathbb{A} |v_2\rangle \\ \mathbb{B} [\alpha |v_1\rangle + \beta |v_2\rangle] = \alpha \mathbb{B} |v_1\rangle + \beta \mathbb{B} |v_2\rangle \end{cases}$$

es directo comprobar que

$$\begin{aligned}
 (\chi\mathbb{A} + \mathbb{B})[\alpha|v_1\rangle + \beta|v_2\rangle] &= \chi\mathbb{A}[\alpha|v_1\rangle + \beta|v_2\rangle] + \mathbb{B}[\alpha|v_1\rangle + \beta|v_2\rangle] \\
 &= \chi(\alpha\mathbb{A}|v_1\rangle + \beta\mathbb{A}|v_2\rangle) + \alpha\mathbb{B}|v_1\rangle + \beta\mathbb{B}|v_2\rangle \\
 &= \chi(\alpha\mathbb{A}|v_1\rangle + \alpha\mathbb{B}|v_1\rangle) + \beta\mathbb{A}|v_2\rangle + \beta\mathbb{B}|v_2\rangle \\
 &\Downarrow \\
 (\chi\mathbb{A} + \mathbb{B})[\alpha|v_1\rangle + \beta|v_2\rangle] &= \chi\mathbb{A}[\alpha|v_1\rangle + \beta|v_2\rangle] + \mathbb{B}[\alpha|v_1\rangle + \beta|v_2\rangle]
 \end{aligned}$$

Igualmente, se cumple que

$$[(\mathbb{A} + \mathbb{B}) + \mathbb{C}] = [\mathbb{A} + (\mathbb{B} + \mathbb{C})]$$

con $\mathbb{A} + \mathbb{B} + \mathbb{C}$ lineales en \mathbf{V}

$$\begin{aligned}
 [(\mathbb{A} + \mathbb{B}) + \mathbb{C}]|v\rangle &= (\mathbb{A} + \mathbb{B})|v\rangle + \mathbb{C}|v\rangle \quad \forall |v\rangle \in \mathbf{V}_1 \\
 &= \mathbb{A}|v\rangle + \mathbb{B}|v\rangle + \mathbb{C}|v\rangle \\
 &= \mathbb{A}|v\rangle + (\mathbb{B} + \mathbb{C})|v\rangle \\
 &= [\mathbb{A} + (\mathbb{B} + \mathbb{C})]|v\rangle,
 \end{aligned}$$

del mismo modo se puede comprobar fácilmente

$$\mathbb{A} + \mathbb{B} = \mathbb{B} + \mathbb{A}$$

Ahora bien, si definimos la transformación cero de $\mathbf{V}_1 \rightarrow \mathbf{V}_2$ tal que

$$|0\rangle = \mathbb{O}|v\rangle \quad \forall |v\rangle \in \mathbf{V}_1$$

se le asigna a el vector $|0\rangle \in \mathbf{V}_2 \quad \forall |v\rangle \in \mathbf{V}_1$, entonces el operador lineal \mathbb{O} será el elemento neutro respecto a la suma de operadores. Finalmente, el elemento simétrico queda definido por

$$(-\mathbb{A})|v\rangle = -\mathbb{A}|v\rangle \Rightarrow (\mathbb{A} - \mathbb{A})|v\rangle = \mathbb{O}|v\rangle = |0\rangle$$

Con ello queda demostrado que los operadores lineales forman un espacio vectorial el cual de ahora en adelante denominaremos $\mathcal{L}(\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2)$.

4.1.2. Composición de Operadores Lineales

El producto o composición de dos operadores lineales, \mathbb{A} y \mathbb{B} se denotará $\mathbb{A}\mathbb{B}$ y significará que primero se aplica \mathbb{B} y al resultado se aplica \mathbb{A} . Esto es

$$\mathbb{A}\mathbb{B}|v\rangle = \mathbb{A}(\mathbb{B}|v\rangle) = \mathbb{A}|\tilde{v}\rangle = |\tilde{v}'\rangle$$

La composición de funciones cumple con las siguientes propiedades

$$\begin{aligned}
 (\mathbb{A}\mathbb{B})\mathbb{C} &= \mathbb{A}(\mathbb{B}\mathbb{C}); & \alpha(\mathbb{A}\mathbb{B}) &= (\alpha\mathbb{A})\mathbb{B} = \mathbb{A}(\alpha\mathbb{B}); \\
 (\mathbb{A}_1 + \mathbb{A}_2)\mathbb{B} &= \mathbb{A}_1\mathbb{B} + \mathbb{A}_2\mathbb{B}; & \mathbb{A}(\mathbb{B}_1 + \mathbb{B}_2) &= \mathbb{A}\mathbb{B}_1 + \mathbb{A}\mathbb{B}_2
 \end{aligned}$$

Es decir, que la composición de operadores es asociativa y distributiva a la suma y que conmuta respecto a la multiplicación por escalares.

Por otro lado si \mathbb{I} es el operador Identidad

$$\mathbb{I}|v\rangle = |v\rangle \Rightarrow \mathbb{A}\mathbb{I} = \mathbb{I}\mathbb{A} = \mathbb{A}.$$

En general $\mathbb{A}\mathbb{B} \neq \mathbb{B}\mathbb{A}$, por lo tanto podemos construir el conmutador de estos operadores como

$$[\mathbb{A}, \mathbb{B}] = \mathbb{A}\mathbb{B} - \mathbb{B}\mathbb{A} \quad / \quad [\mathbb{A}\mathbb{B} - \mathbb{B}\mathbb{A}] |v\rangle = \mathbb{A}\mathbb{B} |v\rangle - \mathbb{B}\mathbb{A} |v\rangle$$

Es inmediato comprobar algunas de las propiedades más útiles de los conmutadores:

$$\begin{aligned} [\mathbb{A}, \mathbb{B}] &= -[\mathbb{B}, \mathbb{A}] \\ [\mathbb{A}, (\mathbb{B} + \mathbb{C})] &= [\mathbb{A}, \mathbb{B}] + [\mathbb{A}, \mathbb{C}] \\ [\mathbb{A}, \mathbb{B}\mathbb{C}] &= [\mathbb{A}, \mathbb{B}]\mathbb{C} + \mathbb{B}[\mathbb{A}, \mathbb{C}] \\ 0 &= [\mathbb{A}, [\mathbb{B}, \mathbb{C}]] + [\mathbb{B}, [\mathbb{C}, \mathbb{A}]] + [\mathbb{C}, [\mathbb{A}, \mathbb{B}]] \end{aligned}$$

Dados dos vectores $|v_1\rangle$ y $|v_2\rangle$ definiremos como el elemento de matriz del operador \mathbb{A} al producto interno de dos vectores

$$\langle v_2 | (\mathbb{A} |v_1\rangle) \equiv A_{(|v_1\rangle, |v_2\rangle)}$$

es claro que $A_{(|v_1\rangle, |v_2\rangle)}$ será en general un número complejo, pero esto lo veremos detalladamente en la sección 4.2, más adelante.

Ejemplos

1. **Potencias de Operadores:** Uno de los ejemplos más útiles en la composición de operadores lo constituyen las potencias de los operadores, las cuales provienen de la aplicación consecutiva de un mismo operador,

$$\mathbb{A}^0 = \mathbb{I}; \quad \mathbb{A}^1 = \mathbb{A}; \quad \mathbb{A}^2 = \mathbb{A}\mathbb{A}; \quad \mathbb{A}^3 = \mathbb{A}^2\mathbb{A} = \mathbb{A}\mathbb{A}\mathbb{A}; \quad \dots$$

Es claro que las potencias de operadores cumplen las propiedades estándares de las potencias de números

$$\mathbb{A}^{n+m} = \mathbb{A}^n \mathbb{A}^m; \quad (\mathbb{A}^n)^m = \mathbb{A}^{nm}$$

Llamaremos *operadores nilpotentes de grado n* a los operadores $\mathbb{A}^n \neq 0$ del tipo $\mathbb{A}^n |v\rangle = |0\rangle \quad \forall |v\rangle \in \mathbf{V}_1$ y $|0\rangle \in \mathbf{V}_2$. Es decir, un operador que lleva cualquier vector $|v\rangle$ al elemento neutro de \mathbf{V}_2 . El ejemplo más notorio es el operador diferencial

$$\mathbb{D}^n |P^{n-1}\rangle = |0\rangle \Leftrightarrow \frac{d^n}{dx^n} P_{n-1}(x) = \frac{d^n}{dx^n} [a_i x^i] = 0$$

con $|P^{n-1}\rangle$ perteneciente al espacio de polinomios de grado $n - 1$.

2. **Operador Ecuaciones Diferenciales.** Si consideramos el espacio de funciones $f(x) \in \mathcal{C}_{[a,b]}^\infty$ podemos construir un operador diferencial

$$[a_0 + a_1 \mathbb{D} + a_2 \mathbb{D}^2 + \dots + a_n \mathbb{D}^n] |f\rangle \Rightarrow \left(a_0 + a_1 \frac{d}{dx} + a_2 \frac{d^2}{dx^2} + \dots + a_n \frac{d^n}{dx^n} \right) f(x)$$

con $\{a_0, a_1, a_2, \dots, a_n\}$ coeficientes constantes. De este modo

$$(\mathbb{D}^2 - 3\mathbb{D} + 2) y = (\mathbb{D} - 1)(\mathbb{D} - 2) y \Rightarrow \left(\frac{d^2}{dx^2} - 3 \frac{d}{dx} + 2 \right) y(x) = y'' - 3y' + 2y$$

con $r = 1$ y $r = 2$ las raíces del polinomio característico.

4.1.3. Funciones de Operadores

Basándonos en el primero de los ejemplos anteriores se puede construir un “polinomio” en potencias de los operadores:

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n = a_ix^i$$

$$P_n(\mathbb{A})|v\rangle = [a_0 + a_1\mathbb{A} + a_2\mathbb{A}^2 + \cdots + a_n\mathbb{A}^n]|v\rangle = [a_i\mathbb{A}^i]|v\rangle \quad \forall |v\rangle \in \mathbf{V}_1$$

Lo anterior nos permite extender la idea de operadores a funciones de operadores, es decir, si nos saltamos todos los detalles de convergencia de la serie anterior, los cuales dependerán de los autovalores de \mathbb{A} y de su radio de convergencia; entonces, así como podemos expresar cualquier función $F(z)$ como una serie de potencias de z en un cierto dominio, podremos expresar la función de un operador, $F(\mathbb{A})$, como una serie de potencias del operador \mathbb{A} , esto es

$$F(z) = a_ix^i \quad \Leftrightarrow \quad F(\mathbb{A})|v\rangle = [a_i\mathbb{A}^i]|v\rangle$$

Por ejemplo, podemos expresar

$$e^{\mathbb{A}}|v\rangle = \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbb{A}^n}{n!} \right] |v\rangle = \left[\mathbb{I} + \mathbb{A} + \frac{\mathbb{A}^2}{2!} + \cdots + \frac{\mathbb{A}^n}{n!} \cdots \right] |v\rangle$$

En este caso hay que hacer una acotación, dado que, en general, $[\mathbb{A}, \mathbb{B}] \neq 0 \Rightarrow e^{\mathbb{A}}e^{\mathbb{B}} \neq e^{\mathbb{B}}e^{\mathbb{A}} \neq e^{\mathbb{A}+\mathbb{B}}$. Esta afirmación se corrobora de manera inmediata al desarrollar las exponenciales

$$e^{\mathbb{A}}e^{\mathbb{B}}|v\rangle = \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbb{A}^n}{n!} \right] \left[\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\mathbb{B}^m}{m!} \right] |v\rangle = \left[\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\mathbb{A}^n \mathbb{B}^m}{n! m!} \right] |v\rangle$$

$$e^{\mathbb{B}}e^{\mathbb{A}}|v\rangle = \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbb{B}^n}{n!} \right] \left[\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\mathbb{A}^m}{m!} \right] |v\rangle = \left[\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\mathbb{B}^n \mathbb{A}^m}{n! m!} \right] |v\rangle$$

$$e^{\mathbb{A}+\mathbb{B}}|v\rangle = \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mathbb{A} + \mathbb{B})^n}{n!} \right] |v\rangle$$

sólo en el caso que $[\mathbb{A}, \mathbb{B}] = 0 \Rightarrow e^{\mathbb{A}}e^{\mathbb{B}} = e^{\mathbb{B}}e^{\mathbb{A}} = e^{\mathbb{A}+\mathbb{B}}$. La demostración es inmediata pero requiere expandir y reorganizar las sumatorias arriba expuestas. En general más adelante, en la sección 4.4.2 demostraremos con detalle la relación de Glauber:

$$e^{\mathbb{A}}e^{\mathbb{B}} = e^{\mathbb{A}+\mathbb{B}}e^{\frac{1}{2}[\mathbb{A}, \mathbb{B}]}$$

4.1.4. Proyectores

La notación de Dirac se hace particularmente conveniente para representar proyectores. Hasta ahora, hemos relacionado un funcional lineal, un *bra* $\langle w|$ del espacio dual \mathbf{V}^* , con un vector *ket* $|v\rangle$ del espacio vectorial \mathbf{V} a través de su producto interno $\langle w|v\rangle \in \mathfrak{C}$, el cual es, en general, un número complejo. Ahora podemos escribir esta relación entre vectores y formas diferenciales de una manera diferente: la relación entre $\langle w|$ y $|v\rangle$ un *ket* $|\Psi\rangle$ o un *bra* $\langle \Phi|$ arbitrarios puede ser

$$|v\rangle \langle w| \Rightarrow \begin{cases} |v\rangle \langle w| \Psi\rangle \\ \langle \Phi|v\rangle \langle w| \end{cases}$$

La primera será la multiplicación del vector $|v\rangle$ por el número complejo $\langle w| \Psi\rangle$, mientras que la segunda relación será la multiplicación de la forma $\langle w|$ por el complejo $\langle \Phi| v\rangle$. Es imperioso señalar que el orden en la escritura de los vectores y formas es crítico, sólo los números complejos λ se pueden mover con impunidad a través de estas relaciones

$$\lambda |v\rangle = |\lambda v\rangle = |v\rangle \lambda, \quad \lambda \langle w| = \langle \lambda w| = \langle w| \lambda$$

$$\langle w| \lambda |v\rangle = \lambda \langle w| v\rangle = \langle w| v\rangle \lambda \quad \text{y} \quad \mathbb{A} |\lambda v\rangle = \mathbb{A} \lambda |v\rangle = \lambda \mathbb{A} |v\rangle .$$

Por lo tanto, dado un vector $|v\rangle$, podemos construir un proyector $\mathbb{P}_{|v\rangle}$ a lo largo del vector $|v\rangle$

$$\mathbb{P}_{|v\rangle} \equiv |v\rangle \langle v| , \quad \text{con} \quad \langle v| v\rangle = 1$$

siempre y cuando este operador lineal cumpla

$$\mathbb{P}_{|v\rangle} [\alpha |z_1\rangle + \beta |z_2\rangle] = \alpha \mathbb{P}_{|v\rangle} |z_1\rangle + \beta \mathbb{P}_{|v\rangle} |z_2\rangle$$

$$|v\rangle \langle v| [\alpha |z_1\rangle + \beta |z_2\rangle] = |v\rangle \langle v| \alpha |z_1\rangle + |v\rangle \langle v| \beta |z_2\rangle = \alpha |v\rangle \langle v| z_1\rangle + \beta |v\rangle \langle v| z_2\rangle$$

$$\mathbb{P}_{|v\rangle}^2 = \mathbb{P}_{|v\rangle} \quad \iff \quad (|v\rangle \langle v|) (|v\rangle \langle v|) = |v\rangle \langle v|$$

$$\mathbb{P}_{|v\rangle} \mathbb{P}_{|v\rangle} |z\rangle = (|v\rangle \langle v|) (|v\rangle \langle v|) |z\rangle = |v\rangle \underbrace{\langle v| v\rangle}_{1} \langle v| z\rangle = |v\rangle \langle v| z\rangle = \mathbb{P}_{|v\rangle} |z\rangle .$$

Así, el operador $\mathbb{P}_{|v\rangle}$ actuando sobre el vector $|\Psi\rangle$ representará la proyección de $|\Psi\rangle$ a lo largo de $|v\rangle$

$$\mathbb{P}_{|v\rangle} |\Psi\rangle = |v\rangle \langle v| \Psi\rangle \equiv \langle v| \Psi\rangle |v\rangle .$$

Es inmediato construir un proyector de un vector sobre un subespacio \mathbf{S}_q . Sea $\{|\hat{e}_1\rangle, |\hat{e}_2\rangle, |\hat{e}_3\rangle, \dots, |\hat{e}_q\rangle\}$ un conjunto ortonormal de vectores que expande \mathbf{S}_q . Por lo tanto, definiremos el proyector \mathbb{P}_q al proyector sobre el subespacio \mathbf{S}_q de la forma

$$\mathbb{P}_q = |\hat{e}_i\rangle \langle \hat{e}^i|_q$$

es claro que $\mathbb{P}_q^2 = \mathbb{P}_q$:

$$\mathbb{P}_q^2 |v\rangle = \mathbb{P}_q \mathbb{P}_q |v\rangle \Rightarrow \mathbb{P}_q^2 |v\rangle = (|\hat{e}_i\rangle \langle \hat{e}^i|_q) (|\hat{e}_j\rangle \langle \hat{e}^j|_q) |v\rangle = |\hat{e}_i\rangle \underbrace{\langle \hat{e}^i|_q \hat{e}^j\rangle}_{\delta_j^i} \langle \hat{e}^j| v\rangle$$

$$\mathbb{P}_q^2 |v\rangle = |\hat{e}_j\rangle \langle \hat{e}^j| v\rangle \equiv \mathbb{P}_q |v\rangle \quad \forall \quad |v\rangle \in \mathbf{V} .$$

4.1.5. Espacio Nulo e Imagen

El conjunto de todos los $|v\rangle \in \mathbf{V}_1 / \mathbb{A} |v\rangle = |0\rangle$, se denomina espacio nulo, núcleo o *kernel* (núcleo en alemán) de la transformación \mathbb{A} y lo denotaremos como $\aleph(\mathbb{A})$, en símbolos diremos que

$$\aleph(\mathbb{A}) = \{|v\rangle \mid |v\rangle \in \mathbf{V}_1 \quad \wedge \quad \mathbb{A} |v\rangle = |0\rangle\} .$$

Adicionalmente, $\aleph(\mathbb{A}) \subset \mathbf{V}_1$ será un subespacio de \mathbf{V}_1 . La prueba de esta afirmación es inmediata. Dados $|v_1\rangle, |v_2\rangle \in \aleph(\mathbb{A})$, con \mathbb{A} un operador lineal, es claro que

$$\left. \begin{array}{l} \mathbb{A} |v_1\rangle = |0\rangle \\ \mathbb{A} |v_2\rangle = |0\rangle \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha_1 \mathbb{A} |v_1\rangle + \alpha_2 \mathbb{A} |v_2\rangle = |0\rangle = \mathbb{A} (\alpha_1 |v_1\rangle + \alpha_2 |v_2\rangle) ,$$

por la misma razón se tiene que el elemento neutro contenido en $\aleph(\mathbb{A})$, esto es

$$\mathbb{A}| \alpha v \rangle = |0\rangle \quad \forall |v\rangle \in \mathbf{V}_1 \quad \wedge \quad \forall \alpha \quad \therefore \quad \mathbb{A}|0\rangle = |0\rangle \quad \text{si} \quad \alpha = 0$$

por lo tanto, queda demostrado que $\aleph(\mathbb{A})$ es un subespacio de \mathbf{V}_1 .

Definiremos imagen (rango o recorrido) de \mathbb{A} , y la denotaremos como

$$\aleph(\mathbb{A}) = \{|v'\rangle \mid |v'\rangle \in \mathbf{V}_2 \quad \wedge \quad \mathbb{A}|v\rangle = |v'\rangle\}$$

igualmente $\aleph(\mathbb{A}) \subset \mathbf{V}_2$ también será un subespacio de \mathbf{V}_2 ya que si $|v\rangle = \alpha_1 |v_1\rangle + \alpha_2 |v_2\rangle$ y dado que \mathbb{A} es un operador lineal, se cumple que

$$\mathbb{A} \left(\underbrace{\alpha_1 |v_1\rangle + \alpha_2 |v_2\rangle}_{|v\rangle} \right) = \alpha_1 \underbrace{\mathbb{A}|v_1\rangle}_{|v'_1\rangle} + \alpha_2 \underbrace{\mathbb{A}|v_2\rangle}_{|v'_2\rangle} = \underbrace{\alpha_1 |v'_1\rangle + \alpha_2 |v'_2\rangle}_{|v'\rangle}.$$

Es claro que si \mathbf{V} es de dimensión finita, $\aleph\{\mathbf{V}\} = n$ también será de dimensión finita n y tendremos que

$$\dim[\aleph(\mathbb{A})] + \dim[\aleph(\mathbb{A})] = \dim[\mathbf{V}]$$

vale decir, que la dimensión del núcleo más la dimensión del recorrido o imagen de una transformación lineal es igual a la dimensión del dominio.

Para demostrar esta afirmación supongamos que $\dim[\mathbf{V}] = n$ y que $\{|e_1\rangle, |e_2\rangle, |e_3\rangle \dots |e_k\rangle\} \in \mathbf{V}$ es una base de $\aleph(\mathbb{A})$, donde $k = \dim[\aleph(\mathbb{A})] \leq n$.

Como $\{|e_1\rangle, |e_2\rangle, |e_3\rangle \dots |e_k\rangle\} \in \mathbf{V}$ estos elementos forman base, y por lo tanto, son linealmente independientes, necesariamente ellos formarán parte de una base mayor de \mathbf{V} .

Esto es: $\{|e_1\rangle, |e_2\rangle, |e_3\rangle, \dots, |e_k\rangle, |e_{k+1}\rangle, \dots, |e_{k+r-1}\rangle, |e_{k+r}\rangle\} \in \mathbf{V}$ será una base de \mathbf{V} donde $k+r = n$. El esquema de la demostración será:

- primero probaremos que $\{\aleph\{|e_{k+1}\rangle\}, \aleph\{|e_{k+2}\rangle\}, \dots, \aleph\{|e_{k+r-1}\rangle\}, \aleph\{|e_{k+r}\rangle\}\}$ forman una base para $\aleph\{\mathbf{V}\}$
- luego demostraremos que $\dim[\aleph\{\mathbf{V}\}] = r$ y como hemos supuesto que $k+r = n$ habremos demostrado la afirmación anterior.

Si los r elementos $\{\aleph\{|e_{k+1}\rangle\}, \aleph\{|e_{k+2}\rangle\}, \dots, \aleph\{|e_{k+r-1}\rangle\}, \aleph\{|e_{k+r}\rangle\}\}$ expanden $\aleph\{\mathbf{V}\}$ entonces cualquier elemento

$$|w\rangle \in \aleph\{\mathbf{V}\} \ni |w\rangle = \mathbb{A}|v\rangle = C^i |\mathbb{A}e_i\rangle, \quad \text{con} \quad |\mathbb{A}e_i\rangle = \mathbb{A}|e_i\rangle$$

Ahora bien, analicemos con cuidado los límites de la suma implícita del índice $i = 1, 2, \dots, k+r$

$$|w\rangle = C^i |\mathbb{A}e_i\rangle = \underbrace{C^1 |\mathbb{A}e_1\rangle + C^2 |\mathbb{A}e_2\rangle + \dots + C^k |\mathbb{A}e_k\rangle}_{=|0\rangle \quad \text{ya que} \quad \mathbb{A}|e_1\rangle = \mathbb{A}|e_2\rangle = \mathbb{A}|e_3\rangle \dots = \mathbb{A}|e_k\rangle = |0\rangle} + C^{k+1} |\mathbb{A}e_{k+1}\rangle + \dots + C^{k+r} |\mathbb{A}e_{k+r}\rangle$$

Por lo tanto $\{\aleph\{|e_{k+1}\rangle\}, \aleph\{|e_{k+2}\rangle\}, \dots, \aleph\{|e_{k+r-1}\rangle\}, \aleph\{|e_{k+r}\rangle\}\}$ expanden $\aleph\{\mathbf{V}\}$. Ahora bien, para demostrar que son base, demostraremos que son linealmente independientes, para ello supondremos que

$$\exists \quad \{C^{k+1}, C^{k+2}, \dots, C^{k+r}\} / C^i |\mathbb{A}e_i\rangle = 0 \quad \text{con} \quad i = k+1, k+2, \dots, k+r$$

y tenemos que demostrar que $C^{k+1} = C^{k+2} = \dots = C^{k+r} = 0$. Entonces

$$C^i |\mathbb{A}e_i\rangle = C^i \mathbb{A}|e_i\rangle = \mathbb{A}(C^i |e_i\rangle) = 0 \quad \text{con} \quad i = k+1, k+2, \dots, k+r$$

por lo tanto el elemento $|v\rangle = C^i |e_i\rangle \in \aleph(\mathbb{A})$ con $i = k+1, k+2, \dots, k+r$. Con lo cual, dado que $\forall |v\rangle \in \aleph(\mathbb{A}), |v\rangle = C^i |e_i\rangle$ con $i = 1, 2, \dots, r$, entonces se puede hacer la siguiente resta

$$|v\rangle - |v\rangle = \sum_{i=1}^k C^i |e_i\rangle - \sum_{i=k+1}^{k+r} C^i |e_i\rangle$$

y como los $\{|e_1\rangle, |e_2\rangle, |e_3\rangle, \dots, |e_k\rangle, |e_{k+1}\rangle, \dots, |e_{k+r-1}\rangle, |e_{k+r}\rangle\}$ son una base de \mathbf{V} entonces las $C^{k+1} = C^{k+2} = \dots = C^{k+r} = 0$.

Ejemplos

1. **Transformaciones Identidad:** Sea $\mathbb{I} : \mathbf{V}_1 \rightarrow \mathbf{V}_2$, la transformación identidad,

$$\forall |v\rangle \in \mathbf{V}_1 / \mathbb{I}|v\rangle = |v\rangle \Rightarrow \aleph(\mathbb{I}) = \{|0\rangle\} \subset \mathbf{V}_1 \quad \wedge \quad \Im(\mathbb{I}) \equiv \mathbf{V}_1$$

2. **Sistemas de ecuaciones lineales:** En \mathbf{V}^n los sistemas de ecuaciones lineales representan el espacio nulo, $\aleph(\mathbb{A})$, para vectores de \mathbf{V}^n

$$\mathbb{A}|x\rangle = |0\rangle \Leftrightarrow \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & & \cdots \\ \vdots & & \ddots & \\ A_{n1} & A_{n2} & & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow A_j^i x_i = 0$$

con j ecuaciones ($j = 1, 2, \dots, n$). Recordemos que estamos utilizando la convención de Einstein para suma de índices. Esto es $\sum_{i=1}^n A_j^i x_i = 0$.

3. **Ecuaciones diferenciales ordinarias:** Sea $\mathcal{C}_{[-\infty, \infty]}^2$ el espacio vectorial de todas las funciones continuas doblemente diferenciables. Definimos $\mathbb{A} : \mathcal{C}_{[-\infty, \infty]}^2 \rightarrow \mathcal{C}_{[-\infty, \infty]}$ como la transformación lineal $(\mathbb{D}^2 - 1)$ tal que para todas las $y(x) \in \mathcal{C}_{[-\infty, \infty]}^2$ se cumple

$$\mathbb{A}|x\rangle = |0\rangle \Leftrightarrow (\mathbb{D}^2 - 1)y(x) = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{d^2}{dx^2} - 1\right)y(x) = y'' - y = 0$$

por lo tanto, el núcleo o espacio nulo de \mathbb{A} , $\aleph(\mathbb{A})$, lo constituyen el conjunto de soluciones para la mencionada ecuación diferencial. Por lo tanto, el problema de encontrar las soluciones de la ecuación diferencial es equivalente a encontrar los elementos del núcleo de \mathbb{A} .

4.1.6. Operadores Biyectivos e Inversos

Se dice que $\mathbb{A} : \mathbf{V}_1 \rightarrow \mathbf{V}_2$ es biyectivo (uno a uno o biunívoco) si dados $|v_1\rangle, |v_2\rangle \in \mathbf{V}_1, \wedge |v'\rangle \in \mathbf{V}_2$, se tiene que

$$\mathbb{A}|v_1\rangle = |v'\rangle \wedge \mathbb{A}|v_2\rangle = |v'\rangle \Rightarrow |v_1\rangle = |v_2\rangle$$

es decir, será biyectiva si \mathbb{A} transforma vectores distintos de \mathbf{V}_1 en vectores distintos de \mathbf{V}_2 . Más aún, se puede afirmar que una transformación lineal \mathbb{A} , será biyectiva si y sólo si $\aleph(\mathbb{A}) = \{|0\rangle\}$. Vale decir, si el subespacio nulo está constituido, únicamente por el elemento neutro del espacio vectorial. La demostración

es sencilla. Supongamos que \mathbb{A} es biyectiva y que $\mathbb{A}|v\rangle = |0\rangle$, entonces $|v\rangle = |0\rangle$, es decir, $\mathbb{A}|0\rangle = |0\rangle$, por consiguiente $\aleph(\mathbb{A}) = \{|0\rangle\}$. Recíprocamente, si

$$\left. \begin{array}{l} \aleph(\mathbb{A}) = \{|0\rangle\} \\ \wedge \\ \mathbb{A}|v_1\rangle = \mathbb{A}|v_2\rangle \end{array} \right\} \Rightarrow \mathbb{A}|v_1\rangle - \mathbb{A}|v_2\rangle = |0\rangle = \mathbb{A} \left(\underbrace{|v_1\rangle - |v_2\rangle}_{|v_1\rangle - |v_2\rangle = 0} \right) \Rightarrow |v_1\rangle = |v_2\rangle$$

La importancia de las transformaciones lineales uno a uno o biyectivas reside en la posibilidad de definir inversa, debido a que siempre existe en \mathbf{V}_2 un vector $|v'\rangle$ asociado a través de \mathbb{A} con un vector $|v\rangle \in \mathbf{V}_1$. Diremos que $\mathbb{A}^{-1}: \mathbf{V}_2 \rightarrow \mathbf{V}_1$ es el inverso de \mathbb{A} , si $\mathbb{A}^{-1}\mathbb{A} = \mathbb{I} = \mathbb{A}\mathbb{A}^{-1}$.

Habría que hacer un par de comentarios al respecto. El primero es que, tal y como hemos enfatizado arriba, en general, los operadores no conmutan entre si, y los inversos no son una excepción. Es decir, deberían existir (y de hecho existen) inversas por la izquierda $\mathbb{A}^{-1}\mathbb{A} = \mathbb{I}$ e inversas por la derecha $\mathbb{A}\mathbb{A}^{-1} = \mathbb{I}$. Por simplicidad e importancia en Física obviaremos esta dicotomía y supondremos que $\mathbb{A}^{-1}\mathbb{A} = \mathbb{I} = \mathbb{A}\mathbb{A}^{-1}$. El segundo comentario tiene que ver con la existencia y unicidad del inverso de un operador lineal. Algunos operadores tienen inverso, otros no, pero aquellos quienes tienen inverso, ese inverso es único. Veamos, supongamos que

$$\left. \begin{array}{l} \mathbb{A}_1^{-1}\mathbb{A}|v\rangle = |v\rangle \\ \wedge \\ \mathbb{A}_2^{-1}\mathbb{A}|v\rangle = |v\rangle \end{array} \right\} \Rightarrow \mathbb{A}_1^{-1}\mathbb{A}|v\rangle - \mathbb{A}_2^{-1}\mathbb{A}|v\rangle = |0\rangle = \underbrace{(\mathbb{A}_1^{-1} - \mathbb{A}_2^{-1})\mathbb{A}|v\rangle}_{\mathbb{A}_1^{-1} = \mathbb{A}_2^{-1}} \Rightarrow \mathbb{A}_1^{-1} = \mathbb{A}_2^{-1}$$

Ahora bien, un operador lineal \mathbb{A} tendrá inverso sí y sólo sí para cada vector $|v'\rangle \in \mathbf{V}_2 \exists |v\rangle \in \mathbf{V}_1 / \mathbb{A}|v\rangle = |v'\rangle$. Es decir, cada vector $|v'\rangle$ está asociado con uno y sólo un vector $|v\rangle$ a través de la transformación lineal \mathbb{A} . Dejaremos sin demostración esta afirmación pero lo importante es recalcar que para que exista inverso la transformación lineal \mathbb{A} , tiene que ser biyectiva y esto implica que se asocia uno y solo un vector de \mathbf{V}_1 con otro de \mathbf{V}_2 .

Todavía podemos añadir algunas demostraciones consecuencias de las afirmaciones anteriores. Sea la transformación lineal $\mathbb{T}: \mathbf{V}_1 \rightarrow \mathbf{V}_2$ y supongamos además que $\mathbb{T} \in \mathcal{L}(\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2)$. Entonces las siguientes afirmaciones son válidas y equivalentes

1. \mathbb{T} es biyectiva en \mathbf{V}_1
2. \mathbb{T} es invertible y su inversa $\mathbb{T}^{-1}: \mathbb{T}\{\mathbf{V}_1\} \rightarrow \mathbf{V}_1$ es lineal
3. $\forall |v\rangle \in \mathbf{V}_1, \mathbb{T}\{|v\rangle\} = |0\rangle \Rightarrow |v\rangle = |0\rangle$ esto es, el espacio nulo $\aleph(\mathbb{T})$ únicamente contiene al elemento neutro de \mathbf{V}_1 .

Si ahora suponemos que \mathbf{V}_1 tiene dimensión finita, digamos $\dim[\mathbf{V}_1] = n$, las siguientes afirmaciones serán válidas y equivalentes

1. \mathbb{T} es biyectiva en \mathbf{V}_1
2. Si $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle, \dots, |u_n\rangle\} \in \mathbf{V}_1$ son linealmente independientes, entonces, $\{\mathbb{T}\{|u_1\rangle\}, \mathbb{T}\{|u_2\rangle\}, \mathbb{T}\{|u_3\rangle\}, \dots, \mathbb{T}\{|u_n\rangle\}\} \in \mathbb{T}\{\mathbf{V}_1\}$ también serán linealmente independientes.
3. $\dim[\mathbb{T}\{\mathbf{V}_1\}] = n$
4. Si $\{|e_1\rangle, |e_2\rangle, |e_3\rangle, \dots, |e_n\rangle\} \in \mathbf{V}_1$ es una base de \mathbf{V}_1 , entonces $\{\mathbb{T}\{|e_1\rangle\}, \mathbb{T}\{|e_2\rangle\}, \mathbb{T}\{|e_3\rangle\}, \dots, \mathbb{T}\{|e_n\rangle\}\} \in \mathbb{T}\{\mathbf{V}_1\}$ es una base de $\mathbb{T}\{\mathbf{V}_1\}$

4.1.7. Operadores Hermíticos Conjugados

Definiremos la acción de un operador \mathbb{A} sobre un *bra* de la forma siguiente

$$\underbrace{(\langle w | \mathbb{A} | v \rangle)}_{\langle w' |} = \langle w | \underbrace{(\mathbb{A} | v \rangle)}_{|v' \rangle}$$

por lo cual, lo que estamos diciendo es que el elemento de matriz para el operador \mathbb{A} es el mismo, y no importa donde opere \mathbb{A} . De esta manera, dado cada vector en \mathbf{V} , tiene asociado un vector en \mathbf{V}^* . Podemos demostrar que \mathbb{A} operando sobre los *bra* es lineal. Esto es dado

$$\begin{aligned} \langle w | &= \lambda_1 \langle z_1 | + \lambda_2 \langle z_2 | \\ (\langle w | \mathbb{A} | v \rangle) &\equiv (\lambda_1 \langle z_1 | + \lambda_2 \langle z_2 | \mathbb{A} | v \rangle) = (\lambda_1 \langle z_1 | + \lambda_2 \langle z_2 |) (\mathbb{A} | v \rangle) = \lambda_1 \langle z_1 | (\mathbb{A} | v \rangle) + \lambda_2 \langle z_2 | (\mathbb{A} | v \rangle) \\ &= \lambda_1 (\langle z_1 | \mathbb{A} | v \rangle) + \lambda_2 (\langle z_2 | \mathbb{A} | v \rangle) \end{aligned}$$

Siguiendo con esta lógica podemos construir la acción del operador hermítico conjugado, \mathbb{A}^\dagger . Para ello recordamos que igual que a cada vector (*ket*) $|v\rangle$ le está asociado una forma lineal (*bra*) $\langle v|$, a cada *ket* transformado $\mathbb{A}|v\rangle = |v'\rangle$ le corresponderá un *bra* transformado $\langle v'| = \langle v| \mathbb{A}^\dagger$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} |v\rangle &\iff \langle v| \\ |v'\rangle = \mathbb{A}|v\rangle &\iff \langle v'| = \langle v| \mathbb{A}^\dagger \end{aligned}$$

ahora bien, si \mathbb{A} es lineal, \mathbb{A}^\dagger también lo será, dado que a un vector $|w\rangle = \lambda_1 |z_1\rangle + \lambda_2 |z_2\rangle$ le corresponde un *bra* $\langle w| = \lambda_1^* \langle z_1| + \lambda_2^* \langle z_2|$ (la correspondencia es antilineal). Por lo tanto, $|w'\rangle = \mathbb{A}|w\rangle = \lambda_1 \mathbb{A}|z_1\rangle + \lambda_2 \mathbb{A}|z_2\rangle$, por ser \mathbb{A} lineal, entonces

$$|w'\rangle \iff \langle w'| \equiv \langle w| \mathbb{A}^\dagger = (\lambda_1^* \langle z_1| + \lambda_2^* \langle z_2|) \mathbb{A}^\dagger \equiv \lambda_1^* \langle z_1'| + \lambda_2^* \langle z_2'| = \lambda_1^* \langle z_1| \mathbb{A}^\dagger + \lambda_2^* \langle z_2| \mathbb{A}^\dagger$$

Es claro que de la definición de producto interno en la notación de Dirac, se desprende

$$\langle x'| y \rangle = \langle y | x' \rangle^* \quad \forall |x'\rangle = \mathbb{A}|x\rangle, |y\rangle \in \mathbf{V} \Rightarrow \langle x| \mathbb{A}^\dagger |y\rangle = \langle y| \mathbb{A} |x\rangle^* \quad \forall |x\rangle, |y\rangle \in \mathbf{V}.$$

Igualmente se pueden deducir las propiedades de los operadores hermíticos conjugados

$$(\mathbb{A}^\dagger)^\dagger = \mathbb{A}; \quad (\lambda \mathbb{A})^\dagger = \lambda^* \mathbb{A}^\dagger; \quad (\mathbb{A} + \mathbb{B})^\dagger = \mathbb{A}^\dagger + \mathbb{B}^\dagger; \quad (\mathbb{A}\mathbb{B})^\dagger = \mathbb{B}^\dagger \mathbb{A}^\dagger$$

Esta última propiedad es fácilmente demostrable y es educativa su demostración. Dado que $|v'\rangle = \mathbb{A}\mathbb{B}|v\rangle$, y además se tiene que

$$\left. \begin{array}{l} |\bar{v}\rangle = \mathbb{B}|v\rangle \\ |v'\rangle = \mathbb{A}|\bar{v}\rangle \end{array} \right\} \Rightarrow \langle v'| = \langle \bar{v}| \mathbb{A}^\dagger = \langle v| \mathbb{B}^\dagger \mathbb{A}^\dagger = \langle v| (\mathbb{A}\mathbb{B})^\dagger$$

A partir de las propiedades anteriores se deriva una más útil relacionada con el conmutador de dos operadores hermíticos

$$[\mathbb{A}, \mathbb{B}]^\dagger = -[\mathbb{A}^\dagger, \mathbb{B}^\dagger] = [\mathbb{B}^\dagger, \mathbb{A}^\dagger]$$

Las conclusiones a las que llegamos son:

Para obtener el hermítico conjugado de una expresión proceda de la siguiente manera:

- Cambie constantes por sus complejas conjugadas $\lambda \rightsquigarrow \lambda^*$

- Cambie los *kets* por sus *bras* asociados y viceversa (*bras* por *kets*): $|v\rangle \Leftrightarrow \langle v|$
- Cambie operadores lineales por sus hermíticos conjugados $\mathbb{A}^\dagger \Leftrightarrow \mathbb{A}$;
- Invierta el orden de los factores

De este modo

$$(|v\rangle \langle w|)^\dagger = |w\rangle \langle v|$$

que se deduce fácilmente de la consecuencia de la definición de producto interno

$$\langle x| \left(\underline{|v\rangle \langle w|} \right)^\dagger |y\rangle = \langle y| (|v\rangle \langle w| |x\rangle)^* = \langle y| |v\rangle^* \langle w| |x\rangle^* = \langle x| \underline{|w\rangle \langle v|} |y\rangle$$

Existe un conjunto de operadores que se denominan hermíticos a secas o autoadjunto. Un operador hermítico (o autoadjunto) será aquel para el cual $\mathbb{A}^\dagger = \mathbb{A}$. Con esto

$$\langle x| \mathbb{A}^\dagger |y\rangle = \langle x| \mathbb{A} |y\rangle = \langle y| \mathbb{A} |x\rangle^*$$

Claramente los proyectores son autoadjuntos por construcción

$$\mathbb{P}_{|v\rangle}^\dagger \equiv (|v\rangle \langle v|)^\dagger = |v\rangle \langle v| .$$

4.1.8. Operadores Unitarios

Por definición, un operador será unitario si su inversa es igual a su adjunto. Esto es

$$\mathbb{U}^{-1} = \mathbb{U}^\dagger \Rightarrow \mathbb{U}^\dagger \mathbb{U} = \mathbb{U} \mathbb{U}^\dagger = \mathbb{I}$$

De estos operadores podemos decir varias cosas

- Las transformaciones unitarias dejan invariantes al producto interno y consecuentemente la norma de vectores. Esto se demuestra fácilmente. Dados dos vectores $|x\rangle, |y\rangle$ sobre los cuales actúa un operador unitario

$$\left. \begin{array}{l} |\tilde{x}\rangle = \mathbb{U} |x\rangle \\ |\tilde{y}\rangle = \mathbb{U} |y\rangle \end{array} \right\} \Rightarrow \langle \tilde{y} | \tilde{x} \rangle = \langle y | \mathbb{U}^\dagger \mathbb{U} |x\rangle = \langle y | x \rangle$$

Es claro que si \mathbb{A} es hermítico, $\mathbb{A}^\dagger = \mathbb{A}$, el operador $\mathbb{T} = e^{i\mathbb{A}}$ es unitario.

$$\mathbb{T} = e^{i\mathbb{A}} \Rightarrow \mathbb{T}^\dagger = e^{-i\mathbb{A}^\dagger} = e^{-i\mathbb{A}} \Rightarrow \mathbb{T} \mathbb{T}^\dagger = e^{i\mathbb{A}} e^{-i\mathbb{A}} = \mathbb{I} = \mathbb{T}^\dagger \mathbb{T} = e^{-i\mathbb{A}} e^{i\mathbb{A}}$$

- El producto de dos operadores unitarios también es unitario. Esto es, si \mathbb{U} y \mathbb{V} son unitarios entonces

$$\begin{aligned} (\mathbb{U}\mathbb{V})^\dagger (\mathbb{U}\mathbb{V}) &= \mathbb{V}^\dagger \underbrace{\mathbb{U}^\dagger \mathbb{U}}_{\mathbb{I}} \mathbb{V} = \mathbb{V}^\dagger \mathbb{V} = \mathbb{I} \\ (\mathbb{U}\mathbb{V}) (\mathbb{U}\mathbb{V})^\dagger &= \mathbb{U} \underbrace{\mathbb{V} \mathbb{V}^\dagger}_{\mathbb{I}} \mathbb{U}^\dagger = \mathbb{U} \mathbb{U}^\dagger = \mathbb{I} \end{aligned}$$

4.1.9. Ejercicios

1. Cuál de las siguientes transformaciones definidas sobre \mathbf{V}^3 son lineales
 - a) $\mathbb{T}|x\rangle = |x\rangle + |a\rangle$ donde $|a\rangle$ es un vector constante diferente de cero.
 - b) $\mathbb{T}|x\rangle = |a\rangle$
 - c) $\mathbb{T}|x\rangle = \langle a|x\rangle|a\rangle$
 - d) $\mathbb{T}|x\rangle = \langle a|x\rangle|x\rangle$
2. Considere las siguientes operaciones en el espacio de los polinomios en x y diga si corresponden a transformaciones lineales
 - a) La multiplicación por x .
 - b) La multiplicación por x^2 .
 - c) La diferenciación.
3. Dado un operador hermítico \mathbb{A} y uno unitario \mathbb{U} , pruebe las siguientes afirmaciones
 - a) En general $(\mathbb{C}^\dagger)^{-1} = (\mathbb{C}^{-1})^\dagger$, con \mathbb{C} un operador genérico.
 - b) $\tilde{\mathbb{A}} = \mathbb{U}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{U}$ es también un operador hermítico
 - c) Si \mathbb{A} es antihermítico entonces $\tilde{\mathbb{A}} = i\mathbb{A}$
 - d) La composición de dos operadores, \mathbb{A} y \mathbb{B} hermíticos será hermítica *si y sólo si* \mathbb{A} y \mathbb{B} conmutan.
 - e) Si \mathbb{S} es un operador real y antisimétrico, pruebe que el operador $\mathbb{A} = (\mathbb{I} - \mathbb{S})(\mathbb{I} + \mathbb{S})^{-1}$ es un operador ortogonal.¹
 - f) Si

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \text{sen}(\theta) \\ -\text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Encuentre la expresión para \mathbb{S} .

4. Un operador, \mathbb{C} , lineal **NO** es hermítico, entonces $(\mathbb{C} + \mathbb{C}^\dagger)$ y $i(\mathbb{C} - \mathbb{C}^\dagger)$, con $i = \sqrt{-1}$, serán hermíticos. Esto, obviamente implica que siempre podremos separar un operador lineal como

$$\mathbb{C} = \frac{1}{2}(\mathbb{C} + \mathbb{C}^\dagger) + \frac{1}{2}(\mathbb{C} - \mathbb{C}^\dagger).$$

donde $(\mathbb{C} + \mathbb{C}^\dagger)$ representa su parte hermítica y $(\mathbb{C} - \mathbb{C}^\dagger)$ su parte antihermítica

5. Suponga que un operador \mathbb{L} puede ser escrito como la composición de otros dos operadores $\mathbb{L} = \mathbb{L}_-\mathbb{L}_+$ con $[\mathbb{L}_-, \mathbb{L}_+] = \mathbb{I}$. Demostrar que

$$\text{Si } \mathbb{L}|x\rangle = \lambda|x\rangle \quad \text{y} \quad |y\rangle = \mathbb{L}_+|x\rangle \quad \text{entonces} \quad \mathbb{L}|y\rangle = (\lambda + 1)|y\rangle$$

y, del mismo modo, demuestre que

$$\text{Si } \mathbb{L}|x\rangle = \lambda|x\rangle \quad \text{y} \quad |z\rangle = \mathbb{L}_-|x\rangle \quad \text{entonces} \quad \mathbb{L}|z\rangle = (\lambda - 1)|z\rangle$$

Por ello es costumbre denominar a \mathbb{L}_+ y \mathbb{L}_- los operadores de “subidas” y de “bajada” respectivamente, ya que ellos construyen otros vectores con autovalores mayores (menores) en una unidad al vector operado.

¹Esto es $\mathbb{A}^T = \mathbb{A}^{-1}$ con \mathbb{A}^T el traspuesto de \mathbb{A} .

4.2. Representación Matricial de Operadores

Supongamos un operador lineal \mathbb{A} en el espacio vectorial de transformaciones lineales $\mathcal{L}(\mathbf{V}, \mathbf{W})$ donde $\dim(\mathbf{V}) = n$ y $\dim(\mathbf{W}) = m$ y sean $\{|e_1\rangle, |e_2\rangle, |e_3\rangle, \dots, |e_n\rangle\}$ y $\{|\tilde{e}_1\rangle, |\tilde{e}_2\rangle, |\tilde{e}_3\rangle, \dots, |\tilde{e}_m\rangle\}$ las bases para \mathbf{V} y \mathbf{W} respectivamente. Entonces $\mathbb{A}|e_j\rangle \in \mathbf{W}$

$$\mathbb{A}|e_i\rangle = A_i^\alpha |\tilde{e}_\alpha\rangle \quad \text{con } i = 1, 2, \dots, n \quad \text{y } \alpha = 1, 2, \dots, m$$

las A_i^α son las componentes de la expansión de $\mathbb{A}|e_i\rangle$ en la base $\{|\tilde{e}_1\rangle, |\tilde{e}_2\rangle, |\tilde{e}_3\rangle, \dots, |\tilde{e}_m\rangle\}$.

Para un vector genérico $|x\rangle$ tendremos que

$$|\tilde{x}\rangle = \mathbb{A}|x\rangle = \tilde{x}^\alpha |\tilde{e}_\alpha\rangle \quad \text{pero, a su vez } |x\rangle = x^i |e_i\rangle$$

con lo cual

$$|\tilde{x}\rangle = \mathbb{A}|x\rangle = \tilde{x}^\alpha |\tilde{e}_\alpha\rangle = \mathbb{A}(x^i |e_i\rangle) = x^i \mathbb{A}|e_i\rangle = x^i A_i^\alpha |\tilde{e}_\alpha\rangle \Rightarrow (\tilde{x}^\alpha - x^i A_i^\alpha) |\tilde{e}_\alpha\rangle = 0$$

para finalmente concluir que

$$\tilde{x}^\alpha = A_i^\alpha x^i$$

Varias cosas se pueden concluir hasta este punto

1. Si acordamos que los índices de arriba indican filas podemos representar los vectores como un arreglo vertical de sus componentes

$$|x\rangle \rightarrow \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}$$

y las cantidades

$$A_i^\alpha \rightarrow \begin{pmatrix} A_1^1 & A_2^1 & \dots & A_j^1 & \dots & A_n^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & & A_j^2 & & A_n^2 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & \\ A_1^\alpha & A_2^\alpha & & A_j^\alpha & & A_n^\alpha \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \\ A_1^m & A_2^m & & A_j^m & & A_n^m \end{pmatrix}$$

de tal modo que se cumpla

$$|\tilde{x}\rangle \rightarrow \begin{pmatrix} \tilde{x}^1 \\ \tilde{x}^2 \\ \vdots \\ \tilde{x}^\alpha \\ \vdots \\ \tilde{x}^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1^1 & A_2^1 & \dots & A_j^1 & \dots & A_n^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & & A_j^2 & & A_n^2 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & \\ A_1^\alpha & A_2^\alpha & & A_j^\alpha & & A_n^\alpha \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \\ A_1^m & A_2^m & & A_j^m & & A_n^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^j \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}$$

Nótese que los índices arriba indican fila y los de abajo columnas. Las cantidades A_j^α es la representación del operador \mathbb{A} en las bases $\{|e_1\rangle, |e_2\rangle, |e_3\rangle, \dots, |e_n\rangle\}$ y $\{|\tilde{e}_1\rangle, |\tilde{e}_2\rangle, |\tilde{e}_3\rangle, \dots, |\tilde{e}_m\rangle\}$ de \mathbf{V} y \mathbf{W}

respectivamente. Es decir una matriz A_j^i es un arreglo de números

$$A_j^i = \begin{pmatrix} A_1^1 & A_2^1 & \cdots & A_n^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & & A_n^2 \\ \vdots & & \ddots & \\ A_1^n & A_2^n & & A_n^n \end{pmatrix}$$

donde el superíndice, i , indica fila

$$\begin{pmatrix} A_1^1 \\ A_1^2 \\ \vdots \\ A_1^n \end{pmatrix}$$

y el subíndice j columna

$$(A_1^1 \ A_2^1 \ \cdots \ A_n^1)$$

2. Diremos que las componentes de los vectores transforman como

$$\tilde{x}^\alpha = A_i^\alpha x^i$$

3. Si suponemos $\{|e_1\rangle, |e_2\rangle, |e_3\rangle, \dots, |e_n\rangle\}$ y $\{|\tilde{e}_1\rangle, |\tilde{e}_2\rangle, |\tilde{e}_3\rangle, \dots, |\tilde{e}_m\rangle\}$ bases ortonormales

$$\tilde{x}^\alpha = \langle \tilde{e}^\alpha | \tilde{x} \rangle = \langle \tilde{e}^\alpha | \mathbb{A} | x \rangle = \langle \tilde{e}^\alpha | \mathbb{A} (x^i |e_i\rangle) = x^i \langle \tilde{e}^\alpha | \mathbb{A} |e_i\rangle$$

queda claro que $A_i^\alpha \equiv \langle \tilde{e}^\alpha | \mathbb{A} |e_i\rangle$ será la representación matricial.

4. Los vectores $|e_k\rangle$ transforman de la siguiente manera

$$\mathbb{A} |e_i\rangle = A_j^i |\tilde{e}_j\rangle$$

donde $\{|e_1\rangle, |e_2\rangle, |e_3\rangle, \dots, |e_n\rangle\}$ y $\{|\tilde{e}_1\rangle, |\tilde{e}_2\rangle, |\tilde{e}_3\rangle, \dots, |\tilde{e}_n\rangle\}$ son las bases para \mathbf{V} y \mathbf{W} respectivamente.

Definitivamente, las matrices son uno de los objetos más útiles de las Matemáticas. Ellas permiten aterrizar conceptos y calcular cantidades. La palabra matriz fue introducida en 1850 por James Joseph Sylvester² y su teoría desarrollada por Hamilton³ y Cayley⁴. Si bien los físicos las consideramos indispensables, no fueron utilizadas de manera intensiva hasta el aparición de la Mecánica Cuántica alrededor de 1925.

²**James Joseph Sylvester** (1814-1897 Londres, Inglaterra) Además de sus aportes con Cayley a la Teoría de las Matrices, descubrió la solución a la ecuación cúbica y fue el primero en utilizar el término discriminante para categorizar cada una de las raíces de la ecuación. Para vivir tuvo que ejercer de abogado durante una década. Por fortuna, otro matemático de la época (Arthur Cayley) frecuentaba los mismos juzgados y tribunales y pudieron interactuar. Por ser judío tuvo cantidad de dificultades para conseguir trabajo en la Academia.

³Sir William Rowan Hamilton (1805 - 1865, Dublin, Irlanda) Sus contribuciones en el campo de la Optica, Dinámica del cuerpo Rígido, Teoría de ecuaciones algebraicas y Teoría de Operadores Lineales.

⁴**Arthur Cayley** (1821, Richmond, 1895, Cambridge, Inglaterra) En sus cerca de 900 trabajos cubrió casi la totalidad de las áreas de las Matemáticas de aquel entonces. Sus mayores cotribuciones se centran el la Teoría de Matrices y la Gemetría no euclideana. No consiguió empleo como Matemático y tuvo que graduarse de abogado y ejercer durante más de 15 años, durante los cuales publicó más de 250 trabajos en Matemáticas.

4.2.1. Bases y Representación Matricial de Operadores

Es importante recalcar que la representación matricial de un operador depende de las bases $\{|e_1\rangle, |e_2\rangle, |e_3\rangle, \dots |e_n\rangle\}$ y $\{|\tilde{e}_1\rangle, |\tilde{e}_2\rangle, |\tilde{e}_3\rangle, \dots |\tilde{e}_m\rangle\}$ de \mathbf{V} y \mathbf{W} respectivamente. Si tenemos otras bases ortonormales para \mathbf{V} y \mathbf{W} vale decir, $\{|\bar{e}_1\rangle, |\bar{e}_2\rangle, |\bar{e}_3\rangle, \dots |\bar{e}_n\rangle\}$ y $\{|\tilde{\bar{e}}_1\rangle, |\tilde{\bar{e}}_2\rangle, |\tilde{\bar{e}}_3\rangle, \dots |\tilde{\bar{e}}_m\rangle\}$ su representación será distinta. Esto es

$$\langle \tilde{e}^\alpha | \mathbb{A} | \bar{e}_j \rangle = \tilde{A}_j^\alpha \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} \tilde{A}_1^1 & \tilde{A}_2^1 & \dots & \tilde{A}_j^1 & \dots & \tilde{A}_n^1 \\ \tilde{A}_1^2 & \tilde{A}_2^2 & & \tilde{A}_j^2 & & \tilde{A}_n^2 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & \\ \tilde{A}_1^\alpha & \tilde{A}_2^\alpha & & \tilde{A}_j^\alpha & & \tilde{A}_n^\alpha \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \\ \tilde{A}_1^m & \tilde{A}_2^m & & \tilde{A}_j^m & & \tilde{A}_n^m \end{pmatrix}$$

Cambiando el orden en el cual se presenta una base, cambia la representación matricial del operador. Los siguientes ejemplos tratarán de ilustrar estas situaciones

Si tenemos un matriz 2×3 , \mathbf{B} de la forma

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

y supongamos las bases canónicas para \mathbf{V}^3 y $\mathbf{V}^2 : \{|e_1\rangle, |e_2\rangle, |e_3\rangle\}$ y $\{|e_1\rangle, |e_2\rangle\}$. Entonces la matriz \mathbf{B} representan la transformación $\mathbb{B} : \mathbf{V}^3 \rightarrow \mathbf{V}^2$ que lleva un vector genérico $|x\rangle = (x_1, x_2, x_3)$ en un vector genérico $|y\rangle = (y_1, y_2)$ tal que

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbb{B}|x\rangle = |y\rangle \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

y esto es

$$\begin{aligned} y_1 &= 3x_1 + x_2 - 2x_3 \\ y_2 &= x_1 + 0x_2 + 4x_3 \end{aligned}$$

La representación matricial dependerá de la base en la cual se exprese. Si suponemos el operador diferencial $\mathbb{D}(\cdot) = \frac{d(\cdot)}{dx}$ y consideramos el dominio un espacio vectorial de los polinomios de grado ≤ 3 , entonces tendremos que: $\mathbb{D}(\cdot) : \mathbf{P}^3 \rightarrow \mathbf{P}^2$, al consideramos las bases $\{1, x, x^2, x^3\}$ y $\{1, x, x^2\}$ de \mathbf{P}^3 y \mathbf{P}^2 respectivamente. Si el producto interno está definido como

$$\langle P^i | P_j \rangle \rightarrow \int_{-1}^1 dx \mathcal{P}_i(x) \mathcal{P}_j(x)$$

La representación matricial del operador diferencial será

$$\langle \tilde{P}^i | \mathbb{D} | P_j \rangle = \langle \tilde{P}^i | \tilde{P}_j \rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

como siempre i indica las filas y j las columnas.

Otra manera de verlo es operar (diferenciar) sobre el $|P_j\rangle \in \mathbf{P}^3$ y expresar ese resultado en la base de \mathbf{P}^2

$$\mathbb{D}|P_j\rangle \Rightarrow \begin{cases} \frac{d(1)}{dx} = 0 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 \\ \frac{d(x)}{dx} = 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 \\ \frac{d(x^2)}{dx} = 2x = 0 \cdot 1 + 2 \cdot x + 0 \cdot x^2 \\ \frac{d(x^3)}{dx} = 3x^2 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 3 \cdot x^2 \end{cases}$$

y los coeficientes de esa expansión serán las columnas de la matriz que los representa.

Para enfatizar, los elementos de una matriz, no sólo dependen de la base sino del orden en el cual la base se presente. Consideremos que la base de \mathbf{P}^2 viene representadas por $\{x^2, x, 1\}$. La representación matricial del operador $\mathbb{D}(\cdot) = \frac{d(\cdot)}{dx}$ será

$$\langle P^i | \mathbb{D}|P_j\rangle = \langle P^i | \tilde{P}_j\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

aunque

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow 1 + 2x + 3x^2$$

equivalentemente

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow 1 + 2x + 3x^2$$

¡Es el mismo polinomio!

Recuerde que las componentes del vector multiplican a los vectores bases en el mismo orden.

Construyamos la representación para el mismo operador $\mathbb{D}(\cdot) = \frac{d(\cdot)}{dx}$ en las siguientes bases $\{1, 1+x, 1+x+x^2, 1+x+x^2+x^3\}$ y $\{1, x, x^2\}$ de \mathbf{P}^3 y \mathbf{P}^2 , respectivamente.

$$\mathbb{D}|P_j\rangle = |\tilde{P}_j\rangle \Rightarrow \begin{cases} \frac{d(1)}{dx} = 0 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 \\ \frac{d(1+x)}{dx} = 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 \\ \frac{d(1+x+x^2)}{dx} = 1+2x = 1 \cdot 1 + 2 \cdot x + 0 \cdot x^2 \\ \frac{d(1+x+x^2+x^3)}{dx} = 1+2x+3x^2 = 1 \cdot 1 + 2 \cdot x + 3 \cdot x^2 \end{cases}$$

con lo cual

$$\langle P^i | \mathbb{D}|P_j\rangle = \langle P^i | \tilde{P}_j\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

4.2.2. Algebra de Matrices

Por comodidad supongamos que $\dim(\mathbf{V}) = \dim(\mathbf{W}) = n$ y consideremos la base ortogonal $\{|e_n\rangle\}$. De este modo, es claro que se reobtienen las conocidas relaciones para matrices cuadradas

$$\langle e^i | \mathbb{A} + \mathbb{B} | e_j \rangle = \langle e^i | \mathbb{A} | e_j \rangle + \langle e^i | \mathbb{B} | e_j \rangle = A_j^i + B_j^i$$

con lo cual tenemos la suma de matrices. Esto es

$$\begin{pmatrix} A_1^1 & A_2^1 & \cdots & A_n^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & & A_n^2 \\ \vdots & & \ddots & \\ A_1^n & A_2^n & & A_n^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1^1 & B_2^1 & \cdots & B_n^1 \\ B_1^2 & B_2^2 & & B_n^2 \\ \vdots & & \vdots & \\ B_1^n & B_2^n & & B_n^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1^1 + B_1^1 & A_2^1 + B_2^1 & \cdots & A_n^1 + B_n^1 \\ A_1^2 + B_1^2 & A_2^2 + B_2^2 & & A_n^2 + B_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ A_1^n + B_1^n & & & A_n^n + B_n^n \end{pmatrix}$$

en forma compacta puede demostrarse $A_j^i + B_j^i = (A + B)_j^i$ con lo cual es directo la demostrar la igualdad de matrices

$$\begin{pmatrix} A_1^1 + B_1^1 & A_2^1 + B_2^1 & \cdots & A_n^1 + B_n^1 \\ A_1^2 + B_1^2 & A_2^2 + B_2^2 & & A_n^2 + B_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ A_1^n + B_1^n & & & A_n^n + B_n^n \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} A_1^1 & A_2^1 & \cdots & A_n^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & & A_n^2 \\ \vdots & & \ddots & \\ A_1^n & A_2^n & & A_n^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1^1 & B_2^1 & \cdots & B_n^1 \\ B_1^2 & B_2^2 & & B_n^2 \\ \vdots & & \vdots & \\ B_1^n & B_2^n & & B_n^n \end{pmatrix}$$

de donde $A_j^i = B_j^i$.

De igual modo para la representación de composición de operadores

$$\langle e^i | \mathbb{A} \mathbb{B} | e_j \rangle = \langle e^i | \mathbb{A} \mathbb{I} | e_j \rangle = \langle e^i | \mathbb{A} (|e_k\rangle \langle e^k|) | e_j \rangle = \langle e^i | \mathbb{A} | e_k \rangle \langle e^k | | e_j \rangle = A_k^i B_j^k$$

para multiplicación de matrices. Esto es

$$\begin{pmatrix} A_1^1 & A_2^1 & \cdots & A_n^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & & A_n^2 \\ \vdots & & \ddots & \\ A_1^n & A_2^n & & A_n^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} B_1^1 & B_2^1 & \cdots & B_n^1 \\ B_1^2 & B_2^2 & & B_n^2 \\ \vdots & & \vdots & \\ B_1^n & B_2^n & & B_n^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_k^1 B_1^k & A_k^1 B_2^k & \cdots & A_k^1 B_n^k \\ A_k^2 B_1^k & A_k^2 B_2^k & & A_k^2 B_n^k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ A_k^n B_1^k & & & A_k^n B_n^k \end{pmatrix}$$

como ya sabíamos $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA} \rightarrow A_k^i B_j^k \neq B_k^i A_j^k$.

De la misma manera, la multiplicación de un número por una matriz es la multiplicación de todos sus elementos por ese número

$$\langle e^i | \alpha \mathbb{A} | e_j \rangle = \alpha \langle e^i | \mathbb{A} | e_j \rangle = \alpha A_j^i.$$

4.2.3. Representación Diagonal

Finalmente mostraremos que dado un operador lineal $\mathbb{A} \in \mathcal{L}(\mathbf{V}, \mathbf{W})$ donde $\dim(\mathbf{V}) = \dim(\mathbf{W}) = n$ y sea $\{|\hat{e}_1\rangle, |\hat{e}_2\rangle, |\hat{e}_3\rangle, \dots, |\hat{e}_n\rangle\}$ una base ortonormal para \mathbf{V} y \mathbf{W} . Si adicionalmente se da el caso que

$$\mathbb{A} |\hat{e}_i\rangle = |\hat{e}_i\rangle$$

la representación matricial es diagonal

$$\langle \hat{e}^j | \mathbb{A} | \hat{e}_i \rangle = A_i^j = \langle \hat{e}^j | \hat{e}_i \rangle = \delta_i^j$$

Esta afirmación también es válida para $\dim(\mathbf{V}) \neq \dim(\mathbf{W})$ pero por simplicidad seguimos trabajando con matrices cuadradas.

En lenguaje de índices estaremos diciendo que

$$D_j^i = D_{(k)} \delta_l^k \delta_j^l \delta_k^i = \begin{pmatrix} D_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_4 \end{pmatrix}$$

4.2.4. Sistemas de ecuaciones lineales

Una de las aplicaciones más útiles del álgebra de matrices es la resolución de los sistemas de ecuaciones lineales. El cual puede ser expresado de la siguiente forma

$$A_i^\alpha x^i = c^\alpha \quad \text{con } i = 1, 2, \dots, n \quad \text{y } \alpha = 1, 2, \dots, m$$

por lo tanto, tendremos m ecuaciones lineales para n incógnitas (x^1, x^2, \dots, x^n) . Las cantidades A_i^α resultan ser las componentes de la matriz de los coeficientes. Este problema puede ser pensado como un problema de un operador \mathbb{A} en el espacio vectorial de transformaciones lineales $\mathcal{L}(\mathbf{V}, \mathbf{W})$ donde $\dim(\mathbf{V}) = n$ y $\dim(\mathbf{W}) = m$, con las c^α las componentes del vector transformado

$$|c\rangle = \mathbb{A} |x\rangle \rightarrow c^\alpha = A_i^\alpha x^i$$

Concretemos en un ejemplo

$$\begin{aligned} 2x + 3y - z &= 5 \\ 4x + 4y - 3z &= 3 \\ -2x + 3y - z &= 10 \end{aligned} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 4 & -3 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

el método más utilizado es la eliminación de *Gauss Jordan*, el cual se basa en el intercambio de ecuaciones y la multiplicación apropiada e inteligente por constantes y resta de ecuaciones. La idea es construir una matriz triangular superior para poder luego despejar desde abajo. Veamos:

$$\begin{array}{l} a \\ b \\ c \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 4 & 4 & -3 & 3 \\ -2 & 3 & -1 & 1 \end{array} \right]$$

entonces para eliminar x de la fila c (o la ecuación c) sumamos la fila a con la c , $a + c$ y esta nueva ecuación será la nueva c

$$\begin{array}{l} a \\ b \\ c' \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 4 & 4 & -3 & 3 \\ 0 & 6 & -2 & 6 \end{array} \right]$$

ahora $-2a + b$ será la nueva b

$$\begin{array}{l} a \\ b' \\ c' \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & -1 & -7 \\ 0 & 6 & -2 & 6 \end{array} \right]$$

finalmente $3b' + c'$

$$\begin{array}{l} a \\ b' \\ c'' \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & -5 & -15 \end{array} \right]$$

Este sistema es equivalente al primer sistema de ecuaciones. La solución emerge rápidamente:

$$-5z = -15 \rightarrow z = 3 \quad -2y - z = -7 \rightarrow -2y - 3 = -7 \rightarrow y = 2 \quad 2x + 3(2) - 3 = 5 \rightarrow x = 1$$

Es bueno recalcar que los sistemas de ecuaciones lineales no necesariamente tienen solución y a veces tienen más de una solución.

4.2.5. Operadores hermíticos

La representación matricial de un operador hermítico:

$$(A^\dagger)_j^i = \langle e^i | A^\dagger | e_j \rangle = \langle e^j | A | e_i \rangle^* = (A_j^i)^*$$

vale decir: el hermítico conjugado de una matriz, es su traspuesta conjugada. Si la matriz es hermítica, i.e.

$$A^\dagger = A \Rightarrow (A^\dagger)_j^i = A_j^i$$

por lo tanto, las matrices hermíticas son simétricas respecto a la diagonal y los elementos de la diagonal son números reales. Un operador hermítico estará representado por una matriz hermítica.

Aquí vale la pena probar algunas de las propiedades que arriba expresamos para operadores hermíticos conjugados, vale decir

$$(A^\dagger)^\dagger = A; \quad (\lambda A)^\dagger = \lambda^* A^\dagger; \quad (A + B)^\dagger = A^\dagger + B^\dagger; \quad (AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$$

Es claro que

$$(A^\dagger)^\dagger \rightarrow (\langle e^i | A^\dagger | e_j \rangle)^\dagger = ((A^\dagger)_j^i)^\dagger = ((A_j^i)^*)^\dagger = A_j^i$$

y

$$(\lambda A)^\dagger \rightarrow \langle e^i | \lambda A^\dagger | e_j \rangle = \langle e^j | \lambda A | e_i \rangle^* = \lambda^* \langle e^j | A | e_i \rangle^* = \lambda^* \langle e^i | A^\dagger | e_j \rangle = \lambda^* A^\dagger$$

pero más interesante es

$$(AB)^\dagger \rightarrow \langle e^i | (AB)^\dagger | e_j \rangle = (A_k^i B_j^k)^\dagger = (A_k^i)^* (B_j^k)^* = (A_j^k)^* (B_k^i)^* = (B_k^i)^* (A_j^k)^* \rightarrow B^\dagger A^\dagger.$$

4.2.6. Inversa de una matriz

Hemos visto que dada una transformación lineal biyectiva, podemos definir una inversa para esa transformación lineal. Esa transformación lineal tendrá como representación una matriz. Por lo tanto dado un operador lineal A diremos que otro operador lineal B será su inverso (por la derecha) si

$$AB = I \rightarrow \langle e^i | AB | e_j \rangle = \delta_j^i \rightarrow A_k^i B_j^k = \delta_j^i$$

ahora bien, como conocemos la matriz A_k^i y la suponemos no singular (esto es, y como veremos más adelante, significa que el determinante se anule: $\det |A_k^i| \neq 0$) y si tomamos un j fijo tendremos un sistema de n ecuaciones lineales inhomogéneo con n incógnitas: $B_j^1, B_j^2, B_j^3, \dots, B_j^n$. Al resolver el sistema tendremos la solución.

El procedimiento para encontrar la inversa es equivalente al método de eliminación de Gauss Jordan. Veamos como funciona, supongamos una matriz 3×3

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} A_1^1 & A_2^1 & A_3^1 & 1 & 0 & 0 \\ A_1^2 & A_2^2 & A_3^2 & 0 & 1 & 0 \\ A_1^3 & A_2^3 & A_3^3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{Gauss Jordan}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & B_1^1 & B_2^1 & B_3^1 \\ 0 & 1 & 0 & B_1^2 & B_2^2 & B_3^2 \\ 0 & 0 & 1 & B_1^3 & B_2^3 & B_3^3 \end{array} \right)$$

Como un ejemplo

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 8 & 1 & 0 & 2 \end{array} \right) \rightarrow \dots \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -8 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 5 & 4 \end{array} \right)$$

4.2.7. Cambio de bases para vectores

Dada una representación (una base) particular, un *bra*, un *ket* o un operador quedará representado por una matriz. Si cambiamos la representación, ese mismo *bra*, *ket* u operador tendrá otra matriz como representación. Mostraremos cómo están relacionadas esas matrices.

Dadas dos base discretas ortonormales $\{|\hat{e}_i\rangle\}$ y $\{|\tilde{e}_i\rangle\}$, entonces un vector cualquiera

$$\left. \begin{array}{l} |\Psi\rangle = (|\hat{e}^k\rangle \langle \hat{e}_k|) |\Psi\rangle = \underbrace{\langle \hat{e}^k | \Psi \rangle}_{c^k} |\hat{e}_k\rangle \\ |\Psi\rangle = (|\tilde{e}^m\rangle \langle \tilde{e}_m|) |\Psi\rangle = \underbrace{\langle \tilde{e}^m | \Psi \rangle}_{\tilde{c}^m} |\tilde{e}_m\rangle \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \langle \tilde{e}^m | \Psi \rangle = \langle \hat{e}^k | \Psi \rangle \underbrace{\langle \tilde{e}^m | \hat{e}_k \rangle}_{S_k^m} \\ \langle \hat{e}^k | \Psi \rangle = \langle \tilde{e}^m | \Psi \rangle \underbrace{\langle \hat{e}^k | \tilde{e}_m \rangle}_{\tilde{S}_m^k} \end{array} \right.$$

con lo cual, una vez más, tendremos que la expresión de transformación de componentes de un vector

$$\tilde{c}^m = S_k^m c^k \iff c^k = \tilde{S}_m^k \tilde{c}^m$$

y S_k^m (o \tilde{S}_m^k) será la matriz de transformación, cambio de base o cambio de representación. Ahora bien, por definición de producto interno

$$\langle \tilde{e}^m | \hat{e}_k \rangle = \langle \hat{e}^k | \tilde{e}_m \rangle^* \implies S_k^m = S_m^{k*} \equiv S_k^{m\dagger}$$

por lo tanto, la matriz de transformación entre bases es hermítica o autoadjunta y la relación anterior queda escrita como

$$\tilde{c}^m = S_k^m c_k \implies \langle \tilde{e}^m | \Psi \rangle = S_k^m \langle \hat{e}^k | \Psi \rangle$$

$$c^k = S_m^{k\dagger} \tilde{c}^m \implies \langle \hat{e}^k | \Psi \rangle = S_m^{k\dagger} \langle \tilde{e}^m | \Psi \rangle$$

Igualmente la regla de transformación de las representaciones matriciales de operadores quedan expresadas como

$$\langle \tilde{e}^i | \mathbb{A} | \tilde{e}_j \rangle = \langle \tilde{e}^i | (|\hat{e}_k\rangle \langle \hat{e}^k|) \mathbb{A} (|\hat{e}_m\rangle \langle \hat{e}^m|) | \tilde{e}_j \rangle = \underbrace{\langle \tilde{e}^i | \hat{e}_k \rangle}_{S_k^i} \langle \hat{e}^k | \mathbb{A} | \hat{e}_m \rangle \underbrace{\langle \hat{e}^m | \tilde{e}_j \rangle}_{\tilde{S}_j^{m\dagger}}$$

por lo tanto,

$$\tilde{A}_j^i = S_k^i A_m^k \tilde{S}_j^{m\dagger}$$

donde \tilde{A}_j^i es la representación del operador \mathbb{A} respecto a la base $\{|\tilde{e}_j\rangle\}$ y A_m^k su representación en la base $\{|\hat{e}_m\rangle\}$.

4.2.8. Ejercicios

1. Dada una matriz hermítica

$$\mathbb{H} = \begin{pmatrix} 10 & 3i \\ -3i & 0 \end{pmatrix}$$

construya la matriz unitaria \mathbb{U} , tal que $\mathbb{U}^\dagger \mathbb{H} \mathbb{U} = \mathbb{D}$ donde \mathbb{D} es un operador real y diagonal.

2. Considere la representación matricial de un operador en la base canónica de la forma

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

¿Existirá algún operador \mathbb{B} , no singular, tal que $\mathbb{D} = \mathbb{B}^{-1} \mathbb{A} \mathbb{B}$, con \mathbb{D} un operador diagonal? Si ese fuera el caso, ¿Cuál sería la representación matricial de ese operador \mathbb{B} , en la base canónica? Justifique su respuesta

3. Considere matrices ortogonales, reales 3×3 (esto es: $\mathbb{M}^T \mathbb{M} = \mathbb{I}$) las cuales, adicionalmente cumplen con: $\det[\mathbb{M}] = 1$.

- ¿Cuántos parámetros reales son necesarios para caracterizar unívocamente a este tipo de matrices?
- ¿Este tipo de matrices forman grupo bajo la multiplicación de matrices?
- Si ahora considera la matrices ortogonales reales con $\det[\mathbb{M}] = -1$ ¿Este tipo de matrices formarán grupo bajo la multiplicación? Justifique su respuesta.

4. Considere el siguiente “operador vectorial” $\boldsymbol{\sigma} = \sigma_x \mathbf{i} + \sigma_y \mathbf{j} + \sigma_z \mathbf{k}$ donde las matrices $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ se conocen como operadores de Pauli y su representación matricial en la base canónica es:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad \mathbb{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

el vector dirección puede escribirse como

$$\mathbf{n} = \sin(\theta) \cos(\phi) \mathbf{i} + \sin(\theta) \sin(\phi) \mathbf{j} + \cos(\theta) \mathbf{k} = n_x \mathbf{i} + n_y \mathbf{j} + n_z \mathbf{k},$$

con lo cual: $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = n_x \sigma_x + n_y \sigma_y + n_z \sigma_z$.

A partir de todo lo anterior calcule la representación matricial del siguiente operador en la base canónica

$$\exp\left(\frac{i}{2} \psi \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}\right).$$

4.3. Traza de Operadores

La traza, $\text{Tr}(\mathbb{A})$, de un operador \mathbb{A} es la suma de los elementos diagonales de su representación matricial \mathbb{A} . Esto es dado un operador \mathbb{A} y una base ortogonal $\{|e_i\rangle\}$ para \mathbf{V}^n

$$\text{Tr}(\mathbb{A}) = \langle e^k | \mathbb{A} | e_k \rangle = A_i^i$$

Así

$$A_j^i = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Tr}(\mathbb{A}) = A_i^i = 15.$$

4.3.1. Invariancia de la Traza

La traza de una matriz no depende de la base que seleccionemos, es un invariante que caracteriza al operador independientemente de la base en la cual se represente. Entonces, dadas dos bases discretas ortonormales $\{|\hat{e}_i\rangle\}$ y $\{|\tilde{e}_i\rangle\}$,

$$A_k^k = \langle \hat{e}^k | \mathbb{A} | \hat{e}_k \rangle = \langle \hat{e}^k | \tilde{e}_m \rangle \langle \tilde{e}^m | \mathbb{A} | \hat{e}_k \rangle = \langle \tilde{e}^m | \underbrace{\mathbb{A} | \hat{e}_k \rangle}_{\mathbb{I}} \langle \hat{e}^k | \tilde{e}_m \rangle = \langle \tilde{e}^m | \mathbb{A} | \tilde{e}_m \rangle = A_m^m$$

Donde una vez más hemos utilizado las dos relaciones de cierre $|\tilde{e}_m\rangle \langle \tilde{e}^m| = |\hat{e}_k\rangle \langle \hat{e}^k| = \mathbb{I}$. Es claro que el número que representa esta suma será el mismo independientemente de su representación matricial.

4.3.2. Propiedades de la Traza

Claramente la traza es lineal

$$\text{Tr}(\mathbb{A} + \lambda \mathbb{B}) = \text{Tr}(\mathbb{A}) + \lambda \text{Tr}(\mathbb{B})$$

ya que

$$\text{Tr}(\mathbb{A} + \lambda \mathbb{B}) = \langle \hat{e}^k | \mathbb{A} + \lambda \mathbb{B} | \hat{e}_k \rangle = \langle \hat{e}^k | \mathbb{A} | \hat{e}_k \rangle + \lambda \langle \hat{e}^k | \mathbb{B} | \hat{e}_k \rangle = \text{Tr}(\mathbb{A}) + \lambda \text{Tr}(\mathbb{B})$$

La traza de un producto conmuta, esto es

$$\text{Tr}(\mathbb{A}\mathbb{B}) = \text{Tr}(\mathbb{B}\mathbb{A})$$

y es fácilmente demostrable

$$\text{Tr}(\mathbb{A}\mathbb{B}) = \langle \hat{e}^k | \mathbb{A}\mathbb{B} | \hat{e}_k \rangle = \langle \hat{e}^k | \mathbb{A} | \underbrace{\hat{e}_m\rangle}_{\mathbb{I}} \langle \hat{e}^m | \mathbb{B} | \hat{e}_k \rangle = \langle \hat{e}^k | \mathbb{B} | \underbrace{\hat{e}_m\rangle}_{\mathbb{I}} \langle \hat{e}^m | \mathbb{A} | \hat{e}_k \rangle = \text{Tr}(\mathbb{B}\mathbb{A})$$

Recuerde que $\langle \hat{e}^k | \mathbb{B} | \hat{e}_m \rangle$ y $\langle \hat{e}^k | \mathbb{A} | \hat{e}_k \rangle$ son números que pueden ser reordenados.

Del mismo modo es fácil demostrar que la traza de un triple producto de matrices respeta la ciclicidad del orden de las matrices en el producto

$$\text{Tr}(\mathbb{A}\mathbb{B}\mathbb{C}) = \text{Tr}(\mathbb{B}\mathbb{C}\mathbb{A}) = \text{Tr}(\mathbb{C}\mathbb{A}\mathbb{B}).$$

4.4. Diferenciación de Operadores

Dado un operador $\mathbb{A}(t)$ el cual supondremos dependiente de una variable arbitraria t podremos definir la derivada como

$$\frac{d\mathbb{A}(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbb{A}(t + \Delta t) - \mathbb{A}(t)}{\Delta t}$$

por lo tanto si $\langle u^k | \mathbb{A} | u_i \rangle = A_i^k$ entonces

$$\langle u^k | \frac{d\mathbb{A}(t)}{dt} | u_i \rangle = \left(\frac{d\mathbb{A}(t)}{dt} \right)_i^k = \frac{d}{dt} \langle u^k | \mathbb{A}(t) | u_i \rangle = \frac{dA_i^k}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dA_1^1}{dt} & \frac{dA_2^1}{dt} & \dots & \frac{dA_n^1}{dt} \\ \frac{dA_1^2}{dt} & \frac{dA_2^2}{dt} & & \frac{dA_n^2}{dt} \\ \vdots & & \ddots & \\ \frac{dA_1^n}{dt} & \frac{dA_2^n}{dt} & & \frac{dA_n^n}{dt} \end{pmatrix}$$

con lo cual la regla es simple, la representación matricial de la derivada de un operador será la derivada de cada uno de sus elementos. Por ejemplo

$$\frac{d}{dx} \begin{pmatrix} x & x^2 & 2 \\ 1 & e^{-x} & 5x \\ 3x^3 & 3 & \cos(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2x & 0 \\ 0 & -e^{-x} & 5 \\ 9x^2 & 0 & -\sin(x) \end{pmatrix}$$

4.4.1. Reglas de diferenciación de operadores lineales

Las reglas usuales de la diferenciación se cumplirán con la diferenciación de operadores. Esto se demuestra con la representación matricial

$$\begin{aligned} \frac{d(\mathbb{A}(t) + \mathbb{B}(t))}{dt} &= \frac{d(\mathbb{A}(t))}{dt} + \frac{d(\mathbb{B}(t))}{dt} \\ \langle u^k | \frac{d(\mathbb{A}(t) + \mathbb{B}(t))}{dt} | u_i \rangle &= \frac{d}{dt} \langle u^k | (\mathbb{A}(t) + \mathbb{B}(t)) | u_i \rangle \\ &= \frac{d}{dt} (\langle u^k | \mathbb{A}(t) | u_i \rangle + \langle u^k | \mathbb{B}(t) | u_i \rangle) \\ &= \frac{d}{dt} \langle u^k | \mathbb{A}(t) | u_i \rangle + \frac{d}{dt} \langle u^k | \mathbb{B}(t) | u_i \rangle \\ &= \langle u^k | \frac{d\mathbb{A}(t)}{dt} | u_i \rangle + \langle u^k | \frac{d\mathbb{B}(t)}{dt} | u_i \rangle = \frac{d(\mathbb{A}(t))}{dt} + \frac{d(\mathbb{B}(t))}{dt} \end{aligned}$$

Del mismo modo se cumplirá que

$$\frac{d(\mathbb{A}(t) \mathbb{B}(t))}{dt} = \frac{d\mathbb{A}(t)}{dt} \mathbb{B}(t) + \mathbb{A}(t) \frac{d\mathbb{B}(t)}{dt}$$

con la precaución que no se puede modificar el orden de aparición de los operadores. Es fácil ver que

$$\begin{aligned} \langle u^k | \frac{d(\mathbb{A}(t) \mathbb{B}(t))}{dt} | u_i \rangle &= \frac{d}{dt} \langle u^k | \mathbb{A}(t) \mathbb{B}(t) | u_i \rangle = \frac{d}{dt} \langle u^k | \mathbb{A}(t) \mathbb{I} \mathbb{B}(t) | u_i \rangle \\ &= (\langle u^k | \frac{d\mathbb{A}(t)}{dt} | u_m \rangle \langle u^m | \mathbb{B}(t) | u_i \rangle) \\ &= \frac{d \langle u^k | \mathbb{A}(t) | u_m \rangle}{dt} \langle u^m | \mathbb{B}(t) | u_i \rangle + \langle u^k | \mathbb{A}(t) | u_m \rangle \frac{d \langle u^m | \mathbb{B}(t) | u_i \rangle}{dt} \\ &= \langle u^k | \frac{d\mathbb{A}(t)}{dt} | u_m \rangle \langle u^m | \mathbb{B}(t) | u_i \rangle + \langle u^k | \mathbb{A}(t) | u_m \rangle \langle u^m | \frac{d\mathbb{B}(t)}{dt} | u_i \rangle \end{aligned}$$

Otras propiedades de la derivación de operadores se demuestran a partir de la expansión en series de los operadores. Por ejemplo, si queremos conocer la expresión para $\frac{de^{At}}{dt}$, con $\mathbb{A} \neq \mathbb{A}(t)$ recordemos que

$$e^{At} |v\rangle = \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mathbb{A}t)^n}{n!} \right] |v\rangle = \left[\mathbb{I} + \mathbb{A}t + \frac{(\mathbb{A}t)^2}{2!} + \dots + \frac{(\mathbb{A}t)^n}{n!} \dots \right] |v\rangle$$

tendremos que

$$\frac{de^{At}}{dt} |v\rangle = \frac{d}{dt} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mathbb{A}t)^n}{n!} \right] |v\rangle = \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dt} \left(\frac{(\mathbb{A}t)^n}{n!} \right) \right] |v\rangle = \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{nt^{n-1} \mathbb{A}^n}{n!} \right] |v\rangle = \underbrace{\left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{n-1} \mathbb{A}^{n-1}}{(n-1)!} \right]}_{e^{At}} \mathbb{A} |v\rangle$$

Nótese que la suma es hasta infinito, por lo tanto al cambiar de índice $p = n - 1$, p sigue variando hasta infinito y la serie es la misma que la anterior. Entonces

$$\frac{de^{\mathbb{A}t}}{dt} |v\rangle = e^{\mathbb{A}t} \mathbb{A} |v\rangle \equiv \mathbb{A} e^{\mathbb{A}t} |v\rangle .$$

Si un solo operador esta siendo derivado el orden de presentación de los operadores es indiferente. Ahora bien, cuando se presenta la siguiente situación

$$\frac{d(e^{\mathbb{A}t} e^{\mathbb{B}t})}{dt} |v\rangle = \frac{de^{\mathbb{A}t}}{dt} e^{\mathbb{B}t} |v\rangle + e^{\mathbb{A}t} \frac{de^{\mathbb{B}t}}{dt} |v\rangle = \mathbb{A} e^{\mathbb{A}t} e^{\mathbb{B}t} |v\rangle + e^{\mathbb{A}t} \mathbb{B} e^{\mathbb{B}t} |v\rangle = e^{\mathbb{A}t} \mathbb{A} e^{\mathbb{B}t} |v\rangle + e^{\mathbb{A}t} e^{\mathbb{B}t} \mathbb{B} |v\rangle$$

con $\mathbb{A} \neq \mathbb{A}(t)$ y $\mathbb{B} \neq \mathbb{B}(t)$ y siempre $[e^{\mathbb{B}t}, \mathbb{B}] = 0$. Con lo cual, sólo para el caso en el que $[\mathbb{A}, \mathbb{B}] = 0$ podremos factorizar $e^{\mathbb{A}t} e^{\mathbb{B}t}$ y

$$\frac{d(e^{\mathbb{A}t} e^{\mathbb{B}t})}{dt} |v\rangle = (\mathbb{A} + \mathbb{B}) e^{\mathbb{A}t} e^{\mathbb{B}t} |v\rangle$$

Si $[\mathbb{A}, \mathbb{B}] \neq 0$ el orden de aparición de los operadores es MUY importante.

Para el caso en el cual $\mathbb{A} = \mathbb{A}(t)$ **no necesariamente** $[\mathbb{A}(t), e^{\frac{d\mathbb{A}(t)}{dt}}] = 0$. Veamos:

$$\begin{aligned} \frac{de^{\mathbb{A}(t)}}{dt} |v\rangle &= \frac{d}{dt} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mathbb{A}(t))^n}{n!} \right] |v\rangle = \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n!} \frac{d(\mathbb{A}(t))^n}{dt} \right) \right] |v\rangle \\ &= \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n!} \left\{ \frac{d(\mathbb{A}(t))}{dt} \mathbb{A}(t)^{n-1} + \mathbb{A}(t) \frac{d(\mathbb{A}(t))}{dt} \mathbb{A}(t)^{n-2} \dots \mathbb{A}(t)^{n-1} \frac{d(\mathbb{A}(t))}{dt} \right\} \right) \right] |v\rangle \end{aligned}$$

Adicionalmente

$$\text{si } [\mathbb{A}, [\mathbb{A}, \mathbb{B}]] = [\mathbb{B}, [\mathbb{A}, \mathbb{B}]] = 0 \Rightarrow [\mathbb{A}, F(\mathbb{B})] = [\mathbb{A}, \mathbb{B}] \frac{dF(\mathbb{B})}{d\mathbb{B}}$$

Esta relación es fácilmente demostrable para el caso en el cual $[\mathbb{A}, \mathbb{B}] = \mathbb{I}$ el operador identidad, en ese caso teníamos que $\mathbb{A}\mathbb{B}^n - \mathbb{B}^n\mathbb{A} = n\mathbb{B}^{n-1}$

$$\begin{aligned} \mathbb{A}\mathbb{B}^n - \mathbb{B}^n\mathbb{A} &= \underbrace{\mathbb{A}\mathbb{B}\mathbb{B}\dots\mathbb{B}}_n - \underbrace{\mathbb{B}\mathbb{B}\dots\mathbb{B}\mathbb{A}}_n = (\mathbb{I} + \mathbb{B}\mathbb{A}) \underbrace{\mathbb{B}\mathbb{B}\dots\mathbb{B}}_{n-1} - \underbrace{\mathbb{B}\mathbb{B}\dots\mathbb{B}\mathbb{A}}_n \\ &= \mathbb{I}\mathbb{B}^{n-1} + \mathbb{B}(\mathbb{I} + \mathbb{B}\mathbb{A}) \underbrace{\mathbb{B}\mathbb{B}\dots\mathbb{B}}_{n-2} - \underbrace{\mathbb{B}\mathbb{B}\dots\mathbb{B}\mathbb{A}}_n \\ &= 2\mathbb{B}^{n-1} + \mathbb{B}^2(\mathbb{I} + \mathbb{B}\mathbb{A}) \underbrace{\mathbb{B}\mathbb{B}\dots\mathbb{B}}_{n-3} - \underbrace{\mathbb{B}\mathbb{B}\dots\mathbb{B}\mathbb{A}}_n = \dots = n\mathbb{B}^{n-1} . \end{aligned}$$

Obviamente, para este caso, se cumple que

$$[\mathbb{A}, \mathbb{B}] = \mathbb{I} \Rightarrow [\mathbb{A}, [\mathbb{A}, \mathbb{B}]] = [\mathbb{B}, [\mathbb{A}, \mathbb{B}]] = 0 .$$

Para demostrar esta relación “desarrollemos en Serie de Taylor” la funcion $F(\mathbb{B})$. Esto es

$$\begin{aligned} [\mathbb{A}, F(\mathbb{B})] &= \left[\mathbb{A}, \sum_{n=0}^{\infty} f_n \frac{\mathbb{B}^n}{n!} \right] = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \frac{[\mathbb{A}, \mathbb{B}^n]}{n!} = [\mathbb{A}, \mathbb{B}] \sum_{n=0}^{\infty} f_n \frac{n\mathbb{B}^{n-1}}{n!} = [\mathbb{A}, \mathbb{B}] \sum_{n=0}^{\infty} f_n \frac{\mathbb{B}^{n-1}}{(n-1)!} \\ &= [\mathbb{A}, \mathbb{B}] \frac{dF(\mathbb{B})}{d\mathbb{B}} . \end{aligned}$$

Para el caso más general se procede del mismo modo.

$$\text{Si } [A, C] = [B, C] = 0, \quad \text{con } C = [A, B] \Rightarrow [A, F(B)] \stackrel{?}{=} [A, B] \frac{dF(B)}{dB}.$$

Probaremos primero que

$$\text{si } [A, C] = [B, C] = 0, \quad \text{con } C = [A, B] \Rightarrow [A, B^n] = AB^n - B^nA = n[A, B]B^{n-1}.$$

Tendremos que

$$\begin{aligned} AB^n - B^nA &= \underbrace{ABB \cdots B}_n - \underbrace{BB \cdots BA}_n = (C + BA) \underbrace{BB \cdots B}_{n-1} - \underbrace{BB \cdots BA}_n \\ &= CB^{n-1} + B(C + BA) \underbrace{BB \cdots B}_{n-2} - \underbrace{BB \cdots BA}_n \\ &= 2CB^{n-1} + B^2(C + BA) \underbrace{BB \cdots B}_{n-3} - \underbrace{BB \cdots BA}_n = \dots = nCB^{n-1} = n[A, B]B^{n-1}, \end{aligned}$$

con lo cual es inmediato demostrar que

$$\begin{aligned} [A, F(B)] &= \left[A, \sum_{n=0}^{\infty} f_n \frac{B^n}{n!} \right] = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \frac{[A, B^n]}{n!} = [A, B] \sum_{n=0}^{\infty} f_n \frac{nB^{n-1}}{n!} = [A, B] \sum_{n=0}^{\infty} f_n \frac{B^{n-1}}{(n-1)!} \\ &= [A, B] \frac{dF(B)}{dB}. \end{aligned}$$

4.4.2. La fórmula de Glauber

Ahora estamos en capacidad de demostrar limpiamente la fórmula de Glauber. Esta es

$$e^A e^B = e^{A+B} e^{\frac{1}{2}[A, B]}$$

Para demostrarla, procedemos a considerar un operador $F(t) = e^{At} e^{Bt}$, por lo tanto

$$\begin{aligned} \frac{dF(t)}{dt} |v\rangle &= \frac{de^{At} e^{Bt}}{dt} |v\rangle = Ae^{At} e^{Bt} |v\rangle + e^{At} B e^{Bt} |v\rangle = (A + e^{At} B e^{-At}) e^{At} e^{Bt} |v\rangle \\ &= (A + e^{At} B e^{-At}) F(t) |v\rangle \end{aligned}$$

Ahora bien, dado que

$$\text{si } [A, [A, B]] = [B, [A, B]] = 0 \Rightarrow [A, F(B)] = [A, B] \frac{dF(B)}{dB}$$

entonces

$$[e^{At}, B] = t[A, B] e^{At} \Rightarrow e^{At} B = B e^{At} + t[A, B] e^{At}$$

por lo cual

$$\frac{dF(t)}{dt} |v\rangle = (A + e^{At} B e^{-At}) F(t) |v\rangle = (A + B + t[A, B]) F(t) |v\rangle$$

por tanteo uno puede darse cuenta que

$$F(t) = e^{\{(A+B)t + \frac{t^2}{2}[A, B]\}}$$

cumple con la ecuación anterior, por lo tanto absorbiendo t en los operadores correspondientes llegamos a la fórmula de Glauber

$$e^A e^B = e^{A+B} e^{\frac{1}{2}[A, B]}.$$

4.4.3. Ejercicios

1. Considere el espacio $\mathcal{P}(t)$ de polinomios de grado N en t , vale decir $|f\rangle_t \leftrightarrow \sum_{n=0}^N a_n t^n$, considere además un operador $\mathbb{T} = e^{x\mathbb{D}} \equiv \exp(x\mathbb{D})$, con $\mathbb{D} = \frac{d}{dt}$
 - a) Muestre que $\mathbb{T}|p\rangle_t = |p\rangle_{t+x}$, esto es que el operador \mathbb{T} puede ser considerado un operador traslación espacial para los polinomios $\mathcal{P}(t)$ de grado N .
 - b) Considere que el espacio de polinomios está definido en el intervalo $[-1, 1]$, que definimos un producto interno de la forma $\langle f|g\rangle = \int_{-1}^1 fg dt$ y un espacio de polinomios de grado $N = 2$. ¿Cuál es la representación matricial de \mathbb{T} en la base de polinomios de Legendre $\{P_0, P_1, P_2\}$?
2. Heredando el formalismo de Mecánica Clásica, uno construye en Mecánica Cuántica el Operador Hamiltoniano, hermítico, para un sistema unidimensional como

$$\mathbb{H} = \frac{\mathbb{P}^2}{2m} + \mathbb{V}(\mathbb{X})$$

donde \mathbb{H}, \mathbb{P} y \mathbb{X} son operadores, y $\mathbb{V}(\mathbb{X})$ un operador que es una función de otro operador. Adicionalmente, uno puede construir el siguiente operador $[\mathbb{X}, \mathbb{P}] = i\hbar\mathbb{I}$.

- a) Determine los siguientes conmutadores $[\mathbb{H}, \mathbb{P}]$, $[\mathbb{H}, \mathbb{X}]$ y $[\mathbb{H}, \mathbb{X}\mathbb{P}]$
- b) Suponga que $\mathbb{H}|\psi_n\rangle = E_n|\psi_n\rangle$ y entonces calcule la representación matricial del siguiente operador $\langle \psi^m | [\mathbb{A}, \mathbb{H}] | \psi_n \rangle$, para un operador arbitrario \mathbb{A} .

4.5. Un paréntesis determinante

4.5.1. Definición

El determinante se define comola siguiente aplicación: $\det|\mathbb{A}|: \mathbf{M}_{n \times n} \rightarrow \mathfrak{R}$, es decir, asocia un número real con cada matriz del espacio vectorial $\mathbf{M}_{n \times n}$ de matrices $n \times n$

Así, dada una matriz

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} A_1^1 & A_1^2 & \cdots & A_1^n \\ A_2^1 & A_2^2 & & A_2^n \\ \vdots & & \ddots & \\ A_n^1 & A_n^2 & & A_n^n \end{pmatrix} \Rightarrow \det|\mathbb{A}| = \varepsilon^{ijk\cdots} A_i^1 A_j^2 A_k^3 \cdots = \begin{vmatrix} A_1^1 & A_1^2 & \cdots & A_1^n \\ A_2^1 & A_2^2 & & A_2^n \\ \vdots & & \ddots & \\ A_n^1 & A_n^2 & & A_n^n \end{vmatrix}$$

Hemos generalizado los índices de Levi Civita de tal forma que

$$\varepsilon^{ijk\cdots} = \varepsilon_{ijk\cdots} = \begin{cases} 0, & \text{si cualesquiera dos índices son iguales} \\ 1, & \text{si los índices } i, j, k \cdots \text{ constituyen una permutación cíclica de } 1, 2, 3 \cdots n \\ -1, & \text{si los índices } i, j, k \cdots \text{ constituyen una permutación anticíclica de } 1, 2, 3 \cdots n \end{cases}$$

Esta situación es clara para el caso de matrices 3×3 , veamos.

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} A_1^1 & A_1^2 & A_1^3 \\ A_2^1 & A_2^2 & A_2^3 \\ A_3^1 & A_3^2 & A_3^3 \end{pmatrix} \Rightarrow \det|\mathbb{A}| = \varepsilon^{ijk} A_i^1 A_j^2 A_k^3 = \begin{vmatrix} A_1^1 & A_1^2 & A_1^3 \\ A_2^1 & A_2^2 & A_2^3 \\ A_3^1 & A_3^2 & A_3^3 \end{vmatrix}$$

con lo cual

$$\begin{aligned} \det|\mathbb{A}| &= \varepsilon^{123} A_1^1 A_2^2 A_3^3 + \varepsilon^{312} A_3^1 A_1^2 A_2^3 + \varepsilon^{231} A_2^1 A_3^2 A_1^3 + \varepsilon^{132} A_1^1 A_3^2 A_2^3 + \varepsilon^{321} A_3^1 A_2^2 A_1^3 + \varepsilon^{213} A_2^1 A_1^2 A_3^3 \\ &= A_1^1 A_2^2 A_3^3 + A_3^1 A_1^2 A_2^3 + A_2^1 A_3^2 A_1^3 - A_1^1 A_3^2 A_2^3 - A_3^1 A_2^2 A_1^3 - A_2^1 A_1^2 A_3^3. \end{aligned}$$

4.5.2. Propiedades determinantes

1. $\det |\mathbb{A}| = \det |\mathbb{A}^T|$ donde \mathbb{A}^T es la traspuesta de \mathbb{A} . Esta propiedad proviene de la definición del índice de Levi Civita

$$\det |\mathbb{A}| = \varepsilon^{ijk\dots} A_i^1 A_j^2 A_k^3 \dots = \varepsilon_{ijk\dots} A_1^i A_2^j A_3^k \dots = \det |\mathbb{A}^T|$$

que se traduce en que si se intercambian filas por columnas el determinante no se altera

$$\begin{vmatrix} A_1^1 & A_2^1 & A_3^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & A_3^2 \\ A_1^3 & A_2^3 & A_3^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1^1 & A_1^2 & A_1^3 \\ A_2^1 & A_2^2 & A_2^3 \\ A_3^1 & A_3^2 & A_3^3 \end{vmatrix}$$

2. Si dos filas o dos columnas son idénticas el determinante se anula

$$\varepsilon^{iik\dots} A_i^1 A_i^2 A_k^3 \dots = \varepsilon_{iik\dots} A_1^i A_2^i A_3^k \dots = 0$$

$$\begin{vmatrix} A_1^1 & A_2^1 & A_3^1 \\ A_1^1 & A_2^1 & A_3^1 \\ A_1^3 & A_2^3 & A_3^3 \end{vmatrix} = 0$$

3. Si multiplicamos una fila o una columna por un número, el determinante queda multiplicado por el número

$$\varepsilon^{ijk\dots} A_i^1 (\lambda A_j^2) A_k^3 \dots = \lambda \varepsilon^{ijk\dots} A_i^1 A_j^2 A_k^3 \dots = \lambda \det[\mathbb{A}]$$

$$\varepsilon_{ijk\dots} A_1^i A_2^j (\lambda A_3^k) \dots = \lambda \varepsilon_{ijk\dots} A_1^i A_2^j A_3^k \dots = \lambda \det[\mathbb{A}]$$

de aquí claramente se desprende que si una fila o una columna es cero ($\lambda = 0$) el determinante se anula. Más aún, si dos filas o dos columnas son proporcionales $A_i^1 = \lambda A_j^2$ el determinante se anula, por cuanto se cumple la propiedad anterior

$$\begin{vmatrix} A_1^1 & \lambda A_2^1 & A_3^1 \\ A_1^2 & \lambda A_2^2 & A_3^2 \\ A_1^3 & \lambda A_2^3 & A_3^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1^1 & A_2^1 & A_3^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & A_3^2 \\ \lambda A_1^3 & \lambda A_2^3 & \lambda A_3^3 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} A_1^1 & A_2^1 & A_3^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & A_3^2 \\ A_1^3 & A_2^3 & A_3^3 \end{vmatrix}$$

Obvio que

$$\begin{vmatrix} A_1^1 & 0 & A_3^1 \\ A_1^2 & 0 & A_3^2 \\ A_1^3 & 0 & A_3^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1^1 & A_2^1 & A_3^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & A_3^2 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

al igual que

$$\begin{vmatrix} A_1^1 & \lambda A_1^1 & A_3^1 \\ A_1^2 & \lambda A_1^2 & A_3^2 \\ A_1^3 & \lambda A_1^3 & A_3^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1^1 & A_2^1 & A_3^1 \\ \lambda A_1^1 & \lambda A_2^1 & \lambda A_3^1 \\ A_1^3 & A_2^3 & A_3^3 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} A_1^1 & A_1^1 & A_3^1 \\ A_1^2 & A_1^2 & A_3^2 \\ A_1^3 & A_1^3 & A_3^3 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} A_1^1 & A_2^1 & A_3^1 \\ A_1^1 & A_2^1 & A_3^1 \\ A_1^3 & A_2^3 & A_3^3 \end{vmatrix} = 0$$

4. Si se intercambian dos filas o dos columnas cambia de signo el determinante.

$$\det |\mathbb{A}| = \varepsilon^{ijk\dots} A_i^1 A_j^2 A_k^3 \dots = \begin{vmatrix} A_1^1 & A_2^1 & \dots & A_n^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & & A_n^2 \\ \vdots & & \ddots & \\ A_1^n & A_2^n & & A_n^n \end{vmatrix} \Rightarrow \varepsilon^{ijk\dots} A_j^1 A_i^2 A_k^3 \dots = -\det[\tilde{\mathbb{A}}]$$

donde en la matriz $\tilde{\mathbb{A}}$ se han intercambiado un par de columnas. Claramente las propiedades del índice de Levi Civita, obliga al cambio de signo

$$\det |\tilde{\mathbb{A}}| = -\det |\mathbb{A}|$$

Nótese que una síntesis de las propiedades anteriores nos lleva a reescribir el determinante de una matriz de la forma

$$\det |\mathbb{A}| = \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\dots} \det |\mathbb{A}| = \varepsilon_{ijk\dots} A_\alpha^i A_\beta^j A_\gamma^k \dots \iff \det |\mathbb{A}| = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\dots} \det |\mathbb{A}| = \varepsilon^{ijk\dots} A_i^\alpha A_j^\beta A_k^\gamma \dots$$

claramente, si $\alpha\beta\gamma\dots \iff 123\dots$ reobtenemos la definición anterior. Si se intercambian dos filas o dos columnas, el determinante cambia de signo debido al intercambio de dos índices griegos. Si dos filas o dos columnas son iguales el determinante se anula debido a la propiedad de símbolo de Levi Civita con índices griegos.

5. El determinante de un producto es el producto de los determinantes

$$\det |\mathbb{A}\mathbb{B}| = \det |\mathbb{A}| \det |\mathbb{B}|$$

Antes de proceder a la demostración de este importante propiedad jugaremos un poco más con las propiedades de las matrices. Queremos señalar que si \mathbb{A} es una matriz $m \times n$ y \mathbb{B} es una matriz $n \times p$, entonces tendremos que

$$(\mathbb{A}\mathbb{B})^\alpha = \mathbb{A}^\alpha \mathbb{B}$$

esto es, que la α -ésima fila de $\mathbb{A}\mathbb{B}$ es igual a la multiplicación de la α -ésima fila de \mathbb{A} , por toda la matriz \mathbb{B} . Veamos

$$C_j^\alpha = (\mathbb{A}\mathbb{B})^\alpha_j = A_i^\alpha B_j^i$$

por lo tanto la α -ésima fila

$$C_j^\alpha = A_i^\alpha B_j^i \Rightarrow C_j^\alpha = (A_1^\alpha, A_2^\alpha, A_3^\alpha, \dots, A_n^\alpha) \begin{pmatrix} B_1^1 & B_2^1 & \dots & B_n^1 \\ B_1^2 & B_2^2 & & B_n^2 \\ \vdots & & \ddots & \\ B_1^n & B_2^n & & B_n^n \end{pmatrix}$$

$$\det |\mathbb{A}| \det |\mathbb{B}| = \det |\mathbb{A}| (\varepsilon_{ijk\dots} B_1^i B_2^j B_3^k \dots) = (\varepsilon_{ijk\dots} A_\alpha^i A_\beta^j A_\gamma^k \dots) (\varepsilon_{abc\dots} B_1^a B_2^b B_3^c \dots)$$

que siempre puede ser rearrreglado a

$$(\varepsilon^{ijk\dots} A_i^\alpha A_j^\beta A_k^\gamma \dots) (\varepsilon_{ijk\dots} B_1^i B_2^j B_3^k \dots) = A_i^\alpha B_1^i A_j^\beta B_2^j A_k^\gamma B_3^k \dots = \det |\mathbb{A}\mathbb{B}|.$$

Veamos este desarrollo en el caso de matrices 3×3

$$(\varepsilon^{123} A_1^1 A_2^2 A_3^3 + \varepsilon^{312} A_3^1 A_1^2 A_2^3 + \varepsilon^{231} A_2^1 A_3^2 A_1^3 + \varepsilon^{132} A_1^1 A_3^2 A_2^3 + \varepsilon^{321} A_3^1 A_2^2 A_1^3 + \varepsilon^{213} A_2^1 A_1^2 A_3^3) \\ \times (\varepsilon^{123} B_1^1 B_2^2 B_3^3 + \varepsilon^{312} B_3^1 B_1^2 B_2^3 + \varepsilon^{231} B_2^1 B_3^2 B_1^3 + \varepsilon^{132} B_1^1 B_3^2 B_2^3 + \varepsilon^{321} B_3^1 B_2^2 B_1^3 + \varepsilon^{213} B_2^1 B_1^2 B_3^3)$$

con lo cual

$$= A_1^1 A_2^2 A_3^3 (B_1^1 B_2^2 B_3^3 + B_3^1 B_1^2 B_2^3 + B_2^1 B_3^2 B_1^3 - B_1^1 B_3^2 B_2^3 - B_3^1 B_2^2 B_1^3 - B_2^1 B_1^2 B_3^3) \\ + A_3^1 A_1^2 A_2^3 (B_1^1 B_2^2 B_3^3 + B_3^1 B_1^2 B_2^3 + B_2^1 B_3^2 B_1^3 + B_1^1 B_3^2 B_2^3 + B_3^1 B_2^2 B_1^3 + B_2^1 B_1^2 B_3^3) \\ + A_2^1 A_3^2 A_1^3 (B_1^1 B_2^2 B_3^3 + B_3^1 B_1^2 B_2^3 + B_2^1 B_3^2 B_1^3 + B_1^1 B_3^2 B_2^3 + B_3^1 B_2^2 B_1^3 + B_2^1 B_1^2 B_3^3) \\ - A_1^1 A_3^2 A_2^3 (B_1^1 B_2^2 B_3^3 + B_3^1 B_1^2 B_2^3 + B_2^1 B_3^2 B_1^3 + B_1^1 B_3^2 B_2^3 + B_3^1 B_2^2 B_1^3 + B_2^1 B_1^2 B_3^3) \\ - A_3^1 A_2^2 A_1^3 (B_1^1 B_2^2 B_3^3 + B_3^1 B_1^2 B_2^3 + B_2^1 B_3^2 B_1^3 + B_1^1 B_3^2 B_2^3 + B_3^1 B_2^2 B_1^3 + B_2^1 B_1^2 B_3^3) \\ - A_2^1 A_1^2 A_3^3 (B_1^1 B_2^2 B_3^3 + B_3^1 B_1^2 B_2^3 + B_2^1 B_3^2 B_1^3 + B_1^1 B_3^2 B_2^3 + B_3^1 B_2^2 B_1^3 + B_2^1 B_1^2 B_3^3)$$

como son números se pueden arreglar de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
 &= A_1^1 A_2^2 A_3^3 (B_1^1 B_2^2 B_3^3 + B_1^2 B_2^3 B_3^1 + B_1^3 B_2^1 B_3^2 - B_1^1 B_2^3 B_3^2 - B_1^3 B_2^2 B_3^1 - B_1^2 B_2^1 B_3^3) \\
 &+ A_3^1 A_2^2 A_1^3 (B_1^1 B_2^2 B_3^3 + B_1^2 B_2^3 B_3^1 + B_1^3 B_2^1 B_3^2 - B_1^1 B_2^3 B_3^2 - B_1^3 B_2^2 B_3^1 - B_1^2 B_2^1 B_3^3) \\
 &+ A_2^1 A_3^2 A_1^3 (B_1^1 B_2^2 B_3^3 + B_1^2 B_2^3 B_3^1 + B_1^3 B_2^1 B_3^2 - B_1^1 B_2^3 B_3^2 - B_1^3 B_2^2 B_3^1 - B_1^2 B_2^1 B_3^3) \\
 &- A_1^1 A_3^2 A_2^3 (B_1^1 B_2^2 B_3^3 + B_1^2 B_2^3 B_3^1 + B_1^3 B_2^1 B_3^2 - B_1^1 B_2^3 B_3^2 - B_1^3 B_2^2 B_3^1 - B_1^2 B_2^1 B_3^3) \\
 &- A_3^1 A_2^2 A_1^3 (B_1^1 B_2^2 B_3^3 + B_1^2 B_2^3 B_3^1 + B_1^3 B_2^1 B_3^2 - B_1^1 B_2^3 B_3^2 - B_1^3 B_2^2 B_3^1 - B_1^2 B_2^1 B_3^3) \\
 &- A_2^1 A_1^2 A_3^3 (B_1^1 B_2^2 B_3^3 + B_1^2 B_2^3 B_3^1 + B_1^3 B_2^1 B_3^2 - B_1^1 B_2^3 B_3^2 - B_1^3 B_2^2 B_3^1 - B_1^2 B_2^1 B_3^3) \\
 &= \varepsilon_{ijk} A_\alpha^i B_1^\alpha A_\lambda^j B_2^\lambda A_\mu^k B_3^\mu
 \end{aligned}$$

4.5.3. Fórmula de Laplace

La fórmula de Laplace permite expresar el determinante de una matriz en términos de sus matrices menores o cofactores

$$\det[\mathbb{A}] = \sum_{j=1}^n A_j^i (A^c)_j^i, \text{ para cualquier } i$$

Por ejemplo, para la matriz

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

el desarrollo de Laplace para la primera fila ($i = 1$) es:

$$\begin{aligned}
 \det[\mathbb{A}] &= A_1^1 (A^c)_1^1 + A_2^1 (A^c)_2^1 + A_3^1 (A^c)_3^1 \\
 &= 3 \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - (-2) \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \\
 &= 3(7) + 2(14) + 2(-7) = 35.
 \end{aligned}$$

4.6. Un zoológico de matrices cuadradas

A continuación presentaremos un conjunto de matrices que serán de utilidad más adelante.

La matriz nula

$$A_j^i = 0 \forall i, j \Rightarrow A_j^i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

Diagonal a bloques

Podremos tener matrices diagonales a bloques, vale decir

$$D_j^i = \begin{pmatrix} D_1^1 & D_2^1 & 0 & 0 \\ D_1^2 & D_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_3^3 & D_4^3 \\ 0 & 0 & D_3^4 & D_4^4 \end{pmatrix}$$

Triangular superior e inferior

$$\check{D}_j^i = \begin{pmatrix} \check{D}_1^1 & \check{D}_2^1 & \check{D}_3^1 & \check{D}_4^1 \\ 0 & \check{D}_2^2 & \check{D}_3^2 & \check{D}_4^2 \\ 0 & 0 & \check{D}_3^3 & \check{D}_4^3 \\ 0 & 0 & 0 & \check{D}_4^4 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \hat{D}_j^i = \begin{pmatrix} \hat{D}_1^1 & 0 & 0 & 0 \\ \hat{D}_1^2 & \hat{D}_2^2 & 0 & 0 \\ \hat{D}_1^3 & \hat{D}_2^3 & \hat{D}_3^3 & 0 \\ \hat{D}_1^4 & \hat{D}_2^4 & \hat{D}_3^4 & \hat{D}_4^4 \end{pmatrix}$$

Matriz de cofactores

$$A_j^i = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad (A^c)_j^i = \begin{pmatrix} (A^c)_1^1 & (A^c)_2^1 & (A^c)_3^1 \\ (A^c)_1^2 & (A^c)_2^2 & (A^c)_3^2 \\ (A^c)_1^3 & (A^c)_2^3 & (A^c)_3^3 \end{pmatrix}$$

donde los $(A^c)_j^i$ forman la matriz de cofactores, y los cofactores son

$$\begin{aligned} (A^c)_1^1 &= (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_2^2 & a_3^2 \\ a_2^3 & a_3^3 \end{vmatrix} & (A^c)_2^1 &= (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_1^2 & a_3^2 \\ a_1^3 & a_3^3 \end{vmatrix} & (A^c)_3^1 &= (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_1^2 & a_2^2 \\ a_1^3 & a_2^3 \end{vmatrix} \\ (A^c)_1^2 &= (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} a_2^1 & a_3^1 \\ a_2^3 & a_3^3 \end{vmatrix} & (A^c)_2^2 &= (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} a_1^1 & a_3^1 \\ a_1^3 & a_3^3 \end{vmatrix} & (A^c)_3^2 &= (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^3 & a_2^3 \end{vmatrix} \\ (A^c)_1^3 &= (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} a_2^1 & a_3^1 \\ a_2^2 & a_3^2 \end{vmatrix} & (A^c)_2^3 &= (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} a_1^1 & a_3^1 \\ a_1^2 & a_3^3 \end{vmatrix} & (A^c)_3^3 &= (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_2^2 & a_2^3 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Matriz Adjunta

Llamaremos matriz adjunta, $\text{adj}[\mathbb{A}]$, a la traspuesta de la matriz de cofactores de una determinada matriz:

$$\text{adj}[\mathbb{A}] = (\mathbb{A}^c)^T \Rightarrow \text{adj}[A_j^i] = \left((A^c)_j^i \right)^T = (A^c)_i^j$$

Por ejemplo

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{adj}[\mathbb{A}] = \begin{pmatrix} -3 & 6 & -3 \\ 6 & -12 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix}$$

Una matriz será autoadjunta si $\text{adj}[\mathbb{A}] = \mathbb{A}$.

Matriz inversa

La matriz inversa de \mathbb{A} se puede calcular de la siguiente manera

$$\mathbb{A}^{-1} = \frac{\text{adj}[\mathbb{A}]}{\det[\mathbb{A}]}$$

Por ejemplo, para la matriz

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{A}^{-1} = \frac{\text{adj}[\mathbb{A}]}{\det[\mathbb{A}]} = \frac{1}{35} \begin{pmatrix} 7 & 6 & 2 \\ -14 & -2 & 11 \\ -7 & -11 & 8 \end{pmatrix}$$

Algunas propiedades

- $(\mathbb{A}^{-1})^{-1} = \mathbb{A}$
- $(\mathbb{A}^T)^{-1} = (\mathbb{A}^{-1})^T$
- $(\mathbb{A}^\dagger)^{-1} = (\mathbb{A}^{-1})^\dagger$
- $(\mathbb{A}\mathbb{B})^{-1} = \mathbb{B}^{-1}\mathbb{A}^{-1}$

Matriz singular

\mathbb{A} es singular si $\det[\mathbb{A}] = 0$. Además, si el determinante de la matriz \mathbb{A} es diferente de cero, entonces

$$\det|\mathbb{A}^{-1}| = \frac{1}{\det|\mathbb{A}|} = \det|\mathbb{A}|^{-1}.$$

Ejercicios

1. Evaluar los siguiente determinantes

$$(a) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & -3 & 4 & -2 \\ -2 & 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} \quad (b) \begin{vmatrix} gc & ge & a+ge & gb+ge \\ 0 & b & b & b \\ c & e & e & b+e \\ a & b & b+f & b+d \end{vmatrix}$$

2. Utilizando las propiedades de los terminantes resuelva para x

$$\begin{vmatrix} x+2 & x+4 & x-3 \\ x+3 & x & x+5 \\ x-2 & x-1 & x+1 \end{vmatrix} = 0$$

3. Considere las matrices

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -i & i \\ i & 0 & -i \\ -i & i & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \frac{1}{\sqrt{8}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -\sqrt{2} & -\sqrt{3} \\ 1 & \sqrt{6} & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Diga si son: (a) reales, (b) diagonales, (c) simétricas, (d) antisimétricas, (e) singulares, (f) ortogonales, (g) hemíticas, (h) antihermíticas, (i) unitarias o (j) normales.

4. Encuentre la matriz inversa de

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & -2 & -2 \\ -3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

4.7. Autovectores y Autovalores

4.7.1. Definiciones y Teoremas Preliminares

Llamaremos a $|\psi\rangle$ un autovector del operador \mathbb{A} si se cumple que

$$\mathbb{A} |\psi\rangle = \lambda |\psi\rangle$$

en este caso λ (que, en general será un número complejo) se denomina el autovalor correspondiente al autovector $|\psi\rangle$. La ecuación $\mathbb{A} |\psi\rangle = \lambda |\psi\rangle$ es conocida en la literatura como la ecuación de autovalores y se cumple para algunos valores particulares de los autovalores λ . El conjunto de los autovalores se denomina el espectro del operador \mathbb{A} .

Supongamos que $\mathbb{A} : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ y que $\dim \mathbf{V} = n$, supongamos además que una base ortogonal para \mathbf{V} es $\{|e_1\rangle, |e_2\rangle, |e_3\rangle, \dots, |e_n\rangle\}$. Por lo tanto la repercusión de esta ecuación sobre la representación matricial es la siguiente

$$\langle e^i | \mathbb{A} |e_j\rangle \langle e^j | |\psi\rangle = \langle e^i | \lambda |\psi\rangle = \lambda \langle e^i | |\psi\rangle \Rightarrow A_j^i c^j = \lambda c^i$$

claramente, si $\{|e_1\rangle, |e_2\rangle, |e_3\rangle, \dots, |e_n\rangle\}$ genera una representación diagonal de \mathbb{A} entonces

$$A_j^i \propto \delta_j^i \Rightarrow A_j^i c^j \propto \delta_j^i c^j = \lambda c^i \Rightarrow A_j^i \propto \lambda \delta_j^i.$$

Esto lo podemos resumir en el siguiente teorema que presentaremos sin demostración.

Teorema: Dado un operador lineal $\mathbb{A} : \mathbf{V}^n \rightarrow \mathbf{V}^n$, si la representación matricial de \mathbb{A} es diagonal, $\langle e^i | \mathbb{A} |e_j\rangle = A_j^i \propto \delta_j^i$, entonces existe una base ortogonal $\{|e_1\rangle, |e_2\rangle, |e_3\rangle, \dots, |e_n\rangle\}$ ⁵ y un conjunto de cantidades $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ tales que se cumple

$$\mathbb{A} |e_i\rangle = \lambda_i |e_i\rangle \quad \text{con } i = 1, 2, \dots, n. \blacktriangleleft$$

Igualmente se cumple que si existe una base ortogonal $\{|e_1\rangle, |e_2\rangle, |e_3\rangle, \dots, |e_n\rangle\}$ y un conjunto de cantidades $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ tales que satisfagan

$$\mathbb{A} |e_i\rangle = \lambda_i |e_i\rangle \quad \text{con } i = 1, 2, \dots, n$$

entonces se cumple que la representación matricial de \mathbb{A} es diagonal,

$$\langle e^i | \mathbb{A} |e_j\rangle = A_j^i = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n).$$

4.7.2. Algunos comentarios

1. Nótese que si $|\psi\rangle$ es autovector de \mathbb{A} para un determinado autovalor λ entonces $|\phi\rangle = \alpha |\psi\rangle$ (un vector proporcional a $|\psi\rangle$, con α un número complejo) también es un autovector para el mismo autovalor. Esto representa una incómoda ambigüedad: dos autovectores que corresponden al mismo autovalor. Un intento de eliminarla es **siempre** considerar vectores $|\psi\rangle$ normalizados, i.e. $\langle \psi | \psi \rangle = 1$. Sin embargo, no deja de ser un intento que no elimina la ambigüedad del todo porque siempre queda el ángulo de fase arbitrario. Esto es, el vector $e^{i\theta} |\psi\rangle$, con θ un número real arbitrario, tiene la misma norma del vector $|\psi\rangle$. Sin embargo esta arbitrariedad es inofensiva. En Mecánica Cuántica las predicciones obtenidas con $|\psi\rangle$ son las mismas que con $e^{i\theta} |\psi\rangle$.

⁵Realmente un conjunto de vectores linealmente independientes, pero como siempre se puede ortogonalizar mediante el método de Gram Smith, consideraremos que es una base ortogonal de entrada

- Un autovalor λ será *no degenerado* o *simple* si está asociado a un único autovector $|\psi\rangle$ ⁶ de lo contrario si denominará *degenerado* si existen dos o más autovectores de \mathbb{A} , linealmente independientes asociados al mismo autovalor λ . El *grado* (o el *orden*) de la *degeneración* es el número de vectores linealmente independientes que estén asociados al mencionado autovalor λ .
- El orden de degeneración de un autovalor λ expande un espacio vectorial $S(\lambda) \subset \mathbf{V}^n$ (denominado *autoespacio*) cuya dimensión es el orden de la degeneración. Esto es si λ es g -degenerado, entonces existen

$$\{|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, |\psi_3\rangle, \dots, |\psi_g\rangle\} \Rightarrow \mathbb{A}|\psi_i\rangle = \lambda|\psi_i\rangle$$

adicionalmente un autovector correspondiente al autovalor λ puede ser expresado como

$$|\psi\rangle = c^i |\psi_i\rangle \quad \text{con } i = 1, 2, \dots, g$$

con lo cual

$$\mathbb{A}|\psi\rangle = c^i \mathbb{A}|\psi_i\rangle = \lambda c^i |\psi_i\rangle = \lambda |\psi\rangle .$$

4.7.3. Algunos Ejemplos

- Reflexión respecto al plano xy :** Si $\mathbb{R} : \mathbf{V}^3 \rightarrow \mathbf{V}^3$ es tal que $\mathbb{R}|\psi\rangle = |\tilde{\psi}\rangle$ donde se ha realizado una reflexión en el plano xy . Esto es

$$\mathbb{R}|i\rangle = |i\rangle; \quad \mathbb{R}|j\rangle = |j\rangle; \quad \mathbb{R}|k\rangle = -|k\rangle$$

con $|i\rangle, |j\rangle, |k\rangle$ los vectores unitarios cartesianos. Es claro que cualquier vector en el plano xy será autovector de \mathbb{R} con un autovalor $\lambda = 1$, mientras que cualquier otro vector $|\psi\rangle \in \mathbf{V}^3$ y que no esté en el mencionado plano cumple con $|\psi\rangle = c|k\rangle$ y también será autovector de \mathbb{R} pero esta vez con un autovalor $\lambda = -1$.

- Dos visiones de Rotaciones de ángulo fijo θ :** La rotaciones de un vector en el plano pueden verse de dos maneras.

- Se considera el plano como un espacio vectorial *real* \mathbf{V}^2 con una base cartesiana canónica:

$$|i\rangle = (1, 0), \quad |j\rangle = (0, 1), \text{ esto es si}$$

$$\mathbb{R}|a\rangle = \lambda|a\rangle \Rightarrow \text{el ángulo de rotación} = n\pi \quad \text{con } n \text{ entero.}$$

- Igualmente si consideramos el plano complejo unidimensional, expresemos cualquier vector en el plano en su forma polar $|z\rangle = re^{i\theta}$ por lo cual

$$\mathbb{R}|z\rangle = re^{i(\theta+\alpha)} = e^{i\alpha}|z\rangle$$

si queremos $\lambda = e^{i\alpha}$ reales necesariamente $\alpha = n\pi$ con n entero.

- Autovalores y Autovectores de Proyectores.** Es interesante plantearse la ecuación de autovalores con la definición del proyector para un determinado *autoespacio*. Esto es dado $P_\psi = |\psi\rangle\langle\psi|$ si este proyector cumple con una ecuación de autovalores para un $|\varphi\rangle$ supuestamente arbitrario

$$P_\psi|\varphi\rangle = \lambda|\varphi\rangle \Rightarrow P_\psi|\varphi\rangle = (|\psi\rangle\langle\psi|)|\varphi\rangle \Rightarrow |\varphi\rangle \propto |\psi\rangle$$

⁶Con la arbitrariedad del calibre antes mencionado

es decir, necesariamente $|\varphi\rangle$ es colineal con $|\psi\rangle$. Más aún, si ahora el $|\varphi\rangle$ no es tan arbitrario sino que es ortogonal a $|\psi\rangle$, $\langle\psi|\varphi\rangle = 0 \Rightarrow \lambda = 0$, entonces el espectro del operador $P_\psi = |\psi\rangle\langle\psi|$ es 0 y 1, el primero de los cuales es infinitamente degenerado y el segundo es simple. Esto nos lleva a reflexionar que si existe un autovector de un determinado operador, entonces su autovalor es distinto de cero, pero pueden existir autovalores nulos que generan un autoespacio infinitamente degenerado.

4. **El operador diferenciación** $\mathbb{D}|f\rangle \rightarrow D(f) = f'$. Los autovectores del operador diferenciación necesariamente deben satisfacer la ecuación

$$\mathbb{D}|f\rangle = \lambda|f\rangle \rightarrow D(f)(x) = f'(x) = \lambda f(x),$$

la solución a esta ecuación será una exponencial. Esto es

$$|f\rangle \rightarrow f(x) = ce^{\lambda x}, \quad \text{con } c \neq 0,$$

las $f(x)$ se denominarán *autofunciones* del operador.

4.7.4. Autovalores, autovectores e independencia lineal

Uno de los teoremas más útiles e importantes tiene que ver con la independencia lineal de los autovectores correspondientes a distintos autovalores de un determinado operador lineal. Este importante teorema se puede concretar en.

Teorema: Sean $\{|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, |\psi_3\rangle, \dots, |\psi_k\rangle\}$ autovectores del operador $\mathbb{A} : \mathbf{V}^m \rightarrow \mathbf{V}^n$. Supongamos que existen k autovalores: $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k\}$, distintos correspondientes a cada uno de los autovectores $|\psi_j\rangle$, entonces los $\{|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, |\psi_3\rangle, \dots, |\psi_k\rangle\}$ son linealmente independientes.

Demostración La demostración de este teorema es por inducción y resulta elegante y sencilla.

- Primeramente demostramos que $j = 1$.

Obvio que el resultado se cumple y es trivial para el caso $k = 1$ (un autovector $|\psi_1\rangle$ que corresponde a un autovalor λ_1 es obvia y trivialmente linealmente independiente).

- Seguidamente supondremos que se cumple para $j = k - 1$.

Si existen $\{|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, |\psi_3\rangle, \dots, |\psi_{k-1}\rangle\}$ autovectores de \mathbb{A} correspondientes a $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{k-1}\}$ entonces los $\{|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, |\psi_3\rangle, \dots, |\psi_{k-1}\rangle\}$ son linealmente independientes.

- Ahora lo probaremos para $j = k$.

Por lo cual si tenemos k autovectores $\{|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, |\psi_3\rangle, \dots, |\psi_k\rangle\}$, podremos construir una combinación lineal con ellos, y si esa combinación lineal se anula serán linealmente independientes.

$$c^j |\psi_j\rangle = 0 \quad \text{con } j = 1, 2, \dots, k$$

al aplicar el operador \mathbb{A} a esa combinación lineal, obtenemos

$$c^j \mathbb{A} |\psi_j\rangle = 0 \Rightarrow c^j \lambda_j |\psi_j\rangle = 0$$

multiplicando por λ_k y restando miembro a miembro obtenemos

$$c^j (\lambda_j - \lambda_k) |\psi_j\rangle = 0 \quad \text{con } j = 1, 2, \dots, k - 1$$

(nótese que el último índice es $k-1$) pero, dado que los $k-1$ vectores $|\psi_j\rangle$ son linealmente independiente, entonces tendremos $k-1$ ecuaciones $c^j(\lambda_j - \lambda_k) = 0$, una para cada $j = 1, 2, \dots, k-1$. Dado que $\lambda_j \neq \lambda_k$ necesariamente llegamos a que $c^j = 0$ para $j = 1, 2, \dots, k-1$ y dado que

$$c^j |\psi_j\rangle = 0 \quad \text{con } j = 1, 2, \dots, k \Rightarrow c^j \neq 0$$

con lo cual si

$$c^j |\psi_j\rangle = 0 \Rightarrow c^j = 0 \quad \text{con } j = 1, 2, \dots, k$$

y los $\{|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, |\psi_3\rangle, \dots, |\psi_k\rangle\}$ son linealmente independientes y queda demostrado el teorema. ◀

Es importante acotar que el inverso de este teorema NO se cumple. Esto es, si $\mathbb{A} : \mathbf{V}^n \rightarrow \mathbf{V}^n$ tiene $\{|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, |\psi_3\rangle, \dots, |\psi_n\rangle\}$ autovectores linealmente independientes, NO se puede concluir que existan n autovalores $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ distintos correspondientes a cada uno de los autovectores $|\psi_j\rangle$.

El teorema anterior lo complementa el siguiente que lo presentaremos sin demostración. Este teorema será de gran utilidad en lo que sigue.

Teorema: Si la $\dim(\mathbf{V}^n) = n$ cualquier operador lineal $\mathbb{A} : \mathbf{V}^n \rightarrow \mathbf{V}^n$ tendrá un máximo de n autovalores distintos. Adicionalmente, si \mathbb{A} tiene *precisamente* n autovalores, $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$, entonces los correspondientes n autovectores, $\{|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, |\psi_3\rangle, \dots, |\psi_n\rangle\}$, forman una base para \mathbf{V}^n y la representación matricial, en esa base, del operador será diagonal

$$\langle \psi^i | \mathbb{A} | \psi_j \rangle = A_j^i = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n). \quad \blacktriangleleft$$

4.8. Autovalores y Autovectores de un operador

Una vez más, supongamos que $\mathbb{A} : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ y que $\dim \mathbf{V} = n$, y además $\{|e_1\rangle, |e_2\rangle, |e_3\rangle, \dots, |e_n\rangle\}$ es una base ortogonal para \mathbf{V} . Por lo tanto, la representación matricial de la ecuación de autovalores es la siguiente

$$\langle e^i | \mathbb{A} | e_j \rangle \langle e^j | \psi \rangle = \lambda \langle e^i | \psi \rangle \Rightarrow A_j^i c^j = \lambda c^i \Rightarrow (A_j^i - \lambda \delta_j^i) c^j = 0$$

con $j = 1, 2, \dots, n$. El conjunto de ecuaciones $(A_j^i - \lambda \delta_j^i) c^j = 0$ puede ser considerado un sistema (lineal y homogéneo) de ecuaciones con n incógnitas c^j .

4.8.1. El polinomio característico.

Dado que un sistema lineal y homogéneo de ecuaciones con n incógnitas tiene solución si el determinante de los coeficientes se anula, tendremos que

$$(A_j^i - \lambda \delta_j^i) c^j = 0 \Rightarrow \det[\mathbf{A} - \lambda \mathbf{1}] = 0 \Rightarrow P(\lambda) = \det[A_j^i - \lambda \delta_j^i] = 0$$

Esta ecuación se denomina ecuación característica (o secular) y a partir de ella emergen todos los autovalores (el espectro) del operador \mathbb{A} , esto es:

$$\det[A_j^i - \lambda \delta_j^i] = \begin{vmatrix} A_1^1 - \lambda & A_2^1 & \dots & A_n^1 \\ A_1^2 & A_2^2 - \lambda & & A_n^2 \\ \vdots & & \ddots & \\ A_1^n & A_2^n & & A_n^n - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

y tendrá como resultado un polinomio de grado n (el polinomio característico). Las raíces de este polinomio serán los autovalores que estamos buscando. Es claro que estas raíces podrán ser reales y distintas, algunas reales e iguales y otras imaginarias.

Es importante señalar que el polinomio característico será independiente de la base a la cual esté referida la representación matricial $\langle u^i | \mathbb{A} | u_j \rangle$ del operador \mathbb{A} .

4.8.2. Primero los autovalores, luego los autovectores

El procedimiento es el siguiente. Una vez obtenidos (los autovalores) las raíces del polinomio característico, se procede a determinar el autovector, $|\psi_j\rangle$, correspondiente a ese autovalor. Distinguiremos en esta determinación casos particulares dependiendo del tipo de raíz del polinomio característico. Ilustraremos estos casos con ejemplos específicos para el caso específico de matrices 3×3 .

1. Una matriz 3×3 con 3 autovalores reales distintos

$$\langle e^i | \mathbb{A} | e_j \rangle = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 20 \end{pmatrix} \Rightarrow \det [A_j^i - \lambda \delta_j^i] = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 3 \\ 1 & 2-\lambda & 3 \\ 3 & 3 & 20-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

con lo cual el polinomio característico queda expresado como

$$\lambda^3 - 24\lambda^2 + 65\lambda - 42 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 21) = 0$$

y es claro que tiene 3 raíces distintas. Para proceder a calcular los autovectores correspondientes a cada autovalor resolvemos la ecuación de autovalores para **cada** autovalor. Esto es

- a) $\lambda_1 = 1$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 2x^1 + x^2 + 3x^3 = x^1 \\ x^1 + 2x^2 + 3x^3 = x^2 \\ 3x^1 + 3x^2 + 20x^3 = x^3 \end{cases}$$

que constituye un sistema de ecuaciones algebraicas de 3 ecuaciones con 3 incógnitas. Resolviendo el sistema tendremos que

$$\epsilon^{(\lambda_1)} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

con α un escalar distinto de cero.

- b) $\lambda_2 = 2$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 2x^1 + x^2 + 3x^3 = 2x^1 \\ x^1 + 2x^2 + 3x^3 = 2x^2 \\ 3x^1 + 3x^2 + 20x^3 = 2x^3 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema tendremos que

$$\epsilon^{(\lambda_2)} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

c) $\lambda_3 = 21$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = 21 \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \iff \begin{array}{l} 2x^1 + x^2 + 3x^3 = 21x^1 \\ x^1 + 2x^2 + 3x^3 = 21x^2 \\ 3x^1 + 3x^2 + 20x^3 = 21x^3 \end{array}$$

Resolviendo el sistema

$$\varepsilon^{(\lambda_3)} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

2. Una matriz 3×3 con 2 autovalores reales distintos, es decir, una matriz con autovalores repetidos

$$\langle e^i | \mathbb{A} | e_j \rangle = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 4 & -1 & 0 \\ 1 & 7 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \det [A_j^i - \lambda \delta_j^i] = \begin{vmatrix} 4 - \lambda & -3 & 1 \\ 4 & -1 - \lambda & 0 \\ 1 & 7 & -4 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

con lo cual el polinomio característico queda expresado como

$$\lambda^3 + \lambda^2 - 5\lambda - 3 = (\lambda + 3)(\lambda - 1)^2 = 0$$

y es claro que tiene 2 raíces iguales y una distinta. En este caso $\lambda = 1$ es un autovalor degenerado de orden 2. Para proceder a calcular los autovectores correspondientes a cada autovalor resolvemos la ecuación de autovalores para **cada** autovalor. Esto es:

a) $\lambda_1 = -3$

$$\begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 4 & -1 & 0 \\ 1 & 7 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = -3 \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \iff \begin{array}{l} 4x^1 - 3x^2 + x^3 = -3x^1 \\ 4x^1 - x^2 = -3x^2 \\ x^1 + 7x^2 - 4x^3 = -3x^3 \end{array}$$

Resolviendo

$$\varepsilon^{(\lambda_1)} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 13 \end{pmatrix}$$

b) $\lambda_2 = 1$ (autovalor degenerado de orden 2)

$$\begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 4 & -1 & 0 \\ 1 & 7 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \iff \begin{array}{l} 4x^1 - 3x^2 + x^3 = x^1 \\ 4x^1 - x^2 = x^2 \\ x^1 + 7x^2 - 4x^3 = x^3 \end{array}$$

Resolviendo el sistema tendremos el segundo autovector

$$\varepsilon^{(\lambda_2)} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

3. Otra matriz 3×3 con 2 autovalores reales distintos, es decir, otra matriz con autovalores repetidos

$$\langle e^i | \mathbb{A} | e_j \rangle = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \det [A_j^i - \lambda \delta_j^i] = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 1 & 1 \\ 2 & 3 - \lambda & 2 \\ 3 & 3 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

con lo cual el polinomio característico es

$$\lambda^3 + \lambda^2 - 5\lambda - 3 = (\lambda - 7)(\lambda - 1)^2 = 0$$

que tiene 2 raíces iguales y una distinta. En este caso $\lambda = 1$ vuelve a ser un autovalor degenerado de orden 2. Volvemos a calcular los autovectores correspondientes a cada autovalor resolviendo la ecuación de autovalores para **cada** autovalor.

a) $\lambda_1 = 7$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = 7 \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 2x^1 + x^2 + x^3 = 7x^1 \\ 2x^1 + 3x^2 + 3x^3 = 7x^2 \\ 3x^1 + 3x^2 + 4x^3 = 7x^3 \end{cases}$$

Al resolver el sistema

$$\epsilon^{(\lambda_1)} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

b) $\lambda_2 = 1$. En este caso el autovalor degenerado de orden 2 presenta una pequeña patología. Veamos

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 2x^1 + x^2 + x^3 = x^1 \\ 2x^1 + 3x^2 + 3x^3 = x^2 \\ 3x^1 + 3x^2 + 4x^3 = x^3 \end{cases}$$

Resolviendo

$$\epsilon^{(\lambda_2)} = \begin{cases} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

con lo cual el autovector $\epsilon^{(\lambda_2)}$ correspondiente al autovalor $\lambda_2 = 1$ se podrá escribir como

$$\epsilon^{(\lambda_2)} = \alpha \epsilon_1^{(\lambda_2)} + \beta \epsilon_2^{(\lambda_2)} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

4. Una matriz 3×3 con 1 autovalor real y dos autovalores complejos

$$\langle e^i | A | e_j \rangle = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det [A_j^i - \lambda \delta_j^i] = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 & 3 \\ 3 & 1 - \lambda & 2 \\ 2 & 3 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

con lo cual el polinomio característico queda expresado como

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 - 15\lambda - 18 = (\lambda - 6)(\lambda^2 + 3\lambda + 3) = 0,$$

y es claro que tiene 2 raíces iguales y una distinta. En este caso $\lambda = 6$ es un autovalor real. Adicionalmente existen dos autovalores complejos, uno el complejo conjugado del otro: $\lambda_* = -\frac{1}{2}(3 + i\sqrt{3})$

y $\bar{\lambda}_* = -\frac{1}{2}(3 - i\sqrt{3})$. Para proceder a calcular los autovectores correspondientes a cada autovalor resolvemos la ecuación de autovalores para **cada** autovalor real. En este caso existe **un único** autovalor real $\lambda = 6$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \iff \begin{aligned} 4x^1 - 3x^2 + x^3 &= 6x^1 \\ 4x^1 - x^2 &= 6x^2 \\ x^1 + 7x^2 - 4x^3 &= 6x^3 \end{aligned}$$

Tendremos que para $\lambda = 6$

$$\epsilon^{(\lambda=6)} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

4.8.3. Ejercicios

- Encuentre los autovalores y autovectores de la siguiente matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

y verifique si los autovectores son ortogonales entre ellos.

- Demuestre que la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -6 & 4 & 4 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

no tiene tres autovectores linealmente independientes y que cualquier autovector tiene la forma:

$$\begin{pmatrix} \lambda \\ 3\lambda - 2\nu \\ \nu \end{pmatrix}$$

- Construimos un sistema con tres partículas rígidamente unidas, colocadas en tres puntos distintos de la siguiente forma

$$m_1 = 1 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad m_2 = 2 \rightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad m_3 = 1 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- Encuentre la matriz del tensor de inercia.
- Diagonalice esa matriz y encuentre los ejes principales de inercia.

- Suponga que un operador \mathbb{L} puede ser escrito como la composición de otros dos operadores $\mathbb{L} = \mathbb{L}_- \mathbb{L}_+$ con $[\mathbb{L}_-, \mathbb{L}_+] = \mathbb{I}$. Demostrar que

$$\text{Si } \mathbb{L}|x\rangle = \lambda|x\rangle \quad \text{y} \quad |y\rangle = \mathbb{L}_+|x\rangle \quad \text{entonces} \quad \mathbb{L}|y\rangle = (\lambda + 1)|y\rangle$$

y, del mismo modo, demuestre que

$$\text{Si } \mathbb{L}|x\rangle = \lambda|x\rangle \quad \text{y} \quad |yz\rangle = \mathbb{L}_-|x\rangle \quad \text{entonces} \quad \mathbb{L}|z\rangle = (\lambda - 1)|z\rangle$$

Por ello es costumbre denominar a \mathbb{L}_+ y \mathbb{L}_- los operadores de “subidas” y de “bajada” respectivamente, ya que ellos construyen otros vectores con autovalores mayores (menores) en una unidad al vector operado.

5. En Mecánica Cuántica, el problema del oscilador armónico simple puede ser representado por un problema de autovalores

$$\mathbb{L}|\psi\rangle = \lambda|\psi\rangle \Rightarrow \langle x|\mathbb{L}|\psi\rangle = \lambda\langle x|\psi\rangle \Leftrightarrow \mathbb{L}\psi(x) = \lambda\psi(x) \quad \text{donde} \quad \mathbb{L} \Leftrightarrow \frac{d^2}{dx^2} + \frac{x^2}{4} + \frac{1}{2}$$

Si construimos un par de operadores

$$\mathbb{L}_+ = \frac{x}{2} + \frac{d}{dx} \quad \text{y} \quad \mathbb{L}_- = \frac{x}{2} - \frac{d}{dx}$$

Utilice los resultados del problema anterior y construya las nuevas autofunciones de \mathbb{L} con sus autovalores.

4.9. Autovalores y Autovectores de Matrices Importantes

En esta sección presentaremos ejemplos de autovalores y autovectores de matrices de importancia en el campo de la Física.

4.9.1. Autovalores y Autovectores de Matrices Similares

Supongamos la representación matricial de un determinado operador lineal $\mathbb{A} : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ ($\dim \mathbf{V} = n$), y además que $\{|e_1\rangle, |e_2\rangle, |e_3\rangle, \dots, |e_n\rangle\}$ y $\{|w_1\rangle, |w_2\rangle, |w_3\rangle, \dots, |w_n\rangle\}$ son dos bases ortogonales para \mathbf{V} . Entonces

$$\begin{aligned} \mathbb{A}|e_j\rangle &= A_j^l |e_l\rangle & \text{con } A_j^i &= \langle e^i | \mathbb{A} |e_j\rangle \\ & \text{y} \\ \mathbb{A}|w_j\rangle &= \tilde{A}_j^l |w_l\rangle & \text{con } \tilde{A}_j^i &= \langle w^i | \mathbb{A} |w_j\rangle. \end{aligned}$$

Ahora bien, cada uno de los vectores base $\{|e_j\rangle\}$ y $\{|w_j\rangle\}$ puede ser expresado en las otras bases $\{|w_j\rangle\}$ y $\{|e_j\rangle\}$ respectivamente como

$$\left. \begin{aligned} |w_j\rangle &= \alpha_j^l |e_l\rangle \\ |e_l\rangle &= \beta_l^m |w_m\rangle \end{aligned} \right\} \Rightarrow |w_j\rangle = \alpha_j^l \beta_l^m |w_m\rangle \Rightarrow \alpha_j^l \beta_l^m = \beta_l^m \alpha_j^l = \delta_j^m \Rightarrow \beta_l^m = (\alpha_l^m)^{-1}$$

Las cantidades α_j^l son escalares que pueden ser “arreglados” como una matriz. Esa matriz, adicionalmente es no singular⁷ por ser una la representación de una transformación lineal que aplica una base en otra. Entonces además

$$|w_j\rangle = \alpha_j^l |e_l\rangle \Rightarrow \mathbb{A}|w_j\rangle = \alpha_j^l \mathbb{A}|e_l\rangle \Rightarrow \tilde{A}_j^l |w_l\rangle = \alpha_j^m A_m^k |e_k\rangle = \underbrace{\alpha_j^m A_m^k \beta_k^h}_{\delta_j^h} |w_h\rangle$$

con lo cual

$$\tilde{A}_j^l = \alpha_j^m A_m^k \beta_k^l \Rightarrow \tilde{A}_j^l = \beta_k^l A_m^k \alpha_j^m \Rightarrow \tilde{A}_j^l = (\alpha_k^l)^{-1} A_m^k \alpha_j^m$$

que puede ser expresada en el lenguaje de operadores, finalmente como

$$\tilde{\mathbb{A}} = \mathbb{C}^{-1} \mathbb{A} \mathbb{C} \quad \Leftrightarrow \quad \langle w^i | \mathbb{A} |w_j\rangle = (\alpha_k^i)^{-1} \langle e^k | \mathbb{A} |e_m\rangle \alpha_j^m$$

⁷ $\det(\alpha_j^i) \neq 0$

De esta manera hemos demostrado el siguiente teorema.

Teorema: Dadas dos matrices, $n \times n$, A_j^l y \tilde{A}_j^i las cuales corresponden a la representación matricial de un operador \mathbb{A} en las bases ortogonales $\{|e_1\rangle, |e_2\rangle, |e_3\rangle, \dots, |e_n\rangle\}$ y $\{|w_1\rangle, |w_2\rangle, |w_3\rangle, \dots, |w_n\rangle\}$, respectivamente. Entonces existe una matriz α_j^l , no singular, tal que

$$\tilde{\mathbb{A}} = \mathbb{C}^{-1} \mathbb{A} \mathbb{C} \iff \langle w^i | \mathbb{A} | w_j \rangle = (\alpha_k^i)^{-1} \langle e^k | \mathbb{A} | e_m \rangle \alpha_j^m. \blacktriangleleft$$

El inverso de este teorema también se cumple. Vale decir

Teorema: Si dos matrices $n \times n$, A_j^l y \tilde{A}_j^i , están relacionadas por la ecuación

$$\tilde{\mathbb{A}} = \mathbb{C}^{-1} \mathbb{A} \mathbb{C} \iff \langle w^i | \tilde{\mathbb{A}} | w_j \rangle = (\alpha_k^i)^{-1} \langle w^k | \mathbb{A} | w_m \rangle \alpha_j^m$$

donde \mathbb{C} es una matriz no singular, entonces $\tilde{\mathbb{A}}$ y \mathbb{A} representan el mismo operador lineal.

Demostración: Para proceder a demostrarlo supondremos $\mathbb{A} : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ y que $\dim \mathbf{V} = n$, supongamos además que $\{|e_1\rangle, |e_2\rangle, |e_3\rangle, \dots, |e_n\rangle\}$ y $\{|w_1\rangle, |w_2\rangle, |w_3\rangle, \dots, |w_n\rangle\}$ son bases de \mathbf{V} de tal forma

$$\left. \begin{array}{l} |w_j\rangle = \alpha_j^l |e_l\rangle \\ |e_l\rangle = \beta_l^m |w_m\rangle \end{array} \right\} \Rightarrow |w_j\rangle = \alpha_j^l \beta_l^m |w_m\rangle \Rightarrow \alpha_j^l \beta_l^m = \beta_l^m \alpha_j^l = \delta_j^m \Rightarrow \beta_l^m = (\alpha_l^m)^{-1}$$

donde

$$\alpha_j^l = \langle e^l | w_j \rangle \quad \text{y} \quad \beta_l^m = (\alpha_l^m)^{-1} = \langle w^m | e_l \rangle$$

Supongamos que

$$\begin{aligned} \mathbb{A} |e_j\rangle &= A_j^l |e_l\rangle & \text{con } A_j^i &= \langle e^i | \mathbb{A} | e_j \rangle \\ & \text{y} \\ \tilde{\mathbb{A}} |w_j\rangle &= \tilde{A}_j^l |w_l\rangle & \text{con } \tilde{A}_j^i &= \langle w^i | \tilde{\mathbb{A}} | w_j \rangle \end{aligned}$$

al actuar \mathbb{A} sobre $|w_j\rangle$ tendremos

$$\mathbb{A} |w_j\rangle = \alpha_j^l \mathbb{A} |e_l\rangle = \alpha_j^l A_l^k |e_k\rangle = \alpha_j^l A_l^k \beta_k^m |w_m\rangle = \beta_k^m A_l^k \alpha_j^l |w_m\rangle = \underbrace{(\alpha_k^m)^{-1} A_l^k \alpha_j^l}_{\langle w^i | \tilde{\mathbb{A}} | w_j \rangle} |w_m\rangle$$

que es exactamente la representación matricial de $\tilde{\mathbb{A}}$. Con lo cual $\mathbb{A} \equiv \tilde{\mathbb{A}}$ y queda demostrado el teorema. \blacktriangleleft

Definición: Dos matrices, A_l^k y \tilde{A}_j^i , $n \times n$, se denominarán similares si existe una matriz no singular α_k^i tal que

$$\tilde{\mathbb{A}} = \mathbb{C}^{-1} \mathbb{A} \mathbb{C} \iff \langle w^i | \tilde{\mathbb{A}} | w_j \rangle = (\alpha_k^i)^{-1} \langle w^k | \mathbb{A} | w_m \rangle \alpha_j^m. \blacktriangleleft$$

Podemos juntar los dos teoremas anteriores y afirmar que

Teorema: Dos matrices, A_l^k y \tilde{A}_j^i , $n \times n$, similares representan la misma transformación lineal.

Teorema: Dos matrices, A_l^k y \tilde{A}_j^i , $n \times n$, similares tienen el mismo determinante.

Demostración: La demostración es inmediata y proviene de las propiedades del determinante de un producto:

$$\det [\tilde{\mathbf{A}}] = \det [\mathbf{C}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{C}] = \det [\mathbf{C}^{-1}] \det [\mathbf{A}] \det [\mathbf{C}] = \det [\mathbf{A}] . \blacktriangleleft$$

Con lo cual es inmediato el siguiente Teorema.

Teorema: Dos matrices, A_l^k y \tilde{A}_j^i , $n \times n$, similares tienen el mismo polinomio característico y con ello el mismo conjunto de autovalores

Demostración: Es inmediato verificar que

$$\tilde{\mathbf{A}} - \lambda \mathbf{1} = \mathbf{C}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{C} - \lambda \mathbf{1} = \mathbf{C}^{-1} (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{1}) \mathbf{C}$$

y dado que

$$\det [\tilde{\mathbf{A}} - \lambda \mathbf{1}] = \det [\mathbf{C}^{-1} (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{1}) \mathbf{C}] = \det [\mathbf{C}^{-1}] \det [\mathbf{A} - \lambda \mathbf{1}] \det [\mathbf{C}] = \det [\mathbf{A} - \lambda \mathbf{1}]$$

ambas matrices, $\tilde{\mathbf{A}}$ y \mathbf{A} , tendrán el mismo polinomio característico y con ello el mismo conjunto de autovalores. \blacktriangleleft

Todos los teoremas de esta sección pueden ser resumidos en el siguiente teorema

Teorema: Sea un operador lineal $\mathbb{A} : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ y $\dim \mathbf{V} = n$, supongamos además que el polinomio característico tiene n raíces distintas, $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$. Entonces tendremos que:

- Los autovectores $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle, \dots, |u_n\rangle\}$ correspondientes a los $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$, forman una base para V .
- La representación matricial del operador $\langle u^k | \mathbb{A} | u_m \rangle$ en la base de autovectores $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle, \dots, |u_n\rangle\}$, será diagonal

$$\tilde{A}_m^k = \Lambda_m^k = \langle u^k | \mathbb{A} | u_m \rangle = \text{diag} (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$$

- Cualquier otra representación matricial, $\langle e^k | \mathbb{A} | e_m \rangle$, del operador \mathbb{A} en otra base de \mathbf{V} , estará relacionada con la representación diagonal mediante una transformación de similaridad

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{C}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{C} \iff \text{diag} (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = (\alpha_k^i)^{-1} \langle e^k | \mathbb{A} | e_m \rangle \alpha_j^m$$

donde α_j^m es la matriz, no singular y por lo tanto invertible, de cantidades que relacionan ambas bases

$$\left. \begin{array}{l} |u_j\rangle = \alpha_j^l |e_l\rangle \\ |e_l\rangle = \beta_l^m |u_m\rangle \end{array} \right\} \iff \beta_l^m = (\alpha_l^m)^{-1} \Rightarrow \beta_l^m \alpha_j^l = \delta_j^m$$

La demostración, en términos de los teoremas anteriores es inmediata y se la dejamos como ejercicio al lector.

Una clase importante de transformaciones de similaridad son aquellas en las que \mathbf{C} es unitaria, en este caso se tiene que $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{C}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{C} = \mathbf{C}^\dagger \mathbf{A} \mathbf{C}$. Además, si la base original $\{\mathbf{e}_i\}$ es ortonormal y la matriz \mathbf{C} es unitaria, entonces, la nueva base será ortonormal. Las siguientes propiedades pueden ser de gran utilidad:

- Si \mathbf{A} es hermítica (anti-hermítica) entonces $\mathbf{\Lambda}$ es hermítica (anti-hermítica).

$$\mathbf{\Lambda}^\dagger = (\mathbf{C}^\dagger \mathbf{A} \mathbf{C})^\dagger = \mathbf{C}^\dagger \mathbf{A}^\dagger \mathbf{C} = \pm \mathbf{C}^\dagger \mathbf{A} \mathbf{C} = \pm \mathbf{\Lambda}$$

- Si \mathbf{A} es unitaria, es decir $\mathbf{A}^\dagger = \mathbf{A}^{-1}$, entonces $\mathbf{\Lambda}$ es unitaria.

$$\mathbf{\Lambda}^\dagger \mathbf{\Lambda} = (\mathbf{C}^\dagger \mathbf{A} \mathbf{C})^\dagger (\mathbf{C}^\dagger \mathbf{A} \mathbf{C}) = \mathbf{C}^\dagger \mathbf{A}^\dagger \mathbf{C} \mathbf{C}^\dagger \mathbf{A} \mathbf{C} = \mathbf{C}^\dagger \mathbf{A}^\dagger \mathbf{A} \mathbf{C} = \mathbf{C}^\dagger \mathbf{I} \mathbf{C} = \mathbf{I}$$

Veamos el siguiente ejemplo, dada la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Al ser \mathbf{A} simétrica, podemos diagonalizarla a través de la transformación $\mathbf{C}^\dagger \mathbf{A} \mathbf{C}$, donde \mathbf{C} se construye con los vectores normalizados de \mathbf{A} como columnas.

$$\mathbf{C} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A pesar que los autovalores de \mathbf{A} son degenerados ($\lambda = 4, -2, -2$) sus tres autovectores son linealmente independientes, por lo tanto:

$$\mathbf{C}^\dagger \mathbf{A} \mathbf{C} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

4.9.2. Autovalores y Autovectores de matrices Hermíticas

Tal y como mencionamos con anterioridad, un operador hermítico cumple con

$$\mathbb{A}^\dagger = \mathbb{A} \Rightarrow (A^\dagger)_j^i = \langle e^i | \mathbb{A}^\dagger | e_j \rangle = \langle e^j | \mathbb{A} | e_i \rangle^* = (A_i^j)^*$$

Esto es: el hermítico conjugado de una matriz, es su traspuesta conjugada. Por lo tanto las matrices hermíticas son simétricas respecto a la diagonal y los elementos de la diagonal son números reales.

Por su parte, llamaremos antihermítico a un operador que cumpla con

$$\mathbb{A}^\dagger = -\mathbb{A} \Rightarrow (A^\dagger)_j^i = \langle e^i | \mathbb{A}^\dagger | e_j \rangle = -\langle e^j | \mathbb{A} | e_i \rangle^* = -(A_i^j)^*$$

Teorema: Suponga un operador Hermítico $\mathbb{A} = \mathbb{A}^\dagger$ tiene por autovalores $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$. Entonces:

- Los autovalores $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ son reales.
- Los autovectores $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle, \dots, |u_n\rangle\}$, correspondientes a cada uno de los autovalores, serán ortogonales.

Demostración:

- Para demostrar que los autovalores $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ son reales, proyectamos la ecuación de autovalores en cada uno de los autovectores:

$$\mathbb{A} | \psi \rangle = \lambda | \psi \rangle \Rightarrow \langle \psi | \mathbb{A} | \psi \rangle = \lambda \langle \psi | \psi \rangle$$

Ahora bien, dado que $\langle \psi | \psi \rangle$ es real, si demostramos que $\langle \psi | \mathbb{A} | \psi \rangle$ estará demostrado que λ lo será también. Pero como \mathbb{A} es hermítico

$$\langle \psi | \mathbb{A} | \psi \rangle^* = \langle \psi | \mathbb{A}^\dagger | \psi \rangle = \langle \psi | \mathbb{A} | \psi \rangle \Rightarrow \langle \psi | \mathbb{A} | \psi \rangle \in \mathfrak{R}$$

y por consiguiente los autovalores $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ son reales. Más aún, si \mathbb{A} es hermítico, y como sus autovalores son reales entonces

$$\langle \psi | \mathbb{A}^\dagger = \lambda^* \langle \psi | = \lambda \langle \psi | \Rightarrow \langle \psi | \mathbb{A} | \phi \rangle = \lambda \langle \psi | \phi \rangle$$

- Para demostrar que los autovectores $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle, \dots, |u_n\rangle\}$ son ortogonales, consideremos dos autovectores con sus correspondientes autovalores de tal forma que se cumplen las siguientes ecuaciones

$$\mathbb{A} | \psi \rangle = \lambda | \psi \rangle \quad \text{y} \quad \mathbb{A} | \varphi \rangle = \mu | \varphi \rangle$$

pero como \mathbb{A} es hermítico entonces se cumple que $\langle \varphi | \mathbb{A} = \mu \langle \varphi |$, multiplicando a la izquierda por $| \psi \rangle$ y a $\langle \psi | \mathbb{A} = \lambda \langle \psi |$ por $\langle \varphi |$ a la derecha.

$$\left. \begin{array}{l} \langle \varphi | \mathbb{A} = \mu \langle \varphi | \\ \langle \varphi | (\mathbb{A} | \psi \rangle = \lambda | \psi \rangle) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \langle \varphi | \mathbb{A} | \psi \rangle = \mu \langle \varphi | \psi \rangle \\ \langle \varphi | \mathbb{A} | \psi \rangle = \lambda \langle \varphi | \psi \rangle \end{array} \right\} \Rightarrow (\lambda - \mu) \langle \varphi | \psi \rangle = 0$$

y como hemos supuesto que $\lambda \neq \mu$ con lo cual $\langle \varphi | \psi \rangle = 0$ los autovectores correspondientes a dos autovalores son ortogonales. ◀

Existen situaciones en las cuales un determinado autovalor $\lambda = \lambda_0$ es degenerado. Consideremos una matriz $n \times n$, A_j^i , por lo cual el polinomio característico $P(\lambda) = \det [A_j^i - \lambda \delta_j^i] = 0$ tendrá una raíz degenerada de orden $k \leq n$. Entonces el siguiente teorema garantiza la existencia de al menos un subespacio $\mathbf{S}(\lambda_0) \subset \mathbf{V}^n$.

Teorema: Sea un operador lineal $\mathbb{A} : \mathbf{V}^n \rightarrow \mathbf{V}^n$ con una representación matricial $n \times n$ tal que su polinomio $\mathcal{P}(\lambda) = \det [A_j^i - \lambda \delta_j^i] = 0$ tiene al menos una raíz degenerada $\lambda = \lambda_0$, de orden $k \leq n$. Entonces existen k autovectores, no triviales, que cumplen con

$$\mathbb{A} | \psi_j \rangle = \lambda_0 | \psi_j \rangle \quad \text{con } j = 1, 2, \dots, k.$$

Demostración:

- La demostración también emerge de una variante del *Método de Inducción Completa*. Para ello, probamos que se cumple para $j = 1$. Esta afirmación es obvia. Si existe un $\lambda = \lambda_0$ existe un λ_0 existe un $| \psi_j \rangle$, tal que cumple con la ecuación anterior el es linealmente independiente con él mismo.

Suponemos que se cumple para $1 \leq j = m \leq k$. Es decir, existen m autovectores $| \psi_j \rangle$ de \mathbb{A} para el autovalor λ_0 . Definamos un subespacio $\mathbf{S}_{\lambda_0} = \mathbf{S}(\lambda_0) \subset \mathbf{V}^n$ donde

$$| \psi_j \rangle \in \mathbf{S}_{\lambda_0} / \mathbb{A} | \psi_j \rangle = \lambda_0 | \psi_j \rangle \Rightarrow \mathbb{A} | \psi_j \rangle \in \mathbf{S}_{\lambda_0} \quad \text{con } j = 1, 2, \dots, m$$

por lo tanto, podremos separar \mathbf{V}^n como una suma directa entre el subespacio \mathbf{S}_{λ_0} y, \mathcal{N} su complemento ortogonal

$$\mathbf{V}^n = \mathbf{S}_{\lambda_0} \oplus \mathcal{N} / \mathbb{A} | \psi_j \rangle = \lambda_0 | \psi_j \rangle \quad \wedge \quad | \phi \rangle \in \mathcal{N} \Rightarrow \langle \phi | \psi_j \rangle = 0$$

claramente \mathbf{S}_{λ_0} es un subespacio invariante de \mathbb{A} por cuanto su acción se circunscribe dentro del mismo subespacio \mathbf{S}_{λ_0} . Mostraremos que se cumple para operadores hermíticos, por cuanto no es verdad en general. Entonces

$$\left. \begin{array}{l} \langle \phi | \psi_j \rangle = 0 \\ \wedge \\ \mathbb{A} | \psi_j \rangle = \lambda_0 | \psi_j \rangle \end{array} \right\} \Rightarrow \langle \psi_j | \phi \rangle = 0 = \langle \psi_j | \mathbb{A}^\dagger | \phi \rangle = \langle \psi_j | \mathbb{A} | \phi \rangle$$

de donde se concluye que el vector es ortogonal a \mathbf{S}_{λ_0} y por lo tanto está en el complemento ortogonal, $\mathbb{A} | \phi \rangle \in \mathcal{N}$ como, por hipótesis $| \phi \rangle \in \mathcal{N}$. Esto implica que \mathcal{N} también es un espacio invariante del operador hermítico \mathbb{A} . Entonces, el espacio \mathbf{V}^n puede expresarse como una suma directa de los dos subespacios invariantes respecto al operador lineal \mathbb{A} y su representación matricial en la base de autovectores tendrá la forma de una matriz diagonal a bloques:

$$\langle u^j | \mathbb{A} | u_i \rangle = A_i^j \rightarrow \begin{pmatrix} Q_1^1 & \cdots & Q_m^1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ Q_1^m & & Q_m^m & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & R_{m+1}^{m+1} & \cdots & R_n^{m+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & R_{m+1}^n & \cdots & R_n^n \end{pmatrix}$$

donde Q_β^α y R_ν^μ son matrices $m \times m$ y $(n-m) \times (n-m)$, respectivamente. La matriz Q_β^α opera en \mathbf{S}_{λ_0} mientras que R_ν^μ actúa sobre el complemento ortogonal \mathcal{N} . El polinomio característico de \mathbb{A} puede expresarse como

$$\mathcal{P}(\lambda) = \det [A_j^i - \lambda \delta_j^i] = 0 \Rightarrow \mathcal{P}(\lambda) = \det [Q_j^i - \lambda \delta_j^i] \det [R_j^i - \lambda \delta_j^i] = 0$$

y como $\lambda = \lambda_0$ es la raíz múltiple del polinomio característico que anula el $\det [Q_j^i - \lambda \delta_j^i]$ tendremos que

$$\det [Q_j^i - \lambda_0 \delta_j^i] = 0 \Rightarrow \mathcal{P}(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^m \mathcal{F}(\lambda) \quad \text{con } \mathcal{F}(\lambda_0) \neq 0$$

donde λ_0 no es raíz del polinomio $\mathcal{F}(\lambda)$. Ahora bien, para que se cumpla para $j = k$ el polinomio característico es

$$j = k \Rightarrow \mathcal{P}(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^k \mathcal{R}(\lambda) \Rightarrow (\lambda - \lambda_0)^m \mathcal{F}(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^k \mathcal{R}(\lambda)$$

otra vez λ_0 no es raíz del polinomio $\mathcal{R}(\lambda)$. La ecuación anterior se cumple para todo λ en particular para $\lambda = \lambda_0$. Por lo tanto,

$$1 = (\lambda - \lambda_0)^{k-m} \frac{\mathcal{R}(\lambda)}{\mathcal{F}(\lambda)}$$

Es claro que $\lambda = \lambda_0$ obliga a $k = m$. ◀

4.9.3. Autovalores y Autovectores de matrices Unitarias

Tal y como mencionamos anteriormente, un operador será unitario si su inversa es igual a su adjunto. Esto es

$$\mathbb{U}^{-1} = \mathbb{U}^\dagger \Rightarrow \mathbb{U}^\dagger \mathbb{U} = \mathbb{U} \mathbb{U}^\dagger = \mathbb{I}.$$

Dado que los operadores unitarios conservan la norma de los vectores sobre los cuales ellos actúan, i.e.

$$\left. \begin{aligned} |\tilde{x}\rangle &= \mathbb{U} |x\rangle \\ |\tilde{y}\rangle &= \mathbb{U} |y\rangle \end{aligned} \right\} \Rightarrow \langle \tilde{y} | \tilde{x} \rangle = \langle y | \mathbb{U}^\dagger \mathbb{U} |x\rangle = \langle y | x \rangle$$

son elementos naturales para representar cambios de base dentro de un espacio vectorial. De lo anterior se deduce que si $\{|\hat{e}_1\rangle, |\hat{e}_2\rangle, |\hat{e}_3\rangle, \dots, |\hat{e}_n\rangle\}$ es una base ortonormal, el conjunto de vectores transformados, $|\tilde{e}_j\rangle = \mathbb{U} |\hat{e}_j\rangle$, también son ortonormales:

$$|\tilde{e}_j\rangle = \mathbb{U} |\hat{e}_j\rangle \Rightarrow \langle \tilde{e}^i | \tilde{e}_j \rangle = \langle \tilde{e}^i | \mathbb{U} |\hat{e}_j\rangle = \langle \hat{e}^i | \mathbb{U}^\dagger \mathbb{U} |\hat{e}_j\rangle = \delta_j^i$$

Bases y operadores unitarios

Los operadores unitarios aplican vectores base de un espacio vectorial en otra. El siguiente teorema lo ilustra.

Teorema: La condición necesaria y suficiente para que un operador $\mathbb{U} : \mathbf{V}^n \rightarrow \mathbf{V}^n$ sea unitario es que aplique vectores de una base ortonormal $\{|\hat{e}_1\rangle, |\hat{e}_2\rangle, |\hat{e}_3\rangle, \dots, |\hat{e}_n\rangle\}$ en otra de $\{|\tilde{e}_1\rangle, |\tilde{e}_2\rangle, |\tilde{e}_3\rangle, \dots, |\tilde{e}_n\rangle\}$ también ortonormal.

Demostración: Demostremos primero la condición necesaria. Si es unitario aplica una base en otra. Esto es, supongamos que los vectores $\{|\hat{e}_j\rangle\}$ forman una base ortonormal para \mathbf{V}^n . Sean $|\psi\rangle$, y $\mathbb{U}^\dagger |\psi\rangle \in \mathbf{V}^n$. Estos vectores pueden ser expresados en términos de la base $\{|\hat{e}_j\rangle\}$ de \mathbf{V}^n . Por lo tanto, si seleccionamos $\mathbb{U}^\dagger |\psi\rangle$ se cumple que

$$\mathbb{U}^\dagger |\psi\rangle = c^j |\hat{e}_j\rangle \Rightarrow \mathbb{U} \mathbb{U}^\dagger |\psi\rangle = c^j \mathbb{U} |\hat{e}_j\rangle = c^j |\tilde{e}_j\rangle \Rightarrow |\psi\rangle = c^j |\tilde{e}_j\rangle$$

donde hemos aplicado el operador \mathbb{U} a la ecuación $\mathbb{U}^\dagger |\psi\rangle = c^j |\hat{e}_j\rangle$ y el resultado es que el otro vector, $|\psi\rangle$, también se pudo expresar como combinación lineal de los vectores transformados $\{|\tilde{e}_j\rangle\}$ de la base $\{|\hat{e}_j\rangle\}$. Y por lo tanto, los $\{|\tilde{e}_j\rangle\}$ también constituyen una base. Es decir, los operadores unitarios aplican una base ortonormal en otra.

La condición de suficiencia (Si aplica una base en otra es unitario) se puede demostrar como sigue. Si $\{|\hat{e}_j\rangle\}$ y $\{|\tilde{e}_j\rangle\}$ son bases ortonormales de \mathbf{V}^n y una es la transformada de la otra implica que

$$|\tilde{e}_j\rangle = \mathbb{U} |\hat{e}_j\rangle; \quad \text{y} \quad \langle \tilde{e}_j | = \langle \hat{e}_j | \mathbb{U}^\dagger$$

con

$$\langle \hat{e}^i | \hat{e}_j \rangle = \delta_j^i; \quad |\hat{e}_j\rangle \langle \hat{e}^j | = \mathbb{I} \quad \langle \tilde{e}^i | \tilde{e}_j \rangle = \delta_j^i; \quad |\tilde{e}_j\rangle \langle \tilde{e}^j | = \mathbb{I}$$

por lo tanto,

$$\mathbb{U}^\dagger \mathbb{U} |\hat{e}_j\rangle = \mathbb{U}^\dagger |\tilde{e}_j\rangle = |\hat{e}_k\rangle \langle \hat{e}^k | \mathbb{U}^\dagger |\tilde{e}_j\rangle = |\hat{e}_k\rangle \langle \tilde{e}^k | \tilde{e}_j \rangle = |\hat{e}_k\rangle \delta_j^k = |\hat{e}_j\rangle$$

Esto significa que $\mathbb{U}^\dagger \mathbb{U} = \mathbb{I}$. ◀

De un modo equivalente, se puede demostrar que $\mathbb{U} \mathbb{U}^\dagger = \mathbb{I}$. Veamos:

$$\mathbb{U}^\dagger |\tilde{e}_j\rangle = |\hat{e}_k\rangle \langle \hat{e}^k | \mathbb{U}^\dagger |\tilde{e}_j\rangle = |\hat{e}_k\rangle \langle \tilde{e}^k | \tilde{e}_j \rangle$$

y ahora, aplicando el operador \mathbb{U} a esta ecuación, tenemos

$$\mathbb{U} \mathbb{U}^\dagger |\tilde{e}_j\rangle = \mathbb{U} |\hat{e}_k\rangle \langle \tilde{e}^k | \tilde{e}_j \rangle = |\tilde{e}_k\rangle \langle \tilde{e}^k | \tilde{e}_j \rangle = |\tilde{e}_j\rangle$$

Esto significa que está demostrado que \mathbb{U} es unitario: $\mathbb{U}^\dagger \mathbb{U} = \mathbb{U} \mathbb{U}^\dagger = \mathbb{I}$.

Matrices unitarias

La representación de una matriz unitaria en una base $\{|e_j\rangle\}$ implica

$$U_j^k = \langle e^k | \mathbb{U} | e_j \rangle; \quad \langle e^m | \mathbb{U}^\dagger | e_j \rangle = \langle e^j | \mathbb{U} | e_m \rangle^* = (U_m^j)^*$$

$$\delta_j^k = \langle e^k | e_j \rangle = \langle e^k | \mathbb{I} | e_j \rangle = \langle e^k | \mathbb{U} \mathbb{U}^\dagger | e_j \rangle = \langle e^k | \mathbb{U} | e_m \rangle \langle e^m | \mathbb{U}^\dagger | e_j \rangle = \sum_m U_m^k (U_m^j)^*$$

$$\delta_j^k = \langle e^k | e_j \rangle = \langle e^k | \mathbb{I} | e_j \rangle = \langle e^k | \mathbb{U}^\dagger \mathbb{U} | e_j \rangle = \langle e^k | \mathbb{U}^\dagger | e_m \rangle \langle e^m | \mathbb{U} | e_j \rangle = \sum_m (U_m^k)^* U_j^m$$

Una vez más, dado un operador lineal \mathbb{A} , la representación matricial del hermítico conjugado de ese operador \mathbb{A}^\dagger es la traspuesta conjugada de la matriz que representa al operador \mathbb{A} . En el caso de operadores unitarios.

Con lo cual es fácilmente verificable que una matriz sea unitaria. Basta comprobar que la suma de los productos de los elementos de una columna (fila) de la matriz con los complejos conjugados de otra columna (fila). Esa suma de productos será

1. cero si las columnas (filas) son distintas
2. uno si las columnas (filas) son iguales

Ejemplos de matrices unitarias son las llamadas matrices de rotación. Alrededor del eje z tendremos que

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) & 0 \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y también la matriz de rotación de una partícula de espín $\frac{1}{2}$ en el espacio de estados

$$R^{(1/2)}(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{pmatrix} e^{-\frac{i}{2}(\alpha+\gamma)} \cos(\beta) & -e^{\frac{i}{2}(\alpha-\gamma)} \text{sen}(\beta) \\ e^{-\frac{i}{2}(\alpha-\gamma)} \text{sen}(\beta) & e^{\frac{i}{2}(\alpha+\gamma)} \cos(\beta) \end{pmatrix}$$

claramente se cumple la regla expuesta arriba.

Autovalores y Autovectores de matrices Unitarias

Si $|\psi_u\rangle$ es un autovector, normalizado del operador \mathbb{U} correspondiente a un autovalor u tendremos que norma al cuadrado será igual a

$$\mathbb{U} |\psi_u\rangle = u |\psi_u\rangle \Rightarrow \langle \psi_u | \mathbb{U}^\dagger \mathbb{U} | \psi_u \rangle = 1 = u^* u \langle \psi_u | \psi_u \rangle = u^* u \Rightarrow u = e^{i\varphi_u}$$

con φ_u una función real. Por lo cual podemos concluir que, necesariamente, los autovalores de los operadores unitarios serán números complejos de módulo 1. Cuando los autovalores son diferentes, digamos $w \neq u$, entonces $\langle \psi_w | \psi_u \rangle = 0$. Con lo cual los autovectores de un operador unitarios son ortogonales.

Transformación unitaria de operadores

Hemos visto como las transformaciones unitarias permiten construir bases ortogonales $\{|\tilde{e}_m\rangle\}$ para el espacio vectorial \mathbf{V}^n partiendo de otra base $\{|e_m\rangle\}$ también ortogonal. En esta subsección mostraremos como transforman los operadores lineales bajo transformaciones unitarias.

Definición: Dadas dos bases ortonormales $\{|\hat{e}_j\rangle\}$ y $\{|\tilde{e}_k\rangle\}$ en \mathbf{V}^n con $|\tilde{e}_j\rangle = \mathbb{U}|e_j\rangle$, un operador lineal unitario $\mathbb{U} : \mathbf{V}^n \rightarrow \mathbf{V}^n$ y un operador lineal $\mathbb{A} : \mathbf{V}^n \rightarrow \mathbf{V}^n$.

Definiremos al operador transformado $\tilde{\mathbb{A}} : \mathbf{V}^n \rightarrow \mathbf{V}^n$ como aquel cuya representación matricial en la base $\{|\tilde{e}_k\rangle\}$ es la misma que en la base $\{|\hat{e}_j\rangle\}$: $\langle \tilde{e}^j | \tilde{\mathbb{A}} | \tilde{e}_i \rangle = \langle \hat{e}^j | \mathbb{A} | \hat{e}_i \rangle$. ◀

A partir de esta definición es fácil concluir que

$$\langle \tilde{e}^j | \tilde{\mathbb{A}} | \tilde{e}_i \rangle = \langle \hat{e}^j | \mathbb{U}^\dagger \tilde{\mathbb{A}} \mathbb{U} | \hat{e}_i \rangle = \langle \hat{e}^j | \mathbb{A} | \hat{e}_i \rangle \Rightarrow \mathbb{U}^\dagger \tilde{\mathbb{A}} \mathbb{U} = \mathbb{A} \iff \tilde{\mathbb{A}} = \mathbb{U} \mathbb{A} \mathbb{U}^\dagger$$

Por lo tanto, la ecuación $\tilde{\mathbb{A}} = \mathbb{U} \mathbb{A} \mathbb{U}^\dagger$ corresponde a la definición de la transformación de un operador \mathbb{A} mediante un operador unitario \mathbb{U}^\dagger .

Es fácil identificar las propiedades de estos operadores transformados:

- **Hermítico conjugado y funciones de un operador transformado:**

$$\left(\tilde{\mathbb{A}}\right)^\dagger = \left(\mathbb{U} \mathbb{A} \mathbb{U}^\dagger\right)^\dagger = \mathbb{U}^\dagger \mathbb{A}^\dagger \mathbb{U} = \widetilde{\left(\mathbb{A}^\dagger\right)}$$

en particular se sigue de esta propiedad que si $\mathbb{A} = \mathbb{A}^\dagger$, es hermítico también lo será $\tilde{\mathbb{A}}$

$$\mathbb{A} = \mathbb{A}^\dagger \iff \tilde{\mathbb{A}} = \left(\tilde{\mathbb{A}}\right)^\dagger$$

Del mismo modo

$$\left(\tilde{\mathbb{A}}\right)^2 = \left(\mathbb{U} \mathbb{A} \mathbb{U}^\dagger\right) \left(\mathbb{U} \mathbb{A} \mathbb{U}^\dagger\right) = \mathbb{U} \mathbb{A}^2 \mathbb{U}^\dagger = \widetilde{\left(\mathbb{A}^2\right)}$$

con lo cual

$$\left(\tilde{\mathbb{A}}\right)^n = \left(\mathbb{U} \mathbb{A} \mathbb{U}^\dagger\right)^{n \cdot 2} \left(\mathbb{U} \mathbb{A} \mathbb{U}^\dagger\right) = \mathbb{U} \mathbb{A}^n \mathbb{U}^\dagger = \widetilde{\left(\mathbb{A}^n\right)} \Rightarrow \tilde{\mathcal{F}}(\mathbb{A}) = \mathcal{F}\left(\tilde{\mathbb{A}}\right)$$

donde $\mathcal{F}(\mathbb{A})$ es una función del operador \mathbb{A} .

- **Autovalores y autovectores de un operador transformado**

Será un autovector $|\phi_\chi\rangle$ de \mathbb{A} correspondiente a un autovalor χ , y sea $|\tilde{\phi}_\chi\rangle$ el transformado de $|\phi_\chi\rangle$ mediante el operador unitario \mathbb{U} . Entonces

$$\mathbb{A} |\phi_\chi\rangle = \chi |\phi_\chi\rangle \Rightarrow \tilde{\mathbb{A}} |\tilde{\phi}_\chi\rangle = \left(\mathbb{U} \mathbb{A} \mathbb{U}^\dagger\right) \mathbb{U} |\phi_\chi\rangle = \mathbb{U} \mathbb{A} |\phi_\chi\rangle = \chi \mathbb{U} |\phi_\chi\rangle = \chi |\tilde{\phi}_\chi\rangle,$$

con lo cual es claro que $|\tilde{\phi}_\chi\rangle$ es un autovector de $\tilde{\mathbb{A}}$ con el mismo autovalor χ : $|\tilde{\phi}_\chi\rangle = \chi |\tilde{\phi}_\chi\rangle$. Equivalentemente podemos afirmar que los autovectores transformados de \mathbb{A} , serán autovectores del operador transformado $\tilde{\mathbb{A}}$.

4.10. Conjunto completo de observables que conmutan

Definición: Diremos que un operador $\mathbb{A} : \mathbf{V}^n \rightarrow \mathbf{V}^n$ es un *observable* si el conjunto de autovectores $\{|u_{i(\mu)}\rangle\}$ de un operador hermítico \mathbb{A} , forman una base de \mathbf{V}^n .

$$\mathbb{A} |u_{i(\mu)}\rangle = a_i |u_{i(\mu)}\rangle \Rightarrow |u_{i(\mu)}\rangle \langle u^{i(\mu)}| = 1 \iff \langle u^{i(\mu)} | u_{j(\nu)} \rangle = \delta_j^i \delta_\nu^\mu$$

donde el índice μ indica el grado de degeneración del autovalor a_i . ◀

Un ejemplo trivial de un observable lo constituyen los proyectores, $\mathbb{P}_{|\psi\rangle} = |\psi\rangle \langle \psi|$ con $\langle \psi | \psi \rangle = 1$. Claramente, la ecuación de autovalores para un proyector obliga a que tenga dos autovalores 0 y 1. El autovalor nulo es infinitamente degenerado y está asociado a todos los vectores ortogonales a $|\psi\rangle$, mientras que el autovalor 1 corresponde a un autovalor simple y está asociado a todos los vectores colineales al mismo vector $|\psi\rangle$. Esto es

$$\mathbb{P}_{|\psi\rangle} |\psi\rangle = |\psi\rangle \quad \text{y} \quad \mathbb{P}_{|\psi\rangle} |\phi\rangle = 0 \quad \text{si} \quad \langle \psi | \phi \rangle = 0$$

Más aún, sea un vector arbitrario $|\varphi\rangle \in \mathbf{V}^n$. Siempre se podrá expresar como

$$|\varphi\rangle = \mathbb{P}_{|\psi\rangle} |\varphi\rangle + (\mathbb{I} - \mathbb{P}_{|\psi\rangle}) |\varphi\rangle \Rightarrow \mathbb{P}_{|\psi\rangle} (|\varphi\rangle) = \mathbb{P}_{|\psi\rangle} |\varphi\rangle + (\mathbb{I} - \mathbb{P}_{|\psi\rangle}) |\varphi\rangle$$

$$\mathbb{P}_{|\psi\rangle} |\varphi\rangle = \mathbb{P}_{|\psi\rangle} (\mathbb{P}_{|\psi\rangle} |\varphi\rangle) + (\mathbb{P}_{|\psi\rangle} - \mathbb{P}_{|\psi\rangle}^2) |\varphi\rangle = \mathbb{P}_{|\psi\rangle} |\varphi\rangle \implies \mathbb{P}_{|\psi\rangle} (\mathbb{P}_{|\psi\rangle} |\varphi\rangle) = \mathbb{P}_{|\psi\rangle} |\varphi\rangle,$$

ya que $\mathbb{P}_{|\psi\rangle}^2 = \mathbb{P}_{|\psi\rangle}$, por definición de proyector. Entonces, se deduce que $\mathbb{P}_{|\psi\rangle} |\varphi\rangle$ es un autovector de $\mathbb{P}_{|\psi\rangle}$ con autovalor 1. Igualmente $(\mathbb{I} - \mathbb{P}_{|\psi\rangle}) |\varphi\rangle$ es un autovector de $\mathbb{P}_{|\psi\rangle}$ con autovalor 0, y la demostración es inmediata

$$\mathbb{P}_{|\psi\rangle} (\mathbb{I} - \mathbb{P}_{|\psi\rangle}) |\varphi\rangle = (\mathbb{P}_{|\psi\rangle} - \mathbb{P}_{|\psi\rangle}^2) |\varphi\rangle = 0.$$

Para el caso de autoespacios correspondientes a autovalores degenerados se puede definir un observable \mathbb{A} de la forma

$$\mathbb{A} = \sum_i a_i \mathbb{P}_i \quad \text{con} \quad \mathbb{P}_i = \left(| \psi^{(\mu)} \rangle \langle \psi^{(\mu)} | \right)_i \quad \text{y} \quad \mu = 1, 2, \dots, k.$$

4.10.1. Observables que Conmutan

Teorema: Si dos operadores lineales \mathbb{A} y \mathbb{B} , operadores hermíticos, conmutan, $[\mathbb{A}, \mathbb{B}] = 0$, y $|\psi\rangle$ es autovector de \mathbb{A} con autovalor a , entonces $\mathbb{B} |\psi\rangle$ también será autovector de \mathbb{A} con el mismo autovalor a .

Demostración: La demostración es sencilla

$$\mathbb{A} |\psi\rangle = a |\psi\rangle \Rightarrow \mathbb{B} (\mathbb{A} |\psi\rangle) = a (\mathbb{B} |\psi\rangle) \Rightarrow \mathbb{B} \mathbb{A} |\psi\rangle = \mathbb{A} (\mathbb{B} |\psi\rangle) = a (\mathbb{B} |\psi\rangle) \quad \blacktriangleleft$$

Ahora bien, de esta situación se pueden distinguir un par de casos:

- si el autovalor a es no degenerado los autovectores asociados con este autovalor son, por definición, colineales con $|\psi\rangle$. Por lo tanto $\mathbb{B} |\psi\rangle$, será necesariamente colineal con $|\psi\rangle$. La conclusión a esta afirmación es que NECESARIAMENTE $|\psi\rangle$ es autovector de \mathbb{B} .
- si el autovalor a se degenerado, $\mathbb{B} |\psi\rangle \in \mathbf{S}_a$, es decir $\mathbb{B} |\psi\rangle$ está en el autoespacio \mathbf{S}_a con lo cual \mathbf{S}_a es globalmente invariante bajo la acción de \mathbb{B} .

Teorema: Si dos observables \mathbb{A} y \mathbb{B} conmutan, $[\mathbb{A}, \mathbb{B}] = 0$, y si $|\psi_1\rangle$ y $|\psi_2\rangle$ son autovectores de \mathbb{A} para autovalores distintos, entonces el elemento de matriz $\langle \psi^1 | \mathbb{B} | \psi_2 \rangle = 0$

Demostración: Si $\mathbb{A} |\psi_1\rangle = a_1 |\psi_1\rangle$ y $\mathbb{A} |\psi_2\rangle = a_2 |\psi_2\rangle$ entonces

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \psi^1 | [\mathbb{A}, \mathbb{B}] | \psi_2 \rangle = \langle \psi^1 | \mathbb{A}\mathbb{B} - \mathbb{B}\mathbb{A} | \psi_2 \rangle = (\langle \psi^1 | \mathbb{A}) \mathbb{B} | \psi_2 \rangle - \langle \psi^1 | \mathbb{B} (\mathbb{A} | \psi_2 \rangle) \\ &= a_1 \langle \psi^1 | \mathbb{B} | \psi_2 \rangle - a_2 \langle \psi^1 | \mathbb{B} | \psi_2 \rangle = (a_1 - a_2) \langle \psi^1 | \mathbb{B} | \psi_2 \rangle \Rightarrow \langle \psi^1 | \mathbb{B} | \psi_2 \rangle = 0. \blacktriangleleft \end{aligned}$$

Teorema: Si dos observables \mathbb{A} y \mathbb{B} , operadores hermíticos, conmutan, $[\mathbb{A}, \mathbb{B}] = 0$, los autovectores $\{|\psi_i\rangle\}$ comunes a \mathbb{A} y \mathbb{B} constituyen una base ortonormal para \mathbf{V}^n .

Demostración: Denotemos los autovectores de \mathbb{A} como $|\psi_{i(\mu)}\rangle$, de tal modo

$$\mathbb{A} |\psi_{i(\mu)}\rangle = a_i |\psi_{i(\mu)}\rangle \quad \text{donde } i = 1, 2, \dots, n - k_n + 1 \quad \text{y } \mu = 1, 2, \dots, k_n$$

k_n indica el orden de la degeneración de un determinado autovalor a_n . Dado que \mathbb{A} es un observable los $|\psi_{i(\mu)}\rangle$ forman una base, claramente,

$$\langle \psi^{i(\mu)} | \psi_{j(\nu)} \rangle = \delta_j^i \delta_\nu^\mu$$

y dado que los elementos de matriz $\langle \psi^{i(\nu)} | \mathbb{B} | \psi_{j(\nu)} \rangle = \delta_j^i$ esto quiere decir que los elementos $\langle \psi^{i(\mu)} | \mathbb{B} | \psi_{j(\nu)} \rangle = B_{j(\nu)}^{i(\mu)}$ serán nulos para $i \neq j$ pero no podemos decir nada *a priori* para el caso $\mu \neq \nu$ y $i = j$. Entonces, al ordenar la base, en general

$$|\psi_{1(1)}\rangle, |\psi_{1(2)}\rangle, \dots, |\psi_{1(k_1)}\rangle, |\psi_{2(1)}\rangle, |\psi_{2(2)}\rangle, \dots, |\psi_{2(k_2)}\rangle, \dots, |\psi_{3(1)}\rangle, \dots, |\psi_{n-k_n(1)}\rangle$$

para el caso que consideraremos será

$$|\psi_{1(1)}\rangle, |\psi_{1(2)}\rangle, |\psi_{1(3)}\rangle, |\psi_{2(1)}\rangle, |\psi_{2(2)}\rangle, |\psi_{3(1)}\rangle, |\psi_{4(1)}\rangle, |\psi_{4(2)}\rangle, |\psi_{5(1)}\rangle \cdot \blacktriangleleft$$

La representación matricial de \mathbb{B} en esa base, $\langle \psi^{i(\mu)} | \mathbb{B} | \psi_{j(\nu)} \rangle$, tendrá la forma de una matriz diagonal a bloques

$$\left(\begin{array}{ccc|cc|c|cc|c} B_{1(1)}^1 & B_{1(2)}^1 & B_{1(3)}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ B_{1(1)}^1 & B_{1(2)}^1 & B_{1(3)}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ B_{1(1)}^1 & B_{1(2)}^1 & B_{1(3)}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & B_{2(1)}^2 & B_{2(2)}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B_{2(1)}^2 & B_{2(2)}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B_{3(1)}^3 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B_{4(1)}^4 & B_{4(2)}^4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B_{4(1)}^4 & B_{4(2)}^4 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B_{5(1)}^5 \end{array} \right)$$

Tal y como hemos mencionado los subespacios: e_1, e_2 , y e_4 corresponden a los autovalores degenerados a_1, a_2 , y a_4 (de orden 3, 2 y 2 respectivamente).

Una vez más surgen dos casos a analizar:

- Si a_n es un autovalor no degenerado, entonces existe un único autovector asociado a este autovalor (la dimensión del autoespacio es 1 esto es $k_j = 1$ y no hace falta). Esto corresponde al ejemplo hipotético de arriba para los autovalores simples a_3 , y a_5 .

- Si a_n es un autovalor degenerado, entonces existe un conjunto de autovectores asociados a este autovalor a_n (en este caso la dimensión del autoespacio es k_n). Como los $|\psi_{j(\mu)}\rangle$ son autovectores de \mathbb{A} su representación matricial será diagonal a bloques. Ahora bien, como el autoespacio \mathbf{S}_a es globalmente invariante bajo la acción de \mathbb{B} y $B_{j(\mu)}^{i(\mu)} = \langle \psi^{i(\mu)} | \mathbb{B} | \psi_{j(\mu)} \rangle$ es hermítico, por ser \mathbb{B} hermítico entonces \mathbb{B} es diagonalizable dentro del bloque que la define. Es decir, se podrá conseguir una base $|\chi_{j(\mu)}\rangle$ tal que la representación matricial de \mathbb{B} en esa base es diagonal

$$B_j^{i(\mu)} = \langle \psi^{i(\mu)} | \mathbb{B} | \psi_{j(\mu)} \rangle \implies \langle \chi^{i(\mu)} | \mathbb{B} | \chi_{j(\mu)} \rangle = \tilde{B}_{j(\mu)}^{i(\mu)} = b_{j(\mu)} \delta_j^i$$

que no es otra cosa que los vectores $|\chi_{j(\mu)}\rangle$ serán autovectores de \mathbb{B}

$$\mathbb{B} |\chi_{j(\mu)}\rangle = b_{j(\mu)} |\chi_{j(\mu)}\rangle .$$

Es importante recalcar que los autovectores $|\psi_{j(\mu)}\rangle$ de \mathbb{A} asociados con un autovalor degenerado NO son necesariamente autovectores de \mathbb{B} . Sólo que como \mathbb{B} es hermítico puede ser diagonalizado dentro del autoespacio.

De ahora en adelante denotaremos los autovectores comunes a dos operadores \mathbb{A} y \mathbb{B} con distintos autovalores como $|u_{i|j(\mu)}\rangle$ tal que

$$\mathbb{A} |u_{n|m(\mu)}\rangle = a_n |u_{n|m(\mu)}\rangle \quad \text{y} \quad \mathbb{B} |u_{n|m(\mu)}\rangle = b_m |u_{n|m(\mu)}\rangle$$

donde hemos dejado “espacio” para permitir la degeneración la cual será indicada por el índice μ .

La prueba del inverso del teorema anterior es bien simple

Teorema: Si existe una base de autovectores $\{|u_{j(\mu)}\rangle\}$ comunes a \mathbb{A} y \mathbb{B} , entonces \mathbb{A} y \mathbb{B} conmutan, $[\mathbb{A}, \mathbb{B}] = 0$

Demostración: Es claro que

$$\begin{aligned} \mathbb{A}\mathbb{B} |u_{n|m(\mu)}\rangle &= b_m \mathbb{A} |u_{n|m(\mu)}\rangle = b_m a_n |u_{n|m(\mu)}\rangle \\ \mathbb{B}\mathbb{A} |u_{n|m(\mu)}\rangle &= a_n \mathbb{B} |u_{n|m(\mu)}\rangle = a_n b_m |u_{n|m(\mu)}\rangle \end{aligned}$$

restando miembro a miembro obtenemos de manera inmediata

$$(\mathbb{A}\mathbb{B} - \mathbb{B}\mathbb{A}) |u_{n|m(\mu)}\rangle = [\mathbb{A}, \mathbb{B}] |u_{n|m(\mu)}\rangle = (b_m a_n - a_n b_m) |u_{n|m(\mu)}\rangle = 0 . \blacktriangleleft$$

Definición: Diremos que $\{\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C}, \mathbb{D} \dots\}$ constituye un conjunto completo de observables que conmutan si:

1. Obviamente los operadores del conjunto conmutan entre ellos:

$$[\mathbb{A}, \mathbb{B}] = [\mathbb{A}, \mathbb{C}] = [\mathbb{A}, \mathbb{D}] = [\mathbb{B}, \mathbb{C}] = [\mathbb{B}, \mathbb{D}] = [\mathbb{C}, \mathbb{D}] = \dots = 0$$

2. Al especificar el conjunto de autovalores para los operadores

$$\{a_n, b_m, c_k, d_l, \dots\}$$

se especifica **de manera unívoca** un único autovector común a todos estos operadores

$$\{a_n, b_m, c_k, d_l, \dots\} \implies |u_{n|m|k|l\dots}(\mu)\rangle . \blacktriangleleft$$

4.10.2. Ejemplos

Analicemos los siguientes ejemplos.

1. Considere, que el espacio de estados para un determinado sistema físico viene expandido por una base ortonormal $\{|\xi_1\rangle, |\xi_2\rangle, |\xi_3\rangle\}$. Definimos dos operadores \mathbb{L}_z y \mathbb{S} de la siguiente manera

$$\begin{aligned}\mathbb{L}_z |\xi_1\rangle &= |\xi_1\rangle; & \mathbb{L}_z |\xi_2\rangle &= 0; & \mathbb{L}_z |\xi_3\rangle &= -|\xi_3\rangle \\ \mathbb{S} |\xi_1\rangle &= |\xi_3\rangle; & \mathbb{S} |\xi_2\rangle &= |\xi_2\rangle; & \mathbb{S} |\xi_3\rangle &= |\xi_1\rangle\end{aligned}$$

En la base ortonormal $\{|\xi_1\rangle, |\xi_2\rangle, |\xi_3\rangle\}$ las representaciones matriciales para $\mathbb{L}_z, \mathbb{L}_z^2, \mathbb{S}$ y \mathbb{S}^2 serán las siguientes

$$\begin{aligned}\langle \xi^i | \mathbb{L}_z | \xi_j \rangle &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, & \langle \xi^i | \mathbb{L}_z^2 | \xi_j \rangle &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \langle \xi^i | \mathbb{S} | \xi_j \rangle &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \langle \xi^i | \mathbb{S}^2 | \xi_j \rangle &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Es claro que estas matrices son reales y simétricas y, por lo tanto, son hermíticas y, al ser el espacio de dimensión finita, deben ser diagonalizables y sus autovectores formarán base para ese espacio. Por lo tanto, $\mathbb{L}_z, \mathbb{L}_z^2, \mathbb{S}$ y \mathbb{S}^2 son observables.

¿Cuál será la forma más general de una representación matricial de un operador que conmute con \mathbb{L}_z ?

Notamos que los vectores de la base ortonormal $\{|\xi_1\rangle, |\xi_2\rangle, |\xi_3\rangle\}$ son autovectores para \mathbb{L}_z con autovalores $\{1, 0, -1\}$, con lo cual su representación matricial tiene que ser diagonal. Recuerde que si dos observables \mathbb{A} y \mathbb{B} conmutan, $[\mathbb{A}, \mathbb{B}] = 0$, y si $|\psi_1\rangle$ y $|\psi_2\rangle$ son autovectores de \mathbb{A} para autovalores distintos, entonces el elemento de matriz $\langle \psi^1 | \mathbb{B} | \psi_2 \rangle = 0$, con lo cual

$$[\mathbb{M}, \mathbb{L}_z] = 0 \Leftrightarrow \langle \xi^i | \mathbb{M} | \xi_j \rangle = \begin{pmatrix} M_1^1 & 0 & 0 \\ 0 & M_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & M_3^3 \end{pmatrix},$$

Esto se desprende de manera directa de

$$0 = \langle \xi^i | [\mathbb{M}, \mathbb{L}_z] | \xi_j \rangle = \langle \xi^i | \mathbb{M} \mathbb{L}_z - \mathbb{L}_z \mathbb{M} | \xi_j \rangle = (\lambda_j - \lambda_i) \langle \xi^i | \mathbb{M} | \xi_j \rangle \quad \text{con } (\lambda_j - \lambda_i) \neq 0 \quad \text{para } i \neq j$$

Si nos planteamos la misma pregunta para \mathbb{L}_z^2 , vemos que sus autovalores son $\{1, 0\}$. Esto es

$$\mathbb{L}_z^2 |\xi_1\rangle = |\xi_1\rangle; \quad \mathbb{L}_z^2 |\xi_2\rangle = 0; \quad \mathbb{L}_z^2 |\xi_3\rangle = |\xi_3\rangle;$$

con lo cual tendremos que la representación matricial para ese operador que conmute con \mathbb{L}_z^2 , no es diagonal. Esto es

$$[\mathbb{N}, \mathbb{L}_z^2] = 0 \Leftrightarrow \langle \xi^i | \mathbb{N} | \xi_j \rangle = \begin{pmatrix} N_1^1 & 0 & N_3^1 \\ 0 & N_2^2 & 0 \\ N_1^3 & 0 & N_3^3 \end{pmatrix},$$

ya que

$$0 = \langle \xi^1 | [\mathbb{N}, \mathbb{L}_z^2] | \xi_3 \rangle \Rightarrow \langle \xi^1 | \mathbb{N} | \xi_3 \rangle = \langle \xi^1 | \mathbb{N} | \xi_3 \rangle$$

y vale para cualquier elemento N_3^1 (y equivalentemente para N_1^3).

Adicionalmente, si ordenamos la base de autovectores de \mathbb{L}_z , como $\{|\xi_1\rangle, |\xi_3\rangle, |\xi_2\rangle\}$ tendremos como representación matricial diagonal a bloques, correspondiente a un autorvalor degenerado 1

$$\langle \xi^i | \tilde{\mathbb{N}} | \xi_j \rangle = \begin{pmatrix} N_1^1 & N_3^1 & 0 \\ N_1^3 & N_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & N_3^3 \end{pmatrix}.$$

Finalmente, la representación matricial, más general, de un operador que conmute con \mathbb{S}^2 es

$$[\mathbb{P}, \mathbb{S}^2] = 0 \Leftrightarrow \langle \xi^i | \mathbb{P} | \xi_j \rangle = \begin{pmatrix} P_1^1 & P_2^1 & P_3^1 \\ P_1^2 & P_2^2 & P_3^2 \\ N_1^3 & P_2^3 & P_3^3 \end{pmatrix}.$$

Ahora intentaremos construir una base común de autovectores para \mathbb{L}_z^2 y \mathbb{S} . Para ello notamos que $|\hat{e}_2\rangle$ es un autovector común a \mathbb{L}_z^2 y \mathbb{S} , por lo tanto existirá un subespacio expandido por $\{|\hat{e}_1\rangle, |\hat{e}_3\rangle\}$. En ese subespacio las representaciones matriciales para \mathbb{L}_z^2 y \mathbb{S} , serán

$$\langle \xi^i | \mathbb{L}_z^2 | \xi_j \rangle_{\mathcal{S}_{13}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \langle \xi^i | \mathbb{S} | \xi_j \rangle_{\mathcal{S}_{13}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Acto seguido planteamos el problema de autovalores para \mathbb{S} , esto es

$$\mathbb{S} |q_j\rangle = \lambda_j |u_j\rangle \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} |q_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\xi_1\rangle + |\xi_3\rangle) \\ |q_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\xi_1\rangle - |\xi_3\rangle) \end{cases}$$

con lo cual tendremos

| Autovectores | Autovalor \mathbb{L}_z^2 | Autovalor \mathbb{S} |
|--|----------------------------|------------------------|
| $ q_1\rangle = \hat{e}_2\rangle$ | 0 | 1 |
| $ q_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (\xi_1\rangle + \xi_3\rangle)$ | 1 | 1 |
| $ q_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (\xi_1\rangle - \xi_3\rangle)$ | 1 | -1 |

Cuadro 4.1: Dado que no hay líneas repetidas \mathbb{L}_z^2 y \mathbb{S} forman un CCOC.

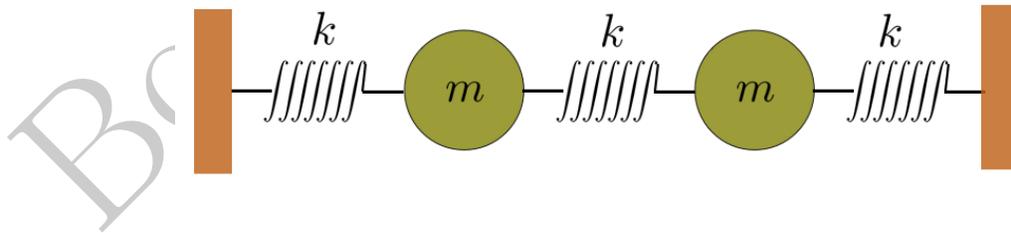


Figura 4.1: Osciladores armónicos acoplados

2. Consideremos otro ejemplo proveniente de la Mecánica Clásica. Se trata de dos osciladores armónicos, de igual masa, acoplados con resortes con la misma constante elástica k . La ecuaciones de movimiento para este sistema son

$$m\ddot{x}_1 + kx_1 - k(x_2 - x_1) = 0 \quad \text{y} \quad m\ddot{x}_2 + kx_2 + k(x_2 - x_1) = 0$$

con lo cual podremos expresar esta ecuación en forma de operadores

$$\mathbb{D}|x\rangle = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} m\frac{d^2}{dt^2} + 2k & -k \\ -k & m\frac{d^2}{dt^2} + 2k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = 0$$

Si pensamos esta ecuación como una ecuación de autovalores, el autovalor es claramente $\lambda = 0$ y como las masas y las constantes elásticas son iguales podemos intercambiar las partículas y la física (las ecuaciones de movimiento) no cambian. Esto se puede expresar matemáticamente como el operador permutación de las partículas

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 \\ x^1 \end{pmatrix}$$

Es inmediato comprobar que $[\mathbb{D}, \mathbb{P}] = 0$, con lo cual existirá una combinación lineal de autovectores de \mathbb{D} (asociados con el autovalor $\lambda = 0$) los cuales también serán autovectores de \mathbb{P} . Para ello procedamos a calcular los autovalores y autovectores de \mathbb{P}

$$\mathbb{P}|x\rangle = \lambda|x\rangle \Rightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda \pm 1 \Leftrightarrow |\hat{e}_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad |\hat{e}_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

fácilmente podemos expresar el vector posición como una combinación lineal de estos dos autovectores de \mathbb{P} . Esto es

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \frac{\xi_1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{\xi_2}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \xi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + x_2) \\ \xi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 - x_2) \end{cases}$$

Es claro que

$$|u_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + x_2) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \text{y} \quad |u_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 - x_2) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

son autovectores de \mathbb{P} y \mathbb{D} .

4.10.3. Ejercicios

Dado un observable \mathbb{A} y un vector de estado $|\psi\rangle$ general, definiremos el valor de esperado de \mathbb{A} a la cantidad $\langle \mathbb{A} \rangle = \langle \psi | \mathbb{A} | \psi \rangle$ y la relación de dispersión de \mathbb{A} como

$$\langle (\Delta \mathbb{A})^2 \rangle = \langle (\mathbb{A} - \langle \mathbb{A} \rangle \mathbb{I})^2 \rangle = \langle \mathbb{A}^2 \rangle - \langle \mathbb{A} \rangle^2 \equiv \langle \psi | \mathbb{A}^2 | \psi \rangle - \langle \psi | \mathbb{A} | \psi \rangle^2,$$

donde \mathbb{I} es el operador identidad. Nótese que el valor esperado es un número que representa la dispersión de un observable y tiene la misma estructura e interpretación de la variancia en estadística.

1. Muestre que la dispersión siempre es positiva, i.e $\langle (\Delta \mathbb{A})^2 \rangle \geq 0$.

Para ello:

- a) Inicie mostrando que para cualquier operador hermítico \mathbb{C} se cumple $\langle \mathbb{C}^2 \rangle \geq 0$
 b) y, termine mostrando que $\mathbb{A} - \langle \mathbb{A} \rangle \mathbb{I}$ es un operador hermítico
2. Muestre que la dispersión se anula para el caso en que $|\psi\rangle$ es autovector de \mathbb{A} con autovalor $\langle \mathbb{A} \rangle$
3. Utilizando la desigualdad de Cauchy-Schwarz muestre que las relaciones de dispersión entre dos observables \mathbb{A} y \mathbb{B} siempre cumplen

$$\langle (\Delta \mathbb{A})^2 \rangle \langle (\Delta \mathbb{B})^2 \rangle \geq \frac{1}{4} |\langle [\mathbb{A}, \mathbb{B}] \rangle|^2 \quad \text{con } [\mathbb{A}, \mathbb{B}] = \mathbb{A}\mathbb{B} - \mathbb{B}\mathbb{A},$$

(4ptos) Esta es la forma general de la relación de incertidumbre

4. En Mecánica Cuántica uno define el operador de spin como $\mathbb{S}_i = \frac{\hbar}{2} \sigma_i$ donde σ_i son las matrices de Pauli e $i = 1, 2, 3$ representan las direcciones x, y, z , respectivamente
- a) Encuentre la expresión para el conmutador $[\mathbb{S}_i, \mathbb{S}_j]$, con $i, j = 1, 2, 3$.
- b) Considere un vector de estado general $|\psi\rangle = a|+\rangle + b|-\rangle$, donde a y b son números complejos que cumplen con $a^2 + b^2 = 1$ y $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ la base de autovectores de \mathbb{S}_z . Muestre que

$$\langle (\Delta \mathbb{S}_z)^2 \rangle \langle (\Delta \mathbb{S}_x)^2 \rangle \geq \hbar^4 [\text{Im}(ab^*)]^2$$

con $\text{Im}(\circ)$ la parte imaginaria del argumento

4.11. Sistemas de ecuaciones lineales: segunda revisión

Revisemos nuevamente la solución de sistemas de ecuaciones lineales, queremos resolver:

$$\begin{aligned} A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + \cdots + A_{1n}x_n &= c_1 \\ A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + \cdots + A_{2n}x_n &= c_2 \\ &\vdots \\ A_{m1}x_1 + A_{m2}x_2 + \cdots + A_{mn}x_n &= c_m \end{aligned}$$

donde los coeficientes A_{ij} y c_i son valores conocidos. Si todos los c_i son cero el sistema se denomina homogéneo, en caso contrario inhomogéneo. Puede resultar que el conjunto de las incógnitas $\{x_i\}$ represente una solución, infinitas soluciones o que simplemente no exista una solución para el sistema. El análisis matricial nos puede ayudar a investigar sobre las posibles soluciones. En notación de matrices, el sistema anterior se puede escribir de la manera siguiente:

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}$$

De manera más compacta, la ecuación anterior se puede escribir también como:

$$\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{C}$$

Recordemos que se puede interpretar $\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{C}$ como la transformación lineal $\mathbb{A}[\mathbf{X}] = \mathbf{C}$ de un vector \mathbf{X} de \mathbf{V}^n a un vector \mathbf{C} en algún otro espacio vectorial \mathbf{W}^m . (Note que hemos cambiado ligeramente la notación

que hemos venido utilizando donde: $\mathbb{A}|v\rangle = |v'\rangle$). Vimos que el operador \mathbb{A} aplicará todo vector de \mathbf{V}^n en algún subespacio (o todo el espacio) de \mathbf{W}^m . A este subespacio se le denomina el rango o recorrido de \mathbb{A} y su dimensión es igual al *rango* de la matriz \mathbf{A} .

Notemos que si \mathbb{A} (o \mathbf{A}) es singular, esto significa que existe algún subespacio de \mathbf{V}^n que es aplicado al vector cero de \mathbf{W}^m , es decir, se cumple que $\mathbb{A}[\hat{\mathbf{X}}] = \mathbf{0}$, donde los vectores $\hat{\mathbf{X}}$ pertenecen a este subespacio de \mathbf{V}^n el cual se llama el espacio *nulo* de \mathbb{A} , como ya lo indicamos.

En cuanto al *rango* de la matriz \mathbf{A} , podemos hacer la siguiente interpretación: consideremos a cada columna de la matriz \mathbf{A} como un vector, entonces tendremos el conjunto $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ de vectores. El *rango* de la matriz \mathbf{A} será igual al número de vectores linealmente independientes del conjunto, recordemos que este número es también la dimensión del espacio vectorial que expanden estos vectores. En términos del conjunto de esos vectores tenemos que:

$$x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + \dots + x_n\mathbf{v}_n = \mathbf{C}$$

por lo tanto, el *rango* de \mathbf{A} será la dimensión r de esta expansión: $\text{rank}[\mathbf{A}] = r$.

Para el caso de un vector que pertenezca al espacio nulo $\mathbb{A}[\hat{\mathbf{X}}] = \mathbf{0}$, resulta

$$\hat{x}_1\mathbf{v}_1 + \hat{x}_2\mathbf{v}_2 + \dots + \hat{x}_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$$

y como sólo $r \leq n$ de estos vectores son linealmente independientes podemos entonces considerar al conjunto $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r\}$ linealmente independiente y los sobrantes como posibles combinaciones lineales de los $\{\mathbf{v}_r\}$. Esto significa que la dimensión del espacio nulo es $n - r$ como lo indicamos con anterioridad.

En cuanto a las posibles soluciones del sistema podemos decir:

1. Si \mathbf{C} pertenece al rango de \mathbb{A} y además $r = n$, entonces todos los vectores $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ son linealmente independientes y el sistema tendrá como única solución al conjunto $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.
2. Si \mathbf{C} pertenece al rango de \mathbb{A} y además $r < n$, entonces únicamente r de los vectores $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ son linealmente independientes. Esto significa que podremos escoger los coeficientes de los $n - r$ vectores de manera arbitraria sin dejar de satisfacer el sistema para algún conjunto de coeficientes $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Por tanto, existirá un número infinito de soluciones, que expanden un espacio vectorial tridimensional de dimensión $n - r$. Matemáticamente es lo siguiente: Si \mathbf{X} es algún vector que satisface $\mathbb{A}[\mathbf{X}] = \mathbf{C}$ y $[\hat{\mathbf{X}}]$ cualquier vector del espacio nulo de \mathbb{A} que satisface $\mathbb{A}[\hat{\mathbf{X}}] = \mathbf{0}$, entonces

$$\mathbb{A}[\mathbf{X} + \hat{\mathbf{X}}] = \mathbb{A}[\mathbf{X}] + \mathbb{A}[\hat{\mathbf{X}}] = \mathbb{A}[\mathbf{X}] + \mathbf{0} = \mathbf{C}$$

de manera que $\mathbf{X} + \hat{\mathbf{X}}$ también es solución.

3. La otra posibilidad es que el sistema no tenga solución, en este caso \mathbf{C} NO pertenece al rango de \mathbb{A} .

En el caso de un sistema homogéneo, $\mathbf{C} = \mathbf{0}$, claramente existe una solución que viene a ser la trivial: $\{x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0\}$, además, si $r = n$ ésta será la única solución. Por otro lado, si $r < n$ existe un número infinito de soluciones. Es bueno anotar que si hay menos ecuaciones que incógnitas ($m < n$) entonces automáticamente $r < n$. Por lo tanto un conjunto de ecuaciones lineales homogéneas con menos ecuaciones que incógnitas siempre tiene una infinidad de soluciones.

Debemos considerar el importante caso cuando $m = n$, de decir, la matriz \mathbf{A} es cuadrada y existe igual número de ecuaciones como de incógnitas. Al ser cuadrada la matriz se tiene que la condición $r = n$ implica que la matriz es no singular ($\det[\mathbf{A}] \neq 0$). El caso $r < n$ se corresponde a que $\det[\mathbf{A}] = 0$ y la matriz \mathbf{A} resulta ser singular.

Ya hablamos del método de eliminación de Gauss para resolver el sistema de ecuaciones, pero queda ahora por ver otra posibilidad que consiste en lo siguiente: al ser \mathbf{A} una matriz $n \times n$ y si de paso es no singular, entonces existe la matriz inversa, por lo tanto:

$$\mathbf{AX} = \mathbf{C} \Rightarrow \mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{C}$$

Un ejemplo: Resolver el sistema

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 &= 4 \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 &= 0 \\ -3x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= -7 \end{aligned}$$

esto es igual a

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & -2 & -2 \\ -3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}$$

al calcular la matriz inversa de \mathbf{A} entonces resulta que

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 4 & 13 & 7 \\ -3 & -18 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Existe una única solución al sistema, que es: $\{x_1 = 2, x_2 = -3, x_3 = 4\}$.

Ejercicios

1. Resuelva

$$\begin{aligned} 2x + 3y + z &= 11 \\ x + y + z &= 6 \\ 5x - y + 10z &= 34 \end{aligned}$$

2. Resuelva

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 &= 2 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 3 \end{aligned}$$

3. Demuestre que el siguiente sistema sólo tiene solución si $\eta = 1$ o $\eta = 2$

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ x + 2y + 4z &= \eta \\ x + 4y + 10z &= \eta^2 \end{aligned}$$

4. Encuentre las condiciones sobre η para que al resolver el sistema

$$\begin{aligned} x_1 + \eta x_2 &= 1 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 &= -1 \\ 2x_1 - 2x_2 + \eta x_3 &= -2 \end{aligned}$$

- a)* tenga una solución
- b)* no tenga solución
- c)* tenga infinitas soluciones

Encuentre todas las soluciones que puedan existir.

Borrador Preliminar

4.12. Algunos ejemplos resueltos

1. Dados dos operadores lineales tales que:

$$AB = -BA; \quad A^2 = I; \quad B^2 = I; \quad \text{y} \quad [A, B] = 2iC$$

a) Muestre que $C^2 = I$ y que $[B, C] = 2iA$.

Solución:

$$[A, B] = AB - BA = 2iC \Rightarrow 2AB = 2iC \Rightarrow ABAB = -C^2 \Rightarrow -AABB = -C^2 \Rightarrow I = C^2$$

$$[B, C] = -i(BAB - ABB) = 2iA \Rightarrow -i(BAB - A) = 2iA \Rightarrow -i(-BBA - A) = 2iA$$

b) Evalúe $[[[A, B], [B, C]], [A, B]]$.

Solución:

$$\begin{aligned} [[[A, B], [B, C]], [A, B]] &= [[2iC, 2iA], 2iC] = 8[[AB, iA], AB] = 8i[(ABA - AAB), AB] \\ &= 8i[-2B, AB] = 16i(BAB - ABB) = 32iA. \end{aligned}$$

2. Sean A y B dos operadores hermíticos, con autovalores no degenerados y un operador unitario definido como: $U = A + iB$. Muestre que :

a) $[A, B] = 0$ y $A^2 + B^2 = I$.

Solución: Como

$$UU^\dagger = U^\dagger U = (A + iB)(A + iB)^\dagger = (A + iB)^\dagger(A + iB) \Rightarrow (A + iB)(A - iB) = (A - iB)(A + iB)$$

$$BA - AB = -BA + AB \Rightarrow [B, A] = -[B, A] \Rightarrow [B, A] = 0$$

La segunda de las afirmaciones se puede demostrar, a partir de

$$UU^\dagger = I \Rightarrow (A + iB)(A + iB)^\dagger = (A + iB)(A - iB) = (A^2 + B^2 + i(BA - AB)) \Rightarrow I = A^2 + B^2$$

b) Los autovectores de A también lo son de B

Solución: Si $\{|u_i\rangle\}$ son autovectores de A entonces

$$A|u_i\rangle = \lambda_i|u_i\rangle \Rightarrow BA|u_i\rangle = \lambda_i B|u_i\rangle \quad \text{como } [B, A] = 0, \quad \text{entonces } AB|u_i\rangle = \lambda_i B|u_i\rangle$$

por lo tanto, $B|u_i\rangle$ es un autovector de A . Pero la solución para la ecuación de autovectores $(A - \lambda_i I)|u_i\rangle = 0$ es única, por lo cual todos los autovectores de A son proporcionales. Esto es $B|u_j\rangle = \mu_j|u_j\rangle$, con lo cual queda demostrado que los autovectores de A son autovalores de B .

c) Si $U|v_i\rangle = \nu_i|v_i\rangle$ entonces $|\mu_i| = 1$.

Solución: Es claro que

$$\langle v^j | U^\dagger U |v_i\rangle = \langle v^j | I |v_i\rangle \Rightarrow \mu_j^* \mu_i \langle v^j | v_i\rangle = \langle v^j | I |v_i\rangle \Rightarrow \mu_i^2 = 1$$

3. Dada una matriz de la forma

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ \beta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A|v_i\rangle = \lambda_i|v_i\rangle$$

con α y β números complejos distintos de cero. Encuentre:

a) las relaciones que deben cumplir α y β para que λ_i sea real.

Solución: El Polinomio característico y la condición para que λ sea real será:

$$(1 - \lambda)(1 - 2\lambda + \lambda^2 - \alpha\beta) = 0 \Rightarrow \lambda = 1 \pm \sqrt{\alpha\beta} \Rightarrow \alpha\beta > 0 \wedge \alpha\beta \in \mathbb{R}$$

b) Las relaciones que deben cumplir α y β para que $\langle v^j | v_i \rangle = \delta_i^j$.

Solución: Los autovalores y autovectores para esta matriz serán

$$\lambda_1 = 1 \Rightarrow |v_1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \lambda_2 = 1 + \sqrt{\alpha\beta} \Rightarrow |v_2\rangle = \begin{pmatrix} \frac{\beta}{\sqrt{\alpha\beta}} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \lambda_3 = 1 - \sqrt{\alpha\beta} \Rightarrow |v_3\rangle = \begin{pmatrix} \frac{-\beta}{\sqrt{\alpha\beta}} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

con lo cual

$$\langle v^2 | v_3 \rangle = 0 \Rightarrow \frac{\beta^2}{\alpha\beta} = 1 \Rightarrow |\alpha| = |\beta|$$

c) Suponga que \mathbb{A} es hermítica, encuentre las relaciones que deben cumplir α y β .

Solución: Si \mathbb{A} es hermítica, entonces $\alpha^* = \beta$, con lo cual se cumplen automáticamente ambas aseveraciones.

4. Dadas las siguientes matrices:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 9 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 8 & -11 \end{pmatrix}$$
$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} -9 & -10 \\ -10 & 5 \end{pmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 14 & 2 \\ 2 & 11 \end{pmatrix}$$

Determine cuales conmutan entre ellas y encuentre la base de autovectores comunes.

Solución: Notamos que $[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = [\mathbf{A}, \mathbf{D}] = [\mathbf{D}, \mathbf{B}] = 0$ y

$$[\mathbf{A}, \mathbf{C}] = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad [\mathbf{B}, \mathbf{C}] = \begin{pmatrix} 0 & -8 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}, \quad [\mathbf{D}, \mathbf{C}] = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Los autovectores comunes a $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{D}$, serán

$$|u_1\rangle = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad |u_2\rangle = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

5. Dada la representación matricial de dos operadores

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Evalúe $[\mathbf{A}, \mathbf{B}]$.

Solución:

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{BA} \Rightarrow [\mathbf{A}, \mathbf{B}] = 0$$

- b) Muestre que \mathbf{A} tiene por autovalores $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = -1$ con λ_1 un autovalor degenerado. Construya la base de autovectores para \mathbf{A} .

Solución:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Entonces para

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda(1-\lambda)\lambda - (1-\lambda) = (\lambda^2 - 1)(1-\lambda) = 0$$

con lo cual tiene dos autovalores $\lambda = 1$ y $\lambda = -1$. Para el caso de $\lambda = -1$ se cumple que

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} z = -x \\ y = -y \\ x = -z \end{matrix}$$

con lo cual el autovector asociado con el autovalor $\lambda = -1$ tendrá la forma de

$$|u\rangle_{-1} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Para $\lambda = 1$ se cumple

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} z = x \\ y = y \\ x = z \end{matrix}$$

con lo cual hay dos vectores linealmente independientes asociados con $\lambda = 1$, a saber

$$|u\rangle_{1a} = \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad |u\rangle_{1b} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{con } y \text{ arbitrario}$$

Nótese que estos tres autovectores $\{|u\rangle_{1a}, |u\rangle_{1b}, |u\rangle_{-1}\}$ son ortogonales entre si

- c) ¿Cuál es la representación matricial de \mathbf{A} en la base de autovectores?

Solución: Diagonal de la forma

$$\tilde{\mathbf{A}}^i = \begin{pmatrix} \langle u^1 | \mathbb{A} | u_1 \rangle & \langle u^1 | \mathbb{A} | u_2 \rangle & \langle u^1 | \mathbb{A} | u_3 \rangle \\ \langle u^2 | \mathbb{A} | u_1 \rangle & \langle u^2 | \mathbb{A} | u_2 \rangle & \langle u^2 | \mathbb{A} | u_3 \rangle \\ \langle u^3 | \mathbb{A} | u_1 \rangle & \langle u^3 | \mathbb{A} | u_2 \rangle & \langle u^3 | \mathbb{A} | u_3 \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ya que los autovectores forman una base ortogonal. Obviamente se cumple que

$$\det[\mathbf{A}] = \det[\tilde{\mathbf{A}}] = -1 \quad \text{y} \quad \text{Tr}[\mathbf{A}] = \text{Tr}[\tilde{\mathbf{A}}] = 1.$$

d) A partir de los autovectores de \mathbf{A} encuentre los autovalores y autovectores de \mathbf{B}

Solución: Claramente $\mathbb{B}|u_{-1}\rangle = -|u_{-1}\rangle$ con lo cual tenemos el primer autovector de \mathbb{B} asociado al autovalor $\lambda = -1$. Para encontrar los otros autovectores tendremos

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

6. En mecánica clásica la cantidad de movimiento angular viene definida como $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$. Para pasar a mecánica cuántica se asocia \mathbf{r} y \mathbf{p} con los operadores posición y cantidad de movimiento los cuales, al operar sobre la función de onda nos proveen

$$\langle r | \mathbb{X} | \psi \rangle = x \langle r | \psi \rangle = x \psi(\mathbf{r}) \quad \langle r | \mathbb{P}_x | \psi \rangle = \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right) \langle r | \psi \rangle = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \psi(\mathbf{r})$$

$$\langle r | \mathbb{Y} | \psi \rangle = y \langle r | \psi \rangle = y \psi(\mathbf{r}) \quad \langle r | \mathbb{P}_y | \psi \rangle = \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial y} \right) \langle r | \psi \rangle = -i\hbar \frac{\partial}{\partial y} \psi(\mathbf{r})$$

$$\langle r | \mathbb{Z} | \psi \rangle = z \langle r | \psi \rangle = z \psi(\mathbf{r}) \quad \langle r | \mathbb{P}_z | \psi \rangle = \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial z} \right) \langle r | \psi \rangle = -i\hbar \frac{\partial}{\partial z} \psi(\mathbf{r})$$

En coordenadas cartesianas, en la representación de coordenadas $\{r\}$ tendremos que

$$\langle r | \mathbb{R} | \psi \rangle = \mathbf{r} \psi(\mathbf{r}) \quad \text{y} \quad \langle r | \mathbb{P} | \psi \rangle = -i\hbar \nabla \psi(\mathbf{r})$$

De forma que en mecánica cuántica las componentes cartesianas del operador cantidad de movimiento angular son

$$\langle r | \mathbb{L} | \psi \rangle = -i\hbar (\mathbf{r} \times \nabla) \psi(\mathbf{r})$$

$$\langle r | \mathbb{L} | \psi \rangle = -i\hbar \left(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right) \psi(\mathbf{r}) \mathbf{i} - i\hbar \left(z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right) \psi(\mathbf{r}) \mathbf{j} - i\hbar \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) \psi(\mathbf{r}) \mathbf{k}$$

Utilizando las definiciones anteriores muestre que el conmutador de las componentes cartesianas de la cantidad de movimiento angular cumple con

$$[\mathbb{L}_x, \mathbb{L}_y] | \psi \rangle = i\hbar \mathbb{L}_z | \psi \rangle$$

con $\mathbb{L}^1 = \mathbb{L}_1 = \mathbb{L}_x$; $\mathbb{L}^2 = \mathbb{L}_2 = \mathbb{L}_y$; $\mathbb{L}^3 = \mathbb{L}_3 = \mathbb{L}_z$. En general: $[\mathbb{L}_l, \mathbb{L}_m] = i\hbar \varepsilon_{lmn} \mathbb{L}^n$.

Solución: Dado que

$$\begin{aligned} [\mathbb{L}_1, \mathbb{L}_2] | \psi \rangle &= [\mathbb{L}_x, \mathbb{L}_y] | \psi \rangle = (\mathbb{L}_x \mathbb{L}_y - \mathbb{L}_y \mathbb{L}_x) | \psi \rangle \\ &= -i\hbar \left(\left(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right) - \left(z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right) \left(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right) \right) \psi(\mathbf{r}) \end{aligned}$$

Con lo cual

$$\begin{aligned}
 &= \left[\left(y \frac{\partial}{\partial z} \left(z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right) - z \frac{\partial}{\partial y} \left(z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right) \right) - \left(z \frac{\partial}{\partial x} \left(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right) - x \frac{\partial}{\partial z} \left(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right) \right) \right] \psi(\mathbf{r}) \\
 &= \left[\left(\left(\left(yz \frac{\partial}{\partial z \partial x} + y \frac{\partial}{\partial x} \right) - xy \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) - \left(z^2 \frac{\partial}{\partial y \partial x} - zx \frac{\partial}{\partial y \partial z} \right) \right) - \right. \\
 &\quad \left. - \left(\left(zy \frac{\partial}{\partial x \partial z} - z^2 \frac{\partial}{\partial y \partial x} \right) - \left(yx \frac{\partial}{\partial z^2} - zx \frac{\partial}{\partial z \partial y} - x \frac{\partial}{\partial y} \right) \right) \right] \psi(\mathbf{r}) \\
 &= \left(y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y} \right) \psi(\mathbf{r})
 \end{aligned}$$

7. Dados dos Operadores Vectoriales \mathbf{A} y \mathbf{B} que conmutan entre ellos y con \mathbf{L} tales que

$$[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = [\mathbf{A}, \mathbf{L}] = [\mathbf{L}, \mathbf{B}] = 0$$

Demuestre entonces que

$$[\mathbf{A} \cdot \mathbf{L}, \mathbf{B} \cdot \mathbf{L}] = i\hbar (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{L}$$

Solución:

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{A} \cdot \mathbf{L}, \mathbf{B} \cdot \mathbf{L}] &= i\hbar \varepsilon_{klm} A^l B^m L^k = A^l B^m i\hbar \varepsilon_{klm} L^k = A^l B^m [L_l, L_m] = A^l B^m L_l L_m - A^l B^m L_m L_l \\
 &= A^l L_l B^m L_m - B^m L_m A^l L_l
 \end{aligned}$$

8. Considere, que el espacio de estados para un determinado sistema físico viene expandido por la base ortonormal $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle\}$. Definimos dos operadores \mathbb{L}_z y \mathbb{S} de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
 \mathbb{L}_z |u_1\rangle &= |u_1\rangle; & \mathbb{L}_z |u_2\rangle &= 0; & \mathbb{L}_z |u_3\rangle &= -|u_3\rangle \\
 \mathbb{S} |u_1\rangle &= |u_3\rangle; & \mathbb{S} |u_2\rangle &= |u_2\rangle; & \mathbb{S} |u_3\rangle &= |u_1\rangle
 \end{aligned}$$

a) Encuentre la representación matricial en la base $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle\}$ del operador: $[\mathbb{L}_z, \mathbb{S}]$

Solución: La matriz será

$$\begin{pmatrix}
 \langle u^1 | \mathbb{L}_z \mathbb{S} - \mathbb{S} \mathbb{L}_z | u_1 \rangle & \langle u^1 | \mathbb{L}_z \mathbb{S} - \mathbb{S} \mathbb{L}_z | u_2 \rangle & \langle u^1 | \mathbb{L}_z \mathbb{S} - \mathbb{S} \mathbb{L}_z | u_3 \rangle \\
 \langle u^2 | \mathbb{L}_z \mathbb{S} - \mathbb{S} \mathbb{L}_z | u_1 \rangle & \langle u^2 | \mathbb{L}_z \mathbb{S} - \mathbb{S} \mathbb{L}_z | u_2 \rangle & \langle u^2 | \mathbb{L}_z \mathbb{S} - \mathbb{S} \mathbb{L}_z | u_3 \rangle \\
 \langle u^3 | \mathbb{L}_z \mathbb{S} - \mathbb{S} \mathbb{L}_z | u_1 \rangle & \langle u^3 | \mathbb{L}_z \mathbb{S} - \mathbb{S} \mathbb{L}_z | u_2 \rangle & \langle u^3 | \mathbb{L}_z \mathbb{S} - \mathbb{S} \mathbb{L}_z | u_3 \rangle
 \end{pmatrix}$$

con lo cual

$$\begin{pmatrix}
 \langle u^1 | \mathbb{L}_z \mathbb{S} | u_1 \rangle - \langle u^1 | \mathbb{S} \mathbb{L}_z | u_1 \rangle & \langle u^1 | \mathbb{L}_z \mathbb{S} | u_2 \rangle - \langle u^1 | \mathbb{S} \mathbb{L}_z | u_2 \rangle & \langle u^1 | \mathbb{L}_z \mathbb{S} | u_3 \rangle - \langle u^1 | \mathbb{S} \mathbb{L}_z | u_3 \rangle \\
 \langle u^2 | \mathbb{L}_z \mathbb{S} | u_1 \rangle - \langle u^2 | \mathbb{S} \mathbb{L}_z | u_1 \rangle & \langle u^2 | \mathbb{L}_z \mathbb{S} | u_2 \rangle - \langle u^2 | \mathbb{S} \mathbb{L}_z | u_2 \rangle & \langle u^2 | \mathbb{L}_z \mathbb{S} | u_3 \rangle - \langle u^2 | \mathbb{S} \mathbb{L}_z | u_3 \rangle \\
 \langle u^3 | \mathbb{L}_z \mathbb{S} | u_1 \rangle - \langle u^3 | \mathbb{S} \mathbb{L}_z | u_1 \rangle & \langle u^3 | \mathbb{L}_z \mathbb{S} | u_2 \rangle - \langle u^3 | \mathbb{S} \mathbb{L}_z | u_2 \rangle & \langle u^3 | \mathbb{L}_z \mathbb{S} | u_3 \rangle - \langle u^3 | \mathbb{S} \mathbb{L}_z | u_3 \rangle
 \end{pmatrix}$$

de donde

$$\langle u^i | [\mathbb{L}_z, \mathbb{S}] | u_j \rangle = \begin{pmatrix} 0-0 & 0-0 & 1-(-1) \\ 0-0 & 0-0 & 0-0 \\ (-1)-1 & 0-0 & 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) ¿ \mathbb{L}_z, \mathbb{S} y $[\mathbb{L}_z, \mathbb{S}]$ serán biyectivas?

Solución: Por definición \mathbb{S} es biyectiva ya que cada vector tiene su imagen, \mathbb{L}_z no lo es por cuanto el vector $|u_2\rangle$ no tiene imagen y, finalmente $[\mathbb{L}_z, \mathbb{S}]$ tampoco será biyectiva dado que $\langle u^i | [\mathbb{L}_z, \mathbb{S}] | u_j \rangle$ no tiene inversa ya que del $\det [\langle u^i | [\mathbb{L}_z, \mathbb{S}] | u_j \rangle] = 0$

c) Encuentre la dimensión del Dominio, del Rango y del núcleo de la transformaciones \mathbb{L}_z, \mathbb{S} y $[\mathbb{L}_z, \mathbb{S}]$

Solución:

| | Dominio | Rango | Núcleo |
|------------------------------|---------|-------|--------|
| \mathbb{L}_z | 3 | 2 | 1 |
| \mathbb{S} | 3 | 3 | 0 |
| $[\mathbb{L}_z, \mathbb{S}]$ | 3 | 2 | 2 |

dado que $[\mathbb{L}_z, \mathbb{S}] | u_2 \rangle = 0$.

9. Encuentre la expresión matricial para los operadores lineales de Pauli: $\mathfrak{R}^2 \mapsto \mathfrak{R}^2$ dado que actúan como

$$\begin{aligned} \sigma_z |+\rangle &= |+\rangle, & \sigma_z |-\rangle &= -|-\rangle \\ \sigma_x |+\rangle_x &= |+\rangle_x, & \sigma_x |-\rangle_x &= -|-\rangle_x \\ \sigma_y |+\rangle_y &= |+\rangle_y, & \sigma_y |-\rangle_y &= -|-\rangle_y \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned} |+\rangle &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, & |-\rangle &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ |+\rangle_x &= \frac{1}{\sqrt{2}} [|+\rangle + |-\rangle], & |-\rangle_x &= \frac{1}{\sqrt{2}} [|+\rangle - |-\rangle] \\ |+\rangle_y &= \frac{1}{\sqrt{2}} [|+\rangle + i|-\rangle], & |-\rangle_y &= \frac{1}{\sqrt{2}} [|+\rangle - i|-\rangle] \end{aligned}$$

Solución: Ahora bien

$$\begin{aligned} x \langle + | + \rangle_x &= 1 & x \langle + | - \rangle_x &= x \langle - | + \rangle_x = 0 & x \langle - | - \rangle_x &= 1 \\ y \langle + | + \rangle_y &= 1 & y \langle + | - \rangle_y &= y \langle - | + \rangle_y = 0 & y \langle - | - \rangle_y &= 1 \end{aligned}$$

Es decir, los vectores $\{|+\rangle_x, |-\rangle_x\}$ y $\{|+\rangle_y, |-\rangle_y\}$ forman bases ortonormales, por lo que los vectores $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ se pueden expresar en término de esas bases como

$$\begin{aligned} |+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} [|+\rangle_x + |-\rangle_x] & |-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} [|+\rangle_x - |-\rangle_x] \\ |+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} [|+\rangle_y + |-\rangle_y] & |-\rangle &= \frac{-i}{\sqrt{2}} [|+\rangle_y - |-\rangle_y] \end{aligned}$$

Así las expresiones matriciales serán

$$(\sigma_z)_j^i = \begin{pmatrix} \langle + | \sigma_z | + \rangle & \langle + | \sigma_z | - \rangle \\ \langle - | \sigma_z | + \rangle & \langle - | \sigma_z | - \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

y

$$\begin{aligned} (\sigma_x)_j^i &= \begin{pmatrix} \langle + | \sigma_x | + \rangle & \langle + | \sigma_x | - \rangle \\ \langle - | \sigma_x | + \rangle & \langle - | \sigma_x | - \rangle \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} [x \langle + | +_x \langle - | \sigma_x [| + \rangle_x + | - \rangle_x] & \frac{1}{2} [x \langle + | +_x \langle - | \sigma_x [| + \rangle_x - | - \rangle_x] \\ \frac{1}{2} [x \langle + | -_x \langle - | \sigma_x [| + \rangle_x + | - \rangle_x] & \frac{1}{2} [x \langle + | -_x \langle - | \sigma_x [| + \rangle_x - | - \rangle_x] \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} [x \langle + | +_x \langle - | [| + \rangle_x - | - \rangle_x] & \frac{1}{2} [x \langle + | +_x \langle - | [| + \rangle_x + | - \rangle_x] \\ \frac{1}{2} [x \langle + | -_x \langle - | [| + \rangle_x - | - \rangle_x] & \frac{1}{2} [x \langle + | -_x \langle - | [| + \rangle_x + | - \rangle_x] \end{pmatrix} \\ (\sigma_x)_j^i &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\sigma_y)_j^i &= \begin{pmatrix} \langle + | \sigma_y | + \rangle & \langle + | \sigma_y | - \rangle \\ \langle - | \sigma_y | + \rangle & \langle - | \sigma_y | - \rangle \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} [y \langle + | +_y \langle - | \sigma_y [| + \rangle_y + | - \rangle_y] & \frac{-i}{2} [y \langle + | +_y \langle - | \sigma_y [| + \rangle_y - | - \rangle_y] \\ \frac{i}{2} [y \langle + | -_y \langle - | \sigma_y [| + \rangle_y + | - \rangle_y] & \frac{1}{2} [y \langle + | -_y \langle - | \sigma_y [| + \rangle_y - | - \rangle_y] \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} [y \langle + | +_y \langle - | [| + \rangle_y - | - \rangle_y] & \frac{-i}{2} [y \langle + | +_y \langle - | [| + \rangle_y + | - \rangle_y] \\ \frac{i}{2} [y \langle + | -_y \langle - | [| + \rangle_y - | - \rangle_y] & \frac{-1}{2} [y \langle + | -_y \langle - | [| + \rangle_y + | - \rangle_y] \end{pmatrix} \\ (\sigma_y)_j^i &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

10. Un operador Cantidad de Movimiento Generalizado se define como aquel conjunto de operadores hermíticos que cumplen con

$$[\mathbb{J}_x, \mathbb{J}_y] = i\hbar\mathbb{J}_z \quad [\mathbb{J}_y, \mathbb{J}_z] = i\hbar\mathbb{J}_x \quad [\mathbb{J}_z, \mathbb{J}_x] = i\hbar\mathbb{J}_y, \quad \text{es decir} \quad [\mathbb{J}_i, \mathbb{J}_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}\mathbb{J}_k$$

con ϵ_{ijk} el símbolo de Levy Civita (Los índices repetidos NO indican suma). Adicionalmente, definimos los siguientes operadores

$$\mathbb{J}^2 = \mathbb{J}_x^2 + \mathbb{J}_y^2 + \mathbb{J}_z^2; \quad \mathbb{J}_+ = \mathbb{J}_x + i\mathbb{J}_y \quad \mathbb{J}_- = \mathbb{J}_x - i\mathbb{J}_y$$

Muestre que

$$[\mathbb{J}^2, \mathbb{J}_+] = [\mathbb{J}^2, \mathbb{J}_-] = [\mathbb{J}^2, \mathbb{J}_z] = 0$$

Solución: Para probar esta propiedad se puede demostrar de forma genérica que $[\mathbb{J}_k^2, \mathbb{J}_m] = 0$ con $k, m = 1, 2, 3 \equiv x, y, z$ esto es

$$[\mathbb{J}_k^2, \mathbb{J}_m] = [\mathbb{J}_k\mathbb{J}_k, \mathbb{J}_m] = \mathbb{J}_k\mathbb{J}_k\mathbb{J}_m - \mathbb{J}_m\mathbb{J}_k\mathbb{J}_k = \mathbb{J}_k\mathbb{J}_k\mathbb{J}_m - (i\hbar\epsilon_{mkl}\mathbb{J}_l + \mathbb{J}_k\mathbb{J}_m)\mathbb{J}_k$$

con lo cual

$$[\mathbb{J}_k^2, \mathbb{J}_m] = \mathbb{J}_k\mathbb{J}_k\mathbb{J}_m - i\hbar\epsilon_{mkl}\mathbb{J}_l\mathbb{J}_k - \mathbb{J}_k(i\hbar\epsilon_{mkn}\mathbb{J}_n + \mathbb{J}_k\mathbb{J}_m)$$

y claramente se anula por cuanto los índices no suman pero si son mudos, y $\epsilon_{mkl} = -\epsilon_{mlk}$

$$[\mathbb{J}_k^2, \mathbb{J}_m] = \mathbb{J}_k\mathbb{J}_k\mathbb{J}_m - i\hbar\epsilon_{mkl}\mathbb{J}_l\mathbb{J}_k - i\hbar\epsilon_{mkn}\mathbb{J}_k\mathbb{J}_n - \mathbb{J}_k\mathbb{J}_k\mathbb{J}_m$$

al conmutar los cuadrados de las componentes con cualquiera de las componentes, y dado que los conmutadores son lineales entonces queda demostrado que

$$[\mathbb{J}^2, \mathbb{J}_\pm] = [\mathbb{J}_x^2 + \mathbb{J}_y^2 + \mathbb{J}_z^2, \mathbb{J}_x \pm i\mathbb{J}_y] = [\mathbb{J}_y^2, \mathbb{J}_x] + [\mathbb{J}_z^2, \mathbb{J}_x] \pm i[\mathbb{J}_x^2, \mathbb{J}_y] \pm i[\mathbb{J}_z^2, \mathbb{J}_y] = 0$$

11. Si definimos los autovectores comunes a \mathbb{J}^2 y \mathbb{J}_z como $|j, m\rangle$ como

$$\mathbb{J}^2 |j, m\rangle = j(j+1)\hbar^2 |j, m\rangle \quad \mathbb{J}_z |j, m\rangle = m\hbar |j, m\rangle \quad \text{con} \quad \langle j, m | j', m' \rangle = \delta_{jj'}\delta_{mm'}$$

adicionalmente tenemos que

$$\mathbb{J}_- |j, m\rangle = \hbar\sqrt{j(j+1) - m(m-1)} |j, m-1\rangle \quad \mathbb{J}_+ |j, m\rangle = \hbar\sqrt{j(j+1) - m(m+1)} |j, m+1\rangle$$

y si suponen (es fácil demostrarlo) que $-j \leq m \leq j$ esto quiere decir que dado el valor un j , m varía entre $-j$ y j de uno en uno, esto es $m = -j, -j+1, -j+2, \dots, j-2, j-1, j$. Suponga ahora que $j = \frac{1}{2}$. Encuentre:

- a) la representación matricial para: $\mathbb{J}_z, \mathbb{J}_-, \mathbb{J}_+, \mathbb{J}^2$, en la base de autovectores de $\mathbb{J}_z, \mathbb{J}^2$.

Solución: Si $|j, m\rangle$ son autovectores de \mathbb{J}^2 y \mathbb{J}_z su representación matricial será diagonal y como m varía entre $-j$ y j con incrementos de 1 tendremos que serán matrices 2×2 . La base ortogonal de autovectores será $\{|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle, |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle\}$

$$\begin{pmatrix} \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | \mathbb{J}_z | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle & \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | \mathbb{J}_z | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle \\ \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | \mathbb{J}_z | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle & \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | \mathbb{J}_z | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle \end{pmatrix} \equiv \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | \mathbb{J}^2 | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle & \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | \mathbb{J}^2 | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle \\ \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | \mathbb{J}^2 | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle & \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | \mathbb{J}^2 | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle \end{pmatrix} \equiv \frac{3}{4} \hbar^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La representación matricial para $\mathbb{J}_-, \mathbb{J}_+$ obviamente no será diagonal

$$\begin{pmatrix} \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | \mathbb{J}_+ | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle & \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | \mathbb{J}_+ | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle \\ \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | \mathbb{J}_+ | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle & \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | \mathbb{J}_+ | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle \end{pmatrix} \equiv \hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | \mathbb{J}_- | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle & \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | \mathbb{J}_- | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle \\ \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | \mathbb{J}_- | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle & \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | \mathbb{J}_- | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle \end{pmatrix} \equiv \hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Encuentre los autovalores y autovectores para $\mathbb{J}_z, \mathbb{J}_-, \mathbb{J}_+, \mathbb{J}^2$.

Solución: Otra vez, $\{ |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle, |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle \}$ son autovectores de \mathbb{J}^2 y \mathbb{J}_z . En el caso de \mathbb{J}^2 con un autovalor de $\frac{3}{4}\hbar^2$ para ambos autovectores y en el caso de \mathbb{J}_z los autovalores serán $\pm\frac{\hbar}{2}$ respectivamente. Para $\mathbb{J}_-, \mathbb{J}_+$ no tendrán autovalor distinto de cero en esta base.

Borrador Preliminar

Capítulo **5**

Coordenadas Curvilíneas, Campos y Operadores Diferenciales

Borrador Preliminar

5.1. Discreción derivativa

Los vectores podrán ser constantes o variables. Ahora bien esa característica se verificará tanto en las componentes como en la base. Esto quiere decir que cuando un vector es variable podrán variar su módulo, su dirección, su sentido o todo junto o separado. Obviamente esta variabilidad del vector dependerá de la base en la cual se exprese, por lo cual un vector podrá tener una componente constante en una base y constante en otra.

$$|a\rangle_{(t)} = a^k(t) |e_k\rangle_{(t)} = \tilde{a}^k |\tilde{e}_k\rangle_{(t)} = \hat{a}^k(t) |\hat{e}_k\rangle$$

De esta manera, cuando uno piensa en un vector variable

$$|a\rangle_{(t)} \iff \mathbf{a}(t)$$

uno rápidamente piensa en establecer un cociente incremental, en dos notaciones diferentes es:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|a\rangle_{(t+\Delta t)} - |a\rangle_{(t)}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta |a\rangle_{(t)}}{\Delta t} = \frac{d(|a\rangle_{(t)})}{dt} \iff \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{a}(t+\Delta t) - \mathbf{a}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{a}(t)}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{a}(t)}{dt}$$

La misma propuesta se cumplirá para las formas diferenciales ${}_{(t)}\langle a|$. Como siempre, las propiedades de esta operación serán

$$\begin{aligned} \frac{d(|a\rangle_{(t)} + |b\rangle_{(t)})}{dt} &= \frac{d(|a\rangle_{(t)})}{dt} + \frac{d(|b\rangle_{(t)})}{dt} \\ \frac{d(\alpha(t) |a\rangle_{(t)})}{dt} &= \frac{d(\alpha(t))}{dt} |a\rangle_{(t)} + \alpha(t) \frac{d(|a\rangle_{(t)})}{dt} \\ \frac{d({}_{(t)}\langle a| |b\rangle_{(t)})}{dt} &= \frac{d({}_{(t)}\langle a|)}{dt} |b\rangle_{(t)} + \langle a|_{(t)} \frac{d(|b\rangle_{(t)})}{dt} \end{aligned}$$

Ahora bien, esto implica que

$$|a\rangle_{(t)} = a^k(t) |e_k\rangle_{(t)} \Rightarrow \frac{d(|a\rangle_{(t)})}{dt} = \frac{d(a^k(t) |e_k\rangle_{(t)})}{dt} = \frac{da^k(t)}{dt} |e_k\rangle_{(t)} + a^k(t) \frac{d(|e_k\rangle_{(t)})}{dt}$$

con lo cual hay que tener cuidado al derivar vectores y cerciorarse de la dependencia funcional de la base y componentes. Habrá sistemas de coordenadas (bases de vectores) que sean constantes y otros con bases variables.

5.2. Curvas y parámetros

Podemos generalizar esta afirmación y considerar un parámetro λ , en este caso, si

$$|r\rangle = \mathbf{r} = \mathbf{r}(x(\lambda), y(\lambda), z(\lambda))$$

entonces

$$|dr\rangle = d\mathbf{r}(x(\lambda), y(\lambda), z(\lambda)) = \left(\frac{\partial x(\lambda)}{\partial \lambda} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x(\lambda)} + \frac{\partial y(\lambda)}{\partial \lambda} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y(\lambda)} + \frac{\partial z(\lambda)}{\partial \lambda} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z(\lambda)} \right) d\lambda$$

con lo cual

$$\frac{d(\cdot)}{d\lambda} = \frac{\partial x(\lambda)}{\partial \lambda} \frac{\partial(\cdot)}{\partial x(\lambda)} + \frac{\partial y(\lambda)}{\partial \lambda} \frac{\partial(\cdot)}{\partial y(\lambda)} + \frac{\partial z(\lambda)}{\partial \lambda} \frac{\partial(\cdot)}{\partial z(\lambda)}.$$

Podemos considerar las cantidades $\left(\frac{\partial x(\lambda)}{\partial \lambda}, \frac{\partial y(\lambda)}{\partial \lambda}, \frac{\partial z(\lambda)}{\partial \lambda}\right)$ como las componentes del vector $\mathbf{dr}(\lambda)$ (y en general del operador $\frac{d(\cdot)}{d\lambda}$) tangente a la trayectoria parametrizada con λ . Más aún, las cantidades $\left(\frac{\partial(\cdot)}{\partial x(\lambda)}, \frac{\partial(\cdot)}{\partial y(\lambda)}, \frac{\partial(\cdot)}{\partial z(\lambda)}\right)$ serán los vectores base en esas coordenadas.

Así al considerar coordenadas generalizadas $(q^1(\lambda), q^2(\lambda), q^3(\lambda))$, tendremos

$$|r\rangle = \mathbf{r} = \mathbf{r}(q^1(\lambda), q^2(\lambda), q^3(\lambda))$$

por lo tanto

$$\mathbf{dr}(q^1(\lambda), q^2(\lambda), q^3(\lambda)) = \frac{\partial q^1(\lambda)}{\partial \lambda} d\lambda \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^1(\lambda)} + \frac{\partial q^2(\lambda)}{\partial \lambda} d\lambda \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^2(\lambda)} + \frac{\partial q^3(\lambda)}{\partial \lambda} d\lambda \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^3(\lambda)}$$

y

$$\frac{\mathbf{dr}}{d\lambda} = \frac{\partial q^1(\lambda)}{\partial \lambda} \underbrace{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^1(\lambda)}}_{\mathbf{u}_1} + \frac{\partial q^2(\lambda)}{\partial \lambda} \underbrace{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^2(\lambda)}}_{\mathbf{u}_2} + \frac{\partial q^3(\lambda)}{\partial \lambda} \underbrace{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^3(\lambda)}}_{\mathbf{u}_3}$$

donde $\left\{\mathbf{u}_1 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^1(\lambda)}, \mathbf{u}_2 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^2(\lambda)}, \mathbf{u}_3 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^3(\lambda)}\right\}$, son la base del vector.

Por otro lado, el módulo del vector $\|\mathbf{dr}(\lambda)\|$ representará la longitud de arco ds para esa curva. Por consiguiente

$$\begin{aligned} ds^2 = \mathbf{dr}(\lambda) \cdot \mathbf{dr}(\lambda) &= \frac{d(\mathbf{dr}(\lambda))}{d\lambda} \frac{d(\mathbf{dr}(\lambda))}{d\lambda} (d\lambda)^2 = \frac{\partial q^i}{\partial \lambda} \frac{\partial(\mathbf{dr}(\lambda))}{\partial q^i} \frac{\partial q^j}{\partial \lambda} \frac{\partial(\mathbf{dr}(\lambda))}{\partial q^j} (d\lambda)^2 \\ &= \frac{\partial(\mathbf{dr}(\lambda))}{\partial q^i} \frac{\partial(\mathbf{dr}(\lambda))}{\partial q^j} \underbrace{\frac{\partial q^i}{\partial \lambda} d\lambda}_{dq^i} \underbrace{\frac{\partial q^j}{\partial \lambda} d\lambda}_{dq^j} = \frac{\partial(\mathbf{dr}(\lambda))}{\partial q^i} \frac{\partial(\mathbf{dr}(\lambda))}{\partial q^j} dq^i dq^j \end{aligned}$$

donde $\frac{\mathbf{dr}(\lambda)}{d\lambda}$ es el vector tangente a la curva. Dado que

$$(ds)^2 = g_{ij} dx^i dx^j = \tilde{g}_{ij} d\tilde{x}^i d\tilde{x}^j = \bar{g}_{ij} dq^i dq^j = \underbrace{\frac{\partial(\mathbf{dr}(\lambda))}{\partial q^i} \frac{\partial(\mathbf{dr}(\lambda))}{\partial q^j}}_{\bar{g}_{ij}} dq^i dq^j$$

identificamos claramente a las componentes del tensor g_{ij} :

$$g_{ij} \equiv \frac{\partial(\mathbf{dr}(\lambda))}{\partial q^i} \frac{\partial(\mathbf{dr}(\lambda))}{\partial q^j}.$$

5.3. Ejemplo

Dado un sistema genérico de coordenadas oblicuas

$$|\tilde{e}_1\rangle = a|i\rangle + b|j\rangle; \quad |\tilde{e}_2\rangle = c|i\rangle + d|j\rangle$$

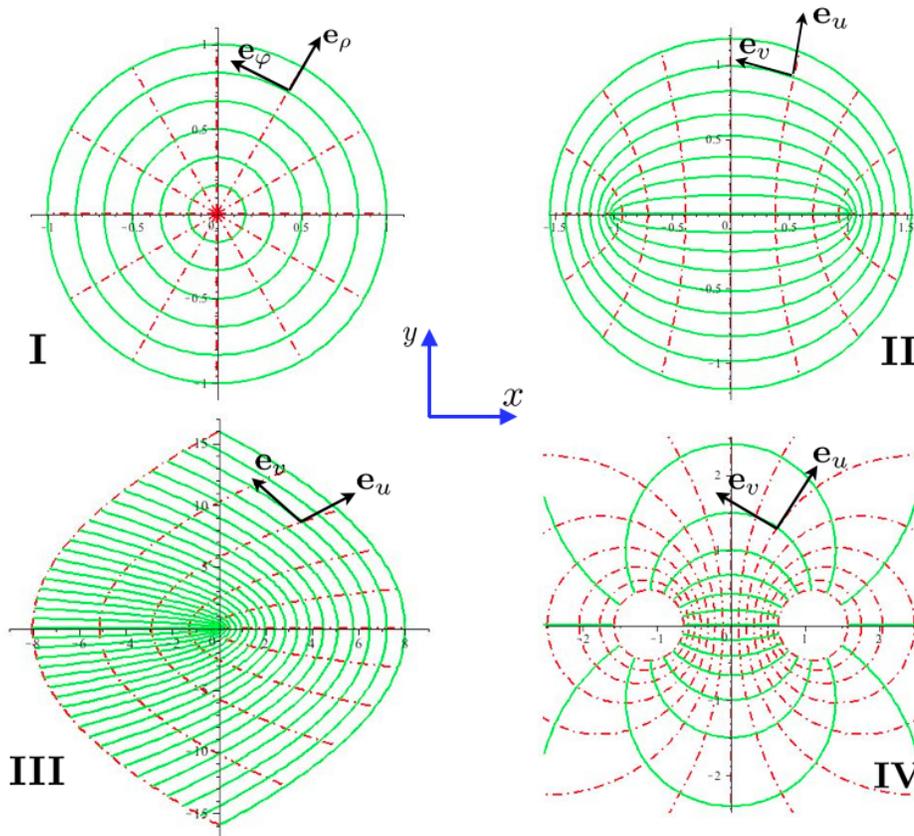


Figura 5.1: Coordenadas Curvilíneas en 2D

1. Encuentre la expresión para un vector genérico $|v\rangle = v_x |i\rangle + v_y |j\rangle$ en estas coordenadas.

Solución:

$$\left. \begin{aligned} |\tilde{e}_1\rangle &= a |i\rangle + b |j\rangle \\ |\tilde{e}_2\rangle &= c |i\rangle + d |j\rangle \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \begin{cases} |i\rangle = \frac{1}{\Delta} (d |\tilde{e}_1\rangle - b |\tilde{e}_2\rangle) \\ |j\rangle = \frac{1}{\Delta} (c |\tilde{e}_1\rangle - a |\tilde{e}_2\rangle) \end{cases}$$

con $\Delta = bc - ad$ por lo cual

$$\begin{aligned} |v\rangle &= v_x |i\rangle + v_y |j\rangle = \frac{v_x}{\Delta} (d |\tilde{e}_1\rangle - b |\tilde{e}_2\rangle) + \frac{v_y}{\Delta} (c |\tilde{e}_1\rangle - a |\tilde{e}_2\rangle) \\ &= \left(d \frac{v_x}{\Delta} + c \frac{v_y}{\Delta} \right) |\tilde{e}_1\rangle - \left(b \frac{v_x}{\Delta} + a \frac{v_y}{\Delta} \right) |\tilde{e}_2\rangle \end{aligned}$$

2. Suponga ahora una base y un tensor concreto

$$|\tilde{e}_1\rangle = |i\rangle; \quad |\tilde{e}_2\rangle = \frac{\sqrt{2}}{2} |i\rangle + \frac{\sqrt{2}}{2} |j\rangle; \quad T_j^i = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Encuentre la expresión matricial para el tensor \tilde{T}_{ij} ¹

Solución: En general,

$$\tilde{T}_{ij} = g_{ik} \tilde{T}_j^k = g_{ik} \frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^m} T_n^m \frac{\partial x^n}{\partial \tilde{x}^j}$$

Identificando

$$\tilde{v}_x = \tilde{v}^1 = \frac{\partial \tilde{x}^1}{\partial x^j} v^j = \frac{\partial \tilde{x}^1}{\partial x^1} v^1 + \frac{\partial \tilde{x}^1}{\partial x^2} v^2 = \underbrace{\frac{d}{\Delta}}_{\frac{\partial \tilde{x}^1}{\partial x^1}} v_x + \underbrace{\frac{c}{\Delta}}_{\frac{\partial \tilde{x}^1}{\partial x^2}} v_y$$

$$\tilde{v}_y = \tilde{v}^2 = \frac{\partial \tilde{x}^2}{\partial x^j} v^j = \frac{\partial \tilde{x}^2}{\partial x^1} v^1 + \frac{\partial \tilde{x}^2}{\partial x^2} v^2 = \underbrace{\frac{-b}{\Delta}}_{\frac{\partial \tilde{x}^2}{\partial x^1}} v_x + \underbrace{\frac{-a}{\Delta}}_{\frac{\partial \tilde{x}^2}{\partial x^2}} v_y$$

como

$$\left. \begin{array}{l} a = 1 \\ b = 0 \\ c = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ d = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} g_{ik} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc} 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 \end{array} \right), \quad \frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^m} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{array} \right) \\ \frac{\partial x^n}{\partial \tilde{x}^j} = \left(\frac{\partial \tilde{x}^n}{\partial x^j} \right)^{-1} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{array} \right)^{-1} = \left(\begin{array}{cc} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{array} \right) \end{array} \right.$$

Finalmente:

$$\tilde{T}_{ij} = \left(\begin{array}{cc} 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc} 4 & 2 \\ 1 & 4 \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc} 5 - \frac{1}{2}\sqrt{2} & -1 + \frac{3}{2}\sqrt{2} \\ \frac{5}{2}\sqrt{2} - 1 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} + 3 \end{array} \right).$$

5.4. Coordenadas curvilíneas generalizadas

Como hemos visto, siempre se podrá definir un sistema de coordenadas generalizadas (q^1, q^2, q^3) tales que

$$|r\rangle = \mathbf{r} = \mathbf{r}(q^1, q^2, q^3) \Rightarrow d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^1} dq^1 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^2} dq^2 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^3} dq^3$$

y por consiguiente

$$(ds)^2 = g_{ij} dx^i dx^j \equiv \langle dr | dr \rangle = \frac{\partial |r\rangle}{\partial q^i} \frac{\partial |r\rangle}{\partial q^j} dq^i dq^j \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} g_{ij} = \frac{\partial |r\rangle}{\partial q^i} \frac{\partial |r\rangle}{\partial q^j} \\ |\xi_j\rangle = \frac{1}{\left\| \frac{\partial |r\rangle}{\partial q^j} \right\|} \frac{\partial |r\rangle}{\partial q^j} \end{array} \right.$$

Se genera entonces una tríada de vectores base $\{|\xi_j\rangle\}$ ortonormales, de manera que

$$|\xi_1\rangle = \frac{1}{\left\| \frac{\partial |r\rangle}{\partial q^1} \right\|} \frac{\partial |r\rangle}{\partial q^1}; \quad |\xi_2\rangle = \frac{1}{\left\| \frac{\partial |r\rangle}{\partial q^2} \right\|} \frac{\partial |r\rangle}{\partial q^2}; \quad |\xi_3\rangle = \frac{1}{\left\| \frac{\partial |r\rangle}{\partial q^3} \right\|} \frac{\partial |r\rangle}{\partial q^3};$$

¹**Ayuda:** dada una matriz genérica $A_j^i = \left(\begin{array}{cc} A & B \\ C & D \end{array} \right)$, su inversa será $\left(\begin{array}{cc} \frac{D}{AD-BC} & -\frac{B}{AD-BC} \\ -\frac{C}{AD-BC} & \frac{A}{AD-BC} \end{array} \right)$.

los cuales son vectores tangentes a las curvas que define el radio vector $|r\rangle$. Claramente si el sistema es ortogonal los factores de escala son importantes para su categorización

$$h_1 = \left\| \frac{\partial |r\rangle}{\partial q^1} \right\|; \quad h_2 = \left\| \frac{\partial |r\rangle}{\partial q^2} \right\|; \quad y \quad h_3 = \left\| \frac{\partial |r\rangle}{\partial q^3} \right\|$$

Con lo cual podemos definir el elemento de línea como

$$ds^2 = (h_1 dq^1)^2 + (h_2 dq^2)^2 + (h_3 dq^3)^2 = \frac{\partial \langle dr |}{\partial q^i} \frac{\partial |dr\rangle}{\partial q^j} dq^i dq^j = g_{ij} dq^i dq^j$$

Es decir, que identificamos la métrica como

$$h_1 = \frac{\partial x}{\partial q^1} = \frac{\partial x_1}{\partial q^1} = \sqrt{g_{11}}; \quad h_2 = \frac{\partial y}{\partial q^2} = \frac{\partial x_2}{\partial q^2} = \sqrt{g_{22}}; \quad h_3 = \frac{\partial z}{\partial q^3} = \frac{\partial x_3}{\partial q^3} = \sqrt{g_{33}}.$$

De tal forma que los casos particulares se recuperan fácilmente.

En la Figura 5.1 podemos ver algunos ejemplos de sistemas de coordenadas: en el cuadrante I coordenadas polares: $x = \rho \cos(\varphi)$; $y = \rho \sin(\varphi)$. En el cuadrante II coordenadas elípticas: $x = a \cosh(u) \cos(v)$; $y = a \sinh(u) \sin(v)$. En III coordenadas parabólicas: $x = \frac{1}{2}(u - v^2)$; $y = uv$ y en el cuadrante IV coordenadas bipolares: $x^2 + [y - a \cot(u)]^2 = a^2 \csc^2(u)$; $\left[x - a \frac{\sinh(v)}{\cosh(v)} \right]^2 + y^2 = \frac{a^2}{\sinh^2(v)}$.

5.4.1. Coordenadas generalizadas, vectores y formas

Recordando como construimos el desplazamiento para una base genérica ortogonal, $\{|e_j\rangle\}$ de un espacio vectorial con producto interno, el desplazamiento infinitesimal puede expresarse como

$$ds^2 \equiv \langle dr | dr \rangle = (dx_k \langle e^k |) (dx^m | e_m \rangle) = \langle e^k | e_m \rangle dx_k dx^m = dx_m dx^m = g_{km} dx^k dx^m$$

Donde hemos utilizado el hecho de que la métrica nos permite asociar componentes contravariantes a covariantes y viceversa, es decir, establece una relación entre formas y vectores.

Si las bases de formas y vectores son ortogonales la métrica será diagonal y como en general $\left\| \frac{\partial |dr\rangle}{\partial q^j} \right\| \neq 1$, entonces surgen los llamados factores de escala $h_i = g_{ii}$

Una vez más, una forma $\langle b |$ o, un vector $|a\rangle$ cualquiera puede expresarse como una combinación lineal de formas o vectores base

$$|a\rangle = a^j |e_j\rangle = \tilde{a}^j |\tilde{e}_j\rangle \leftrightarrow \langle b | = b_j \langle e^j | = \tilde{b}_j \langle \tilde{e}^j |$$

con

$$a^j = \langle e^j | a \rangle; \quad \tilde{a}^j = \langle \tilde{e}^j | a \rangle; \quad b_j = \langle b | e_j \rangle; \quad y \quad \tilde{b}_j = \langle b | \tilde{e}_j \rangle.$$

De esta manera las componentes covariantes y contravariantes estarán relacionadas como

$$a_j = g_{jk} a^k \Rightarrow a_i = h_{[i]} a^{[i]}$$

aquí $h_{[i]} a^{[i]}$ NO indica suma. En otras palabras, en aquellos sistemas de coordenadas en los cuales la métrica es diagonal pero no viene representada por la matriz unidad, subir y bajar índices puede incluir los cambios de escala.

5.4.2. Velocidades y aceleraciones

Antes de pasar a analizar los casos particulares haremos un alto para revisar las expresiones de las velocidades y las aceleraciones en coordenadas generalizadas. Para ello recordamos que los vectores velocidad y aceleración se representan como

$$|v\rangle = v^j |e_j\rangle = \dot{x}^j |e_j\rangle = \tilde{v}^j |\tilde{e}_j\rangle = \dot{\tilde{x}}^j |\tilde{e}_j\rangle \quad \text{y} \quad |a\rangle = a^j |e_j\rangle = \ddot{x}^j |e_j\rangle = \tilde{a}^j |\tilde{e}_j\rangle = \dot{\tilde{x}}^j |\tilde{e}_j\rangle$$

respectivamente.

Para determinar las expresiones de estos vectores en cualquier sistema de coordenadas, es suficiente con encontrar las expresiones de sus componentes covariantes o contravariantes. Como sabemos, podremos encontrar una a partir de las otras con la ayuda de la métrica del sistema de coordenadas.

Entonces, el vector velocidad en la base cartesiana se puede expresar como

$$|v\rangle = v_x |i\rangle + v_y |j\rangle + v_z |k\rangle = \dot{x} |i\rangle + \dot{y} |j\rangle + \dot{z} |k\rangle = \dot{x}^j |e_j\rangle = \dot{q}^j |\tilde{e}_j\rangle, \quad \text{con} : |e_1\rangle = |i\rangle; |e_2\rangle = |j\rangle; \text{y} |e_3\rangle = |k\rangle$$

Claramente las componentes contravariantes del vector velocidad en un sistema de coordenadas generalizado son $v^j = \dot{q}^j$.

Recordamos que para cualquier base generalizada de vectores o formas las componentes covariantes se expresan en término de la base cartesiana (de vectores o formas) como

$$|\tilde{e}_j\rangle = \frac{\partial x^i}{\partial q^j} |e_i\rangle \quad \text{y} \quad \langle \tilde{e}^i| = \frac{\partial q^j}{\partial x^i} \langle e^j|$$

Entonces las componentes covariantes del vector velocidad en una base generalizada serán

$$\tilde{v}_j = \langle v | \tilde{e}_j \rangle = (\dot{x}_m \langle \tilde{e}^m |) \left(\frac{\partial x^i}{\partial q^j} |e_i\rangle \right) = \dot{x}_m \frac{\partial x^m}{\partial q^j} = \dot{x}_m \frac{\frac{\partial x^m}{\partial t}}{\frac{\partial q^j}{\partial t}} = \dot{x}_m \frac{\partial \dot{x}^m}{\partial \dot{q}^j} = \frac{\partial \left(\frac{v_m v^m}{2} \right)}{\partial \dot{q}^j}$$

Resulta fácil expresar las componentes covariantes una vez que conocemos el módulo del vector expresado en ese sistema de coordenadas. El cual siempre viene escrito a partir del diferencial

$$d|r\rangle \Rightarrow \frac{d|r\rangle}{dt}$$

Para encontrar la expresión para la aceleración se procede de manera análoga.

$$\tilde{a}_j = \langle a | \tilde{e}_j \rangle = (\ddot{x}_m \langle \tilde{e}^m |) \left(\frac{\partial x^i}{\partial q^j} |e_i\rangle \right) = \ddot{x}_m \frac{\partial x^m}{\partial q^j} \equiv \frac{d}{dt} \left(\dot{x}_m \frac{\partial x^m}{\partial q^j} \right) - \dot{x}_m \frac{\partial \dot{x}^m}{\partial q^j}$$

y otra vez

$$\frac{\partial x^m}{\partial q^j} = \frac{\partial \dot{x}^m}{\partial \dot{q}^j} \Rightarrow \tilde{a}_j = \frac{d}{dt} \left(\dot{x}_m \frac{\partial \dot{x}^m}{\partial \dot{q}^j} \right) - \dot{x}_m \frac{\partial \dot{x}^m}{\partial q^j} = \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}^j} \left(\frac{\dot{x}_m \dot{x}^m}{2} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial q^j} \left(\frac{\dot{x}_m \dot{x}^m}{2} \right)$$

para finalmente

$$\tilde{a}_j = \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}^j} \left(\frac{v_m v^m}{2} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial q^j} \left(\frac{v_m v^m}{2} \right)$$

5.4.3. Coordenadas cartesianas

El primer caso, el más trivial, lo constituyen las coordenadas cartesianas.

$$(q^1, q^2, q^3) \iff (x, y, z)$$

$$|r\rangle = x|i\rangle + y|j\rangle + z|k\rangle \iff \mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

$$d\mathbf{r} \Rightarrow |dr\rangle = \left(\frac{\partial|r\rangle}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial|r\rangle}{\partial y}\right) dy + \left(\frac{\partial|r\rangle}{\partial z}\right) dz = dx|i\rangle + dy|j\rangle + dz|k\rangle$$

Consecuentemente

$$h_x = \left\| \frac{\partial|r\rangle}{\partial x} \right\| = 1, \quad h_y = \left\| \frac{\partial|r\rangle}{\partial y} \right\| = 1, \quad h_z = \left\| \frac{\partial|r\rangle}{\partial z} \right\| = 1$$

y

$$|i\rangle = \frac{1}{\left\| \frac{\partial|r\rangle}{\partial x} \right\|} \frac{\partial|r\rangle}{\partial x}, \quad |j\rangle = \frac{1}{\left\| \frac{\partial|r\rangle}{\partial y} \right\|} \frac{\partial|r\rangle}{\partial y}, \quad |k\rangle = \frac{1}{\left\| \frac{\partial|r\rangle}{\partial z} \right\|} \frac{\partial|r\rangle}{\partial z}$$

El elemento de línea viene definido como

$$(ds)^2 = (h_1 dx)^2 + (h_2 dy)^2 + (h_3 dz)^2 \iff ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

y el tensor métrico será

$$g_{11} = g_{xx} = 1; \quad g_{22} = g_{yy} = 1; \quad g_{33} = g_{zz} = 1.$$

El hecho de que para las coordenadas cartesianas: $h_x = h_y = h_z = 1$ significará que las tomaremos como coordenadas base respecto a las cuales expresaremos las demás.

5.4.4. Coordenadas cilíndricas

Las coordenadas cilíndricas se expresan de la siguiente forma

$$(q^1, q^2, q^3) \iff (\rho, \varphi, z)$$

$$|r\rangle = x(\rho, \varphi)|i\rangle + y(\rho, \varphi)|j\rangle + z|k\rangle \iff \mathbf{r} = x(\rho, \varphi)\mathbf{i} + y(\rho, \varphi)\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

Con: $\rho \geq 0, 0 \leq \varphi < 2\pi$ y $-\infty < z < \infty$.

$$d\mathbf{r} \Rightarrow |dr\rangle = \left(\frac{\partial|r\rangle}{\partial \rho}\right) d\rho + \left(\frac{\partial|r\rangle}{\partial \varphi}\right) d\varphi + \left(\frac{\partial|r\rangle}{\partial z}\right) dz$$

Estas cantidades pueden ser identificadas a partir de las leyes de transformación respecto a las coordenadas cartesianas:

$$\left. \begin{array}{l} x = x(\rho, \varphi) = \rho \cos(\varphi) \\ y = y(\rho, \varphi) = \rho \sin(\varphi) \\ z = z \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} dx = \cos(\varphi)d\rho - \rho \sin(\varphi)d\varphi \\ dy = \sin(\varphi)d\rho + \rho \cos(\varphi)d\varphi \\ dz = dz \end{array}$$

Por lo que el vector posición en estas coordenadas es

$$|r\rangle = \rho \cos(\varphi)|i\rangle + \rho \sin(\varphi)|j\rangle + z|k\rangle$$

Es fácil identificar

$$\begin{aligned}\frac{\partial x(\rho, \varphi)}{\partial \rho} &= \cos(\varphi), & \frac{\partial y(\rho, \varphi)}{\partial \rho} &= \sin(\varphi), & \frac{\partial z}{\partial \rho} &= 0 \\ \frac{\partial x(\rho, \varphi)}{\partial \varphi} &= -\rho \sin(\varphi), & \frac{\partial y(\rho, \varphi)}{\partial \varphi} &= \rho \cos(\varphi), & \frac{\partial z}{\partial \varphi} &= 0 \\ \frac{\partial x(\rho, \varphi)}{\partial z} &= 0, & \frac{\partial y(\rho, \varphi)}{\partial z} &= 0, & \frac{\partial z}{\partial z} &= 1\end{aligned}$$

y de allí calcular los factores de escala:

$$\begin{aligned}h_\rho &= \left\| \frac{\partial |r\rangle}{\partial \rho} \right\| = \left\| \frac{\partial [x(\rho, \varphi) |i\rangle + y(\rho, \varphi) |j\rangle + z |k\rangle]}{\partial \rho} \right\| = \left\| \frac{\partial x(\rho, \varphi)}{\partial \rho} |i\rangle + \frac{\partial y(\rho, \varphi)}{\partial \rho} |j\rangle \right\| \\ &= \|\cos(\varphi) |i\rangle + \sin(\varphi) |j\rangle\| = 1\end{aligned}$$

Del mismo modo

$$h_\varphi = \left\| \frac{\partial |r\rangle}{\partial \varphi} \right\| = \rho; \quad h_z = \left\| \frac{\partial |r\rangle}{\partial z} \right\| = 1.$$

mientras que los vectores unitarios serán

$$\begin{aligned}|\xi_\rho\rangle &= \frac{1}{\left\| \frac{\partial |r\rangle}{\partial \rho} \right\|} \frac{\partial |r\rangle}{\partial \rho} = \frac{\partial x(\rho, \varphi)}{\partial \rho} |i\rangle + \frac{\partial y(\rho, \varphi)}{\partial \rho} |j\rangle = \cos(\varphi) |i\rangle + \sin(\varphi) |j\rangle \\ |\xi_\varphi\rangle &= \frac{1}{\left\| \frac{\partial |r\rangle}{\partial \varphi} \right\|} \frac{\partial |r\rangle}{\partial \varphi} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial x(\rho, \varphi)}{\partial \varphi} |i\rangle + \frac{\partial y(\rho, \varphi)}{\partial \varphi} |j\rangle \right) = -\sin(\varphi) |i\rangle + \cos(\varphi) |j\rangle \\ |\xi_z\rangle &= \frac{1}{\left\| \frac{\partial |r\rangle}{\partial z} \right\|} \frac{\partial |r\rangle}{\partial z} = \frac{\partial (z) |k\rangle}{\partial z} = |k\rangle\end{aligned}$$

La expresión para el vector desplazamiento infinitesimal será

$$d|r\rangle = \left(\frac{\partial |r\rangle}{\partial \rho} \right) d\rho + \left(\frac{\partial |r\rangle}{\partial \varphi} \right) d\varphi + \left(\frac{\partial |r\rangle}{\partial z} \right) dz = d\rho |\xi_\rho\rangle + \rho d\varphi |\xi_\varphi\rangle + dz |\xi_z\rangle.$$

Notemos que en este caso y a diferencia de las coordenadas cartesianas, si φ varía en una cantidad $d\varphi$, con ρ y z constantes, entonces el desplazamiento no será $d\varphi$ sino $\rho d\varphi$.

El elemento de línea viene definido como

$$(ds)^2 = (h_1 dq^1)^2 + (h_2 dq^2)^2 + (h_3 dq^3)^2 \iff ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 + dz^2$$

y el tensor métrico:

$$g_{11} = g_{\rho\rho} = 1; \quad g_{22} = g_{\varphi\varphi} = \rho^2; \quad g_{33} = g_{zz} = 1.$$

Ejercicios

1. Exprese el vector

$$\mathbf{r} = yz\mathbf{i} - y\mathbf{j} + xz^2\mathbf{k}$$

en coordenadas cilíndricas.

Nota: Antes, se deben expresar los vectores base $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ en términos de los vectores base $\{\xi_\rho, \xi_\varphi, \xi_z\}$.

5.4.5. Coordenadas esféricas

Para construir el sistema de coordenadas esféricas tenemos:

$$(q^1, q^2, q^3) \iff (r, \theta, \varphi)$$

$$|r\rangle = x(r, \theta, \varphi) |i\rangle + y(r, \theta, \varphi) |j\rangle + z(r, \theta, \varphi) |k\rangle \iff \mathbf{r} = x(r, \theta, \varphi) \mathbf{i} + y(r, \theta, \varphi) \mathbf{j} + z(r, \theta, \varphi) \mathbf{k}$$

Con: $r \geq 0$, $0 \leq \theta \leq \pi$ y $0 \leq \varphi < 2\pi$.

$$d\mathbf{r} \Rightarrow |dr\rangle = \left(\frac{\partial |r\rangle}{\partial r}\right) dr + \left(\frac{\partial |r\rangle}{\partial \theta}\right) d\theta + \left(\frac{\partial |r\rangle}{\partial \varphi}\right) d\varphi$$

Estas cantidades pueden ser identificadas de las leyes de transformación respecto a las coordenadas cartesianas

$$\left. \begin{aligned} x &= x(r, \theta, \varphi) = r \cos(\varphi) \sin(\theta) \\ y &= y(r, \theta, \varphi) = r \sin(\varphi) \sin(\theta) \\ z &= z(r, \theta, \varphi) = r \cos(\theta) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} dx &= \cos(\varphi) \sin(\theta) dr - r \sin(\varphi) \sin(\theta) d\varphi + r \cos(\varphi) \cos(\theta) d\theta \\ dy &= \sin(\varphi) \sin(\theta) dr + r \cos(\varphi) \sin(\theta) d\varphi + r \sin(\varphi) \cos(\theta) d\theta \\ dz &= \cos(\theta) dr - r \sin(\theta) d\theta \end{aligned}$$

El vector posición es de la forma

$$|r\rangle = r \sin(\theta) \cos(\varphi) |i\rangle + r \sin(\theta) \sin(\varphi) |j\rangle + r \cos(\theta) |k\rangle .$$

Derivando:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x(r, \theta, \varphi)}{\partial r} &= \cos(\varphi) \sin(\theta), & \frac{\partial y(r, \theta, \varphi)}{\partial r} &= \sin(\varphi) \sin(\theta), & \frac{\partial z(r, \theta, \varphi)}{\partial r} &= \cos(\theta) \\ \frac{\partial x(r, \theta, \varphi)}{\partial \varphi} &= -r \sin(\varphi) \sin(\theta), & \frac{\partial y(r, \theta, \varphi)}{\partial \varphi} &= r \cos(\varphi) \sin(\theta), & \frac{\partial z(r, \theta, \varphi)}{\partial \varphi} &= 0 \\ \frac{\partial x(r, \theta, \varphi)}{\partial \theta} &= r \cos(\varphi) \cos(\theta), & \frac{\partial y(r, \theta, \varphi)}{\partial \theta} &= r \sin(\varphi) \cos(\theta), & \frac{\partial z(r, \theta, \varphi)}{\partial \theta} &= -r \sin(\theta) \end{aligned}$$

Los factores de escala son

$$\begin{aligned} h_r &= \left\| \frac{\partial |r\rangle}{\partial r} \right\| = \|\cos(\varphi) \sin(\theta) |i\rangle + \sin(\varphi) \sin(\theta) |j\rangle + \cos(\theta) |k\rangle\| \\ &= \sqrt{\cos^2(\varphi) \sin^2(\theta) + \sin^2(\varphi) \sin^2(\theta) + \cos^2(\theta)} = 1 . \\ h_\theta &= \left\| \frac{\partial |r\rangle}{\partial \theta} \right\| = \|r \cos(\varphi) \cos(\theta) |i\rangle + r \sin(\varphi) \cos(\theta) |j\rangle - r \sin(\theta) |k\rangle\| \\ &= \sqrt{(r \cos(\varphi) \cos(\theta))^2 + (r \sin(\varphi) \cos(\theta))^2 + (r \sin(\theta))^2} = r \\ h_\varphi &= \left\| \frac{\partial |r\rangle}{\partial \varphi} \right\| = \|-r \sin(\varphi) \sin(\theta) |i\rangle + r \cos(\varphi) \sin(\theta) |j\rangle\| \\ &= \sqrt{(r \sin(\varphi) \sin(\theta))^2 + (r \cos(\varphi) \sin(\theta))^2} = r \sin(\theta) \end{aligned}$$

Mientras que para los vectores unitarios tenemos

$$\begin{aligned} |\xi_r\rangle &= \frac{1}{\left\| \frac{\partial |r\rangle}{\partial r} \right\|} \frac{\partial |r\rangle}{\partial r} = \cos(\varphi) \sin(\theta) |i\rangle + \sin(\varphi) \sin(\theta) |j\rangle + \cos(\theta) |k\rangle \\ |\xi_\theta\rangle &= \frac{1}{\left\| \frac{\partial |r\rangle}{\partial \theta} \right\|} \frac{\partial |r\rangle}{\partial \theta} = \frac{r \cos(\varphi) \cos(\theta) |i\rangle + r \sin(\varphi) \cos(\theta) |j\rangle - r \sin(\theta) |k\rangle}{r} = \cos(\varphi) \cos(\theta) |i\rangle + \sin(\varphi) \cos(\theta) |j\rangle - \sin(\theta) |k\rangle \\ |\xi_\varphi\rangle &= \frac{1}{\left\| \frac{\partial |r\rangle}{\partial \varphi} \right\|} \frac{\partial |r\rangle}{\partial \varphi} = \frac{-r \sin(\varphi) \sin(\theta) |i\rangle + r \cos(\varphi) \sin(\theta) |j\rangle}{r \sin(\theta)} = -\sin(\varphi) |i\rangle + \cos(\varphi) |j\rangle . \end{aligned}$$

El desplazamiento infinitesimal en estas coordenadas es de la forma

$$d|r\rangle = \left(\frac{\partial |r\rangle}{\partial r} \right) dr + \left(\frac{\partial |r\rangle}{\partial \theta} \right) d\theta + \left(\frac{\partial |r\rangle}{\partial \varphi} \right) d\varphi = dr |\xi_r\rangle + r d\theta |\xi_\theta\rangle + r \sin(\theta) d\varphi |\xi_\varphi\rangle .$$

Por lo tanto, para el elemento de línea tenemos

$$(ds)^2 = (h_1 dq^1)^2 + (h_2 dq^2)^2 + (h_3 dq^3)^2 \iff ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2(\theta) d\varphi^2$$

Y para el tensor métrico

$$g_{11} = g_{rr} = 1; \quad g_{22} = g_{\theta\theta} = r^2; \quad g_{33} = g_{\varphi\varphi} = r^2 \sin^2(\theta).$$

Ejercicios

1. Expresar los vectores base $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ en término de los vectores base $\{\xi_r, \xi_\theta, \xi_\varphi\}$.
2. Encuentre las componentes de la velocidad y aceleración, en coordenadas esféricas, de una partícula en movimiento.

Por completitud, enumeraremos algunos otros sistemas de coordenadas y dejaremos al lector la labor de calcular los vectores unitarios y la métrica del espacio expresada en esas coordenadas.

Otros sistemas coordenados

■ Coordenadas Toroidales

$$(q^1, q^2, q^3) \iff (\sigma, \tau, \phi)$$

$$|r\rangle = x(\sigma, \tau, \phi) |i\rangle + y(\sigma, \tau, \phi) |j\rangle + z(\sigma, \tau, \phi) |k\rangle \iff \mathbf{r} = x(\sigma, \tau, \phi) \mathbf{i} + y(\sigma, \tau, \phi) \mathbf{j} + z(\sigma, \tau, \phi) \mathbf{k} .$$

Con $0 \leq \sigma < 2\pi$, $0 \leq \tau < \infty$ y $0 \leq \phi < 2\pi$.

La transformación de coordenadas está definida de la siguiente forma

$$x = a \frac{\sinh(\tau)}{\cosh(\tau) - \cos(\sigma)} \cos(\phi), \quad y = a \frac{\sinh(\tau)}{\cosh(\tau) - \cos(\sigma)} \sin(\phi), \quad z = a \frac{\sin(\sigma)}{\cosh(\tau) - \cos(\sigma)}$$

con a constante.

Las superficies τ constante representan toros alrededor del eje z ; las superficies σ constante son esferas con centro sobre el eje z y finalmente las superficies ϕ constante son planos que contiene al eje z .

La métrica en estas coordenadas es:

$$\begin{aligned} ds^2 &= (h_1 dq^1)^2 + (h_2 dq^2)^2 + (h_3 dq^3)^2 \\ &= \left(\frac{a}{\cosh(\tau) - \cos(\sigma)} \right)^2 d\sigma^2 + \left(\frac{a}{\cosh(\tau) - \cos(\sigma)} \right)^2 d\tau^2 + \left(\frac{a \sinh(\tau)}{\cosh(\tau) - \cos(\sigma)} \right)^2 d\phi^2 \end{aligned}$$

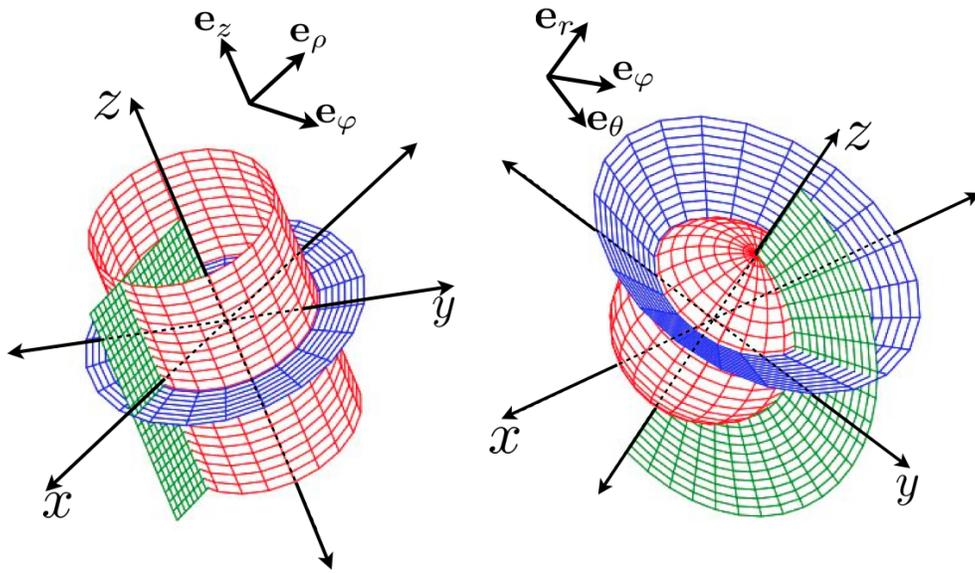


Figura 5.2: Coordenadas cilíndricas y esféricas

■ **Coordenadas Elipsoidales**

Dados tres números a, b y c , con $a > b > c > 0$, la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2 + \alpha} + \frac{y^2}{b^2 + \alpha} + \frac{z^2}{c^2 + \alpha} = 1$$

representa las superficies cuádricas² homofocales (es decir, con el mismo foco u origen en $(x = 0, y = 0, z = 0)$). Dependiendo del valor del parámetro α , estas ecuaciones representarán superficies

| | | |
|----------------------------|----|------------------------|
| Elipsoides | si | $\alpha > -c^2$ |
| Hiperboloides de una hoja | si | $-c^2 > \alpha > -b^2$ |
| Hiperboloides de dos hojas | si | $-b^2 > \alpha > -c^2$ |

Esto quiere decir que por cada punto (x, y, z) del espacio, pasan tres superficies cuádricas (dependiendo del valor de α). Conocidos a, b y c y el punto, $(x = x_0, y = y_0, z = z_0)$, los valores de α vienen dados por las raíces de la ecuación cúbica

$$\frac{x^2}{a^2 + \alpha} + \frac{y^2}{b^2 + \alpha} + \frac{z^2}{c^2 + \alpha} = 1 \Rightarrow \alpha^3 + \Delta \alpha^2 + \Phi \alpha + \Omega = 0$$

²Nótese que la proyección de estas superficies en el plano (x, y) representan curvas cónicas homofocales

con

$$\Delta = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - a^2 - b^2 - c^2$$

$$\Phi = (b^2 + c^2)x_0^2 + (a^2 + c^2)y_0^2 + (a^2 + b^2)z_0^2 - a^2b^2 - (a^2 + b^2)c^2$$

$$\Omega = x_0^2b^2c^2 + y_0^2a^2c^2 + z_0^2a^2b^2 - a^2b^2c^2$$

Las raíces de esta ecuación ($\alpha_1 = \lambda; \alpha_2 = \mu; \alpha_3 = \nu$) definen las coordenadas elipsoidales del punto $(x, y, z) = (x(\lambda, \mu, \nu), y(\lambda, \mu, \nu), z(\lambda, \mu, \nu))$.

Tenemos entonces:

$$(q^1, q^2, q^3) \iff (\lambda, \mu, \nu)$$

$$|r\rangle = x(\lambda, \mu, \nu)|i\rangle + y(\lambda, \mu, \nu)|j\rangle + z(\lambda, \mu, \nu)|k\rangle \iff \mathbf{r} = x(\lambda, \mu, \nu)\mathbf{i} + y(\lambda, \mu, \nu)\mathbf{j} + z(\lambda, \mu, \nu)\mathbf{k}.$$

y la ley de transformación:

$$x = \sqrt{\frac{(a^2 + \lambda)(a^2 + \mu)(a^2 + \nu)}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)}}, \quad y = \sqrt{\frac{(b^2 + \lambda)(b^2 + \mu)(b^2 + \nu)}{(b^2 - a^2)(b^2 - c^2)}}, \quad z = \sqrt{\frac{(c^2 + \lambda)(c^2 + \mu)(c^2 + \nu)}{(c^2 - b^2)(c^2 - a^2)}}$$

por cual la métrica será

$$ds^2 = \frac{(\lambda - \mu)(\lambda - \nu)}{4(a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)(c^2 + \lambda)}d\lambda^2 + \frac{(\mu - \lambda)(\mu - \nu)}{4(a^2 + \mu)(b^2 + \mu)(c^2 + \mu)}d\mu^2 + \frac{(\nu - \mu)(\nu - \lambda)}{4(a^2 + \nu)(b^2 + \nu)(c^2 + \nu)}d\nu^2.$$

5.5. Vectores, Tensores, métrica y transformaciones

Nos toca ahora construir expresiones de vectores y tensores a partir de sus leyes de transformación. Hemos dicho que los vectores y los tensores son independientes del sistema de coordenadas (la base) en la cual se exprese.

5.5.1. Transformando vectores

Dada dos bases de vectores coordenados $\{|e_1\rangle, |e_2\rangle, |e_3\rangle\}$ y $\{|\tilde{e}_1\rangle, |\tilde{e}_2\rangle, |\tilde{e}_3\rangle\}$ para el espacio vectorial \mathfrak{R}^3 Entonces, se cumple que:

$$|a\rangle = a^i |e_i\rangle = \tilde{a}^i |\tilde{e}_i\rangle \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \langle e^i | a \rangle = a^i \\ \langle \tilde{e}^i | a \rangle = \tilde{a}^i \end{array} \right\} \Rightarrow \tilde{a}^i = a^j \langle \tilde{e}^i | e_j \rangle \iff \tilde{a}^i = \underbrace{\frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j}}_{\langle \tilde{e}^i | e_j \rangle} a^j$$

Para el caso de coordenadas cartesianas y cilíndricas

$$\begin{cases} x^1 = x = \rho \cos(\varphi), & x^2 = y = \rho \operatorname{sen}(\varphi), & x^3 = z = z \\ \tilde{x}^1 = \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, & \tilde{x}^2 = \varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right), & \tilde{x}^3 = z = z \end{cases}$$

se tiene que

$$\frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{x}^1}{\partial x^1} = \frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{\partial \tilde{x}^1}{\partial x^2} = \frac{\partial \rho}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{\partial \tilde{x}^1}{\partial x^3} = \frac{\partial \rho}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \tilde{x}^2}{\partial x^1} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{-y}{x^2+y^2} & \frac{\partial \tilde{x}^2}{\partial x^2} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2} & \frac{\partial \tilde{x}^2}{\partial x^3} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \tilde{x}^3}{\partial x^1} = \frac{\partial z}{\partial x} = 0 & \frac{\partial \tilde{x}^3}{\partial x^2} = \frac{\partial z}{\partial y} = 0 & \frac{\partial \tilde{x}^3}{\partial x^3} = \frac{\partial z}{\partial z} = 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \text{sen}(\varphi) & 0 \\ -\frac{\text{sen}(\varphi)}{\rho} & \frac{\cos(\varphi)}{\rho} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces, para los vectores se tiene que

$$|a\rangle = a^j |e_j\rangle = a^1 |e_1\rangle + a^2 |e_2\rangle + a^3 |e_3\rangle = a_x |i\rangle + a_y |j\rangle + a_z |k\rangle$$

$$|a\rangle = \tilde{a}^i |\tilde{e}_i\rangle = \tilde{a}^1 |\tilde{e}_1\rangle + \tilde{a}^2 |\tilde{e}_2\rangle + \tilde{a}^3 |\tilde{e}_3\rangle = a_\rho |\xi_\rho\rangle + a_\varphi |\xi_\varphi\rangle + a_z |\xi_z\rangle$$

Recordemos que la relación para los vectores ortonormales es:

$$|\xi_\rho\rangle = \cos(\varphi) |i\rangle + \text{sen}(\varphi) |j\rangle, \quad |\xi_\varphi\rangle = -\text{sen}(\varphi) |i\rangle + \cos(\varphi) |j\rangle, \quad |\xi_z\rangle = |k\rangle$$

Por ejemplo, tenemos en concreto un vector: $|a\rangle = 5|i\rangle + 4|j\rangle + 3|k\rangle$ y queremos conocer su expresión en coordenadas cilíndricas. Antes, hay que hacer la acotación de que existe una familia de sistemas de coordenadas cilíndricas parametrizados por el ángulo φ y NO un único sistema coordenado. Obviamente se puede especificar el sistema coordenado y entonces tendremos un conjunto de componentes definido. Así la familia de componentes en cilíndricas del vector $|a\rangle$ serán

$$\tilde{a}^j = \langle \tilde{e}^j | a \rangle = \langle \tilde{e}^j | (\tilde{a}^1 |\tilde{e}_1\rangle + \tilde{a}^2 |\tilde{e}_2\rangle + \tilde{a}^3 |\tilde{e}_3\rangle) \rangle = \langle \tilde{e}^j | (a^1 |e_1\rangle + a^2 |e_2\rangle + a^3 |e_3\rangle) \rangle$$

con lo cual, al expresar los vectores base se tienen las componentes

$$\tilde{a}^1 = a_\rho = \langle \xi_\rho | (5|i\rangle + 4|j\rangle + 3|k\rangle) \rangle = (\langle \cos(\varphi) \langle i | + \text{sen}(\varphi) \langle j | | (5|i\rangle + 4|j\rangle + 3|k\rangle) \rangle = 5 \cos(\varphi) + 4 \text{sen}(\varphi)$$

$$\tilde{a}^2 = a_\varphi = \langle \xi_\varphi | (5|i\rangle + 4|j\rangle + 3|k\rangle) \rangle = (\langle -\text{sen}(\varphi) \langle i | + \cos(\varphi) \langle j | | (5|i\rangle + 4|j\rangle + 3|k\rangle) \rangle = -5 \text{sen}(\varphi) + 4 \cos(\varphi)$$

$$\tilde{a}^3 = a_z = \langle \xi_z | (5|i\rangle + 4|j\rangle + 3|k\rangle) \rangle = \langle k | (5|i\rangle + 4|j\rangle + 3|k\rangle) \rangle = 3$$

Esto es

$$|a\rangle = 5|i\rangle + 4|j\rangle + 3|k\rangle = (5 \cos(\varphi) + 4 \text{sen}(\varphi)) |\xi_\rho\rangle + (-5 \text{sen}(\varphi) + 4 \cos(\varphi)) |\xi_\varphi\rangle + 3 |\xi_z\rangle$$

Es claro que existen infinitos sistemas cilíndricos parametrizados por el ángulo φ , digamos

$$\varphi = \arctan\left(\frac{4}{5}\right) \Rightarrow \begin{cases} a_\rho = 5 \cos\left(\arctan\left(\frac{4}{5}\right)\right) + 4 \text{sen}\left(\arctan\left(\frac{4}{5}\right)\right) = \frac{25}{41} \sqrt{41} + \frac{16}{41} \sqrt{41} = \sqrt{41} \\ a_\varphi = -5 \text{sen}\left(\arctan\left(\frac{4}{5}\right)\right) + 4 \cos\left(\arctan\left(\frac{4}{5}\right)\right) = -\left(\frac{20}{41} \sqrt{41}\right) + \left(\frac{20}{41} \sqrt{41}\right) = 0 \\ a_z = 3 \end{cases}$$

con lo cual hemos alineado el eje $|\xi_\rho\rangle$ a lo largo del vector $|a\rangle$. Ese es un sistema de coordenadas cilíndrico muy particular.

5.5.2. Transformando tensores

Ilustremos ahora las transformaciones de tensores bajo cambios de la base del espacio vectorial. Consideremos el siguiente tensor

$$T_j^i = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \text{ en la base: } \{|e_1\rangle, |e_2\rangle, |e_3\rangle\} \equiv \{|i\rangle, |j\rangle, |k\rangle\}$$

Es decir, es un tensor que hemos expresado en coordenadas cartesianas y queremos pasarlo a cilíndricas. Este tipo de tensor transforma de la siguiente forma

$$\tilde{T}_m^k = \frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^m} T_j^i$$

Recordemos que anteriormente calculamos la matriz $\frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^i}$ a partir de la transformación de coordenadas. Haciendo lo mismo para $\frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^m}$ resulta

$$\frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^m} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial \tilde{x}^1} = \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x^1}{\partial \tilde{x}^2} = \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x^1}{\partial \tilde{x}^3} = \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial x^2}{\partial \tilde{x}^1} = \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial x^2}{\partial \tilde{x}^2} = \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial x^2}{\partial \tilde{x}^3} = \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial x^3}{\partial \tilde{x}^1} = \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial x^3}{\partial \tilde{x}^2} = \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial x^3}{\partial \tilde{x}^3} = \frac{\partial z}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\rho \sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \rho \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto

$$\tilde{T}_m^k = \frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^i} T_j^i \frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^m} \Rightarrow \tilde{T}_m^k = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) & 0 \\ -\frac{\sin(\varphi)}{\rho} & \frac{\cos(\varphi)}{\rho} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} T_j^i \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\rho \sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \rho \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sustituyendo el tensor y multiplicando las matrices

$$\tilde{T}_m^k = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) & 0 \\ -\frac{\sin(\varphi)}{\rho} & \frac{\cos(\varphi)}{\rho} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\rho \sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \rho \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

se obtiene

$$\tilde{T}_m^k = \begin{pmatrix} -\cos^2(\varphi) + 3 \cos(\varphi) \sin(\varphi) + 3 & \rho \sin(\varphi) \cos(\varphi) - 2\rho + 3\rho \cos^2(\varphi) & 3 \cos(\varphi) + 4 \sin(\varphi) \\ \frac{\cos(\varphi) \sin(\varphi) + 3 \cos^2(\varphi) - 1}{\rho} & -3 \cos(\varphi) \sin(\varphi) + \cos^2(\varphi) + 2 & -3 \frac{\sin(\varphi)}{\rho} + 4 \frac{\cos(\varphi)}{\rho} \\ \cos(\varphi) + 2 \sin(\varphi) & -\rho \sin(\varphi) + 2\rho \cos(\varphi) & 2 \end{pmatrix}$$

Si suponemos que el origen del sistema de coordenadas cilíndrico está en el vector anterior. Esto es

$$|a\rangle = 5|i\rangle + 4|j\rangle + 3|k\rangle \Rightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow \rho = \sqrt{5^2 + 4^2} = \sqrt{41} \\ \varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \Rightarrow \varphi = \arctan\left(\frac{4}{5}\right) = 0,67474 \text{ rad} \end{cases}$$

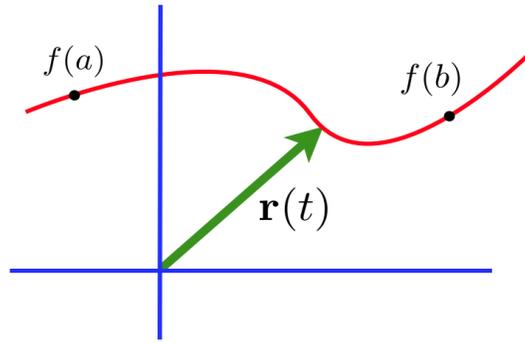


Figura 5.3: Radio vector posición $\mathbf{r}(t)$ en \mathfrak{R}^2 que describe paramétricamente una curva.

entonces

$$\tilde{T}_m^k = \begin{pmatrix} 3,8537 & 2,0303 & 4,8414 \\ 0,20569 & 1,1463 & 0,19512 \\ 2,0303 & 6,0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Para ver un ejemplo de cambios de tensores bajo sistemas de coordenadas no ortogonales pueden consultar la sección 3.6

5.6. Campos tensoriales y el concepto de campo

Cuando avanzamos en la derivación de vectores vimos vectores que dependían del tiempo. Luego cuando construimos sistemas de coordenadas ortogonales vimos también vectores que variaban en módulo dirección y sentido.

$$|a\rangle_{(t)} = a^k(t) |\hat{e}_k\rangle_{(t)} = \tilde{a}^k |w_k\rangle_{(t)} = \hat{a}^k(t) |\hat{e}_k\rangle$$

Ahora podemos generalizar este concepto a tensores que dependen de una variable escalar

$$\mathbf{T}[\circ, \circ, \dots, \circ; \bullet, \bullet, \dots, \bullet]_{(t)} = T_{ij\dots k}^{mn\dots l}(t)$$

esto es

$$T_{ij\dots k}^{mn\dots l}(t) \langle t^i(1) | \otimes \langle u^j(2) | \otimes \dots \otimes \langle v^k(m) | \otimes |x_m(1)\rangle \otimes |y_n(2)\rangle \otimes \dots \otimes |z_l(n)\rangle$$

$$\tilde{T}_{ij\dots k}^{mn\dots l} \langle \tilde{t}^i(1) |_{(t)} \otimes \langle \tilde{u}^j(2) |_{(t)} \otimes \dots \otimes \langle \tilde{v}^k(m) |_{(t)} \otimes |\tilde{x}_m(1)\rangle_{(t)} \otimes |\tilde{y}_n(2)\rangle_{(t)} \otimes \dots \otimes |\tilde{z}_l(n)\rangle_{(t)}$$

y al igual que los vectores, la dependencia funcional de los tensores variará con la base en la cual se exprese.

Así, tendremos tensores cuyas componentes, en una determinada base, serán variables y en otra no. Mientras que una de las bases será variable y otra no.

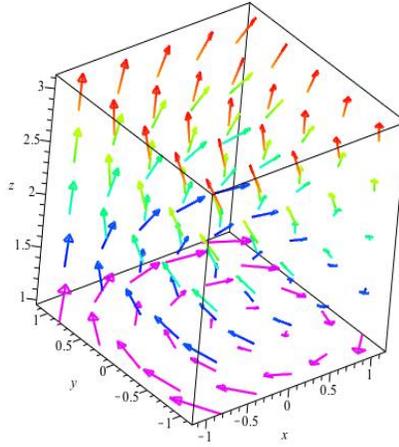


Figura 5.4: Campo Vectorial en \mathfrak{R}^3

Igualmente saltamos al cociente incremental para conocer la velocidad de variación

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{T}[\circ, \circ, \dots, \circ; \bullet, \bullet, \dots, \bullet]_{(t+\Delta t)} - \mathbf{T}[\circ, \circ, \dots, \circ; \bullet, \bullet, \dots, \bullet]_{(t)}}{\Delta t}$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{T}[\circ, \circ, \dots, \circ; \bullet, \bullet, \dots, \bullet]_{(t)}}{\Delta t} \iff \frac{d(\mathbf{T}[\circ, \circ, \dots, \circ; \bullet, \bullet, \dots, \bullet]_{(t)})}{dt}$$

Si la base es constante, la dependencia funcional y su variación (derivada) recae sobre sus componentes. Así podemos construir la derivada de las componentes como

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{T_{ij\dots k}^{mn\dots l}(t + \Delta t) - T_{ij\dots k}^{mn\dots l}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta T_{ij\dots k}^{mn\dots l}(t)}{\Delta t} = \frac{d(T_{ij\dots k}^{mn\dots l}(t))}{dt}$$

Siguiendo con el proceso de generalización, podemos pensar en una dependencia funcional multilineal. Esto es que el argumento de la “función” tensorial es otro tensor,

$$\mathbf{T}[\circ, \circ, \dots, \circ; \bullet, \bullet, \dots, \bullet] = \mathbf{T}[\circ, \circ, \dots, \circ; \bullet, \bullet, \dots, \bullet]_{\mathbf{G}[\circ, \circ, \dots, \circ; \bullet, \bullet, \dots, \bullet]}$$

A ese objeto se le llama *Campo Tensorial*, pero vamos con calma.

Analicemos los casos más simples los cuales son los verdaderamente útiles. Como era de esperarse, tendremos varios casos que se pueden construir a partir de esta idea. Hemos visto funciones que ahora llamaremos campos homogéneos

| | |
|---|---------|
| $\varphi = \varphi(t)$ | Función |
| $ r\rangle_{(t)} \iff \mathbf{r} = \mathbf{r}(t) \rightsquigarrow r^k(t)$ | Vector |
| $\mathbf{T} = \mathbf{T}[\circ, \circ, \dots, \circ; \bullet, \bullet, \dots, \bullet]_{(t)} \rightsquigarrow T_{ij\dots k}^{mn\dots l}(t)$ | Tensor |

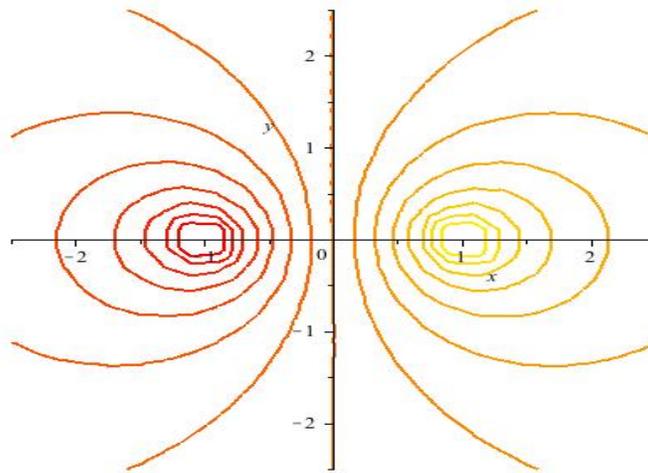


Figura 5.5: Ejemplo de Campo Escalar $\phi = \phi(\mathbf{r})$

y veremos campos constantes o estacionarios $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}(t)$

| | |
|---|-----------------|
| $\varphi = \varphi(\mathbf{r})$ | Campo Escalar |
| $ a\rangle_{(r\rangle)} \iff \mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{r}) \rightsquigarrow a^k(\mathbf{r})$ | Campo Vectorial |
| $\mathbf{T} = \mathbf{T} [o, o, \dots, o; \bullet, \bullet, \dots, \bullet]_{(r\rangle)} \rightsquigarrow T_{ij\dots k}^{mn\dots l}(\mathbf{r})$ | Campo Tensorial |

Campos variables o no estacionarios

| | |
|---|------------------------|
| $\varphi = \varphi(\mathbf{r}(t), t)$ | Campo Escalar Variable |
| $ a\rangle_{(r\rangle)} \iff \mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{r}(t), t) \rightsquigarrow a^k(\mathbf{r}(t), t)$ | Campo Vectorial |
| $\mathbf{T} = \mathbf{T} [o, o, \dots, o; \bullet, \bullet, \dots, \bullet]_{(r\rangle)} \rightsquigarrow T_{ij\dots k}^{mn\dots l}(\mathbf{r}(t), t)$ | Campo Tensorial |

La idea de los campos escalares, vectoriales, tensoriales, con argumento vectorial, es asociar un valor de la componente (escalar, vectorial o tensorial) a cada punto del espacio (si el vector está en \mathfrak{R}^3). Obviamente los campos escalares asocian un número a cada posición y los campos vectoriales, además del número (módulo) asocian una dirección y un sentido.

Ejemplos de campos escalares serán las distribuciones de densidad $\rho(\mathbf{r}(t))$, presión $P(\mathbf{r}(t))$ y temperatura $T(\mathbf{r}(t))$ de la atmósfera terrestre o la distribución de intensidades del campo eléctrico en una superficie. Así al considerar el potencial eléctrico

$$\phi(\mathbf{r}) = \phi(x, y) = \ln\left((x+1)^2 + y^2\right) - \ln\left((x-1)^2 + y^2\right)$$

La representación de este campo escalar será el que se puede apreciar en la Figura 5.5

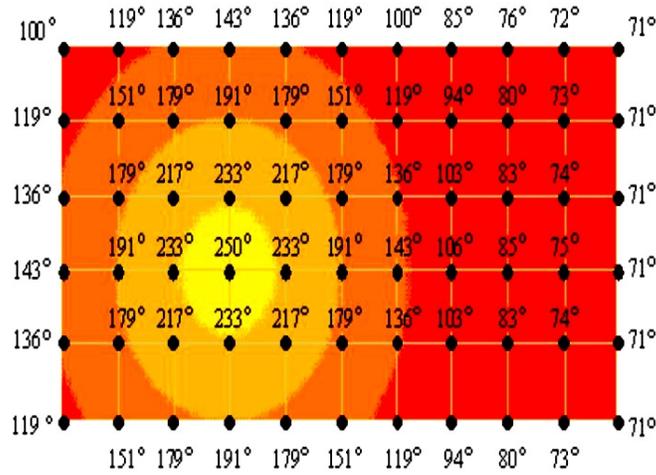


Figura 5.6: Ejemplo del Campo Escalar de Temperaturas $T = T(x, y)$

5.7. Campos escalares y superficies

Un campo escalar será aquella función escalar de argumento vectorial. Con ello a cada punto del espacio se le asocia un número. Esto es

$$\phi : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R} \quad \phi = \phi(\mathbf{r}) \Rightarrow \phi = \phi(x^i) = \phi(\tilde{x}^i) \Leftrightarrow \phi = \phi(x, y, z) = \phi(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$$

Estamos enfatizando el hecho que un campo escalar no variará bajo cambios de las coordenadas en su argumento. Adicionalmente recalcamos que es indistinto hablar de vectores $\phi = \phi(\mathbf{r})$ o sus coordenadas $\phi = \phi(x^i)$.

La Figura 5.6 ilustra un campo de temperaturas

$$T = T(x, y) = 70 + 180e^{-(x-3)^2/10 - (y-2)^2/10}$$

Si unimos los puntos con iguales temperaturas tendremos curvas isotermas tal y como se observan en la Figura 5.7

Un campo escalar $\phi = \phi(x^1, x^2)$ definirá superficies si la representamos en \mathfrak{R}^3 como $x^3 = \phi(x^1, x^2)$, esto es, curvas de nivel o isocurvas las cuales corresponden a soluciones de $\phi = \phi(x^i) = \text{cte}$. Tal y como se ilustra en la Figura 5.8, los planos $z = k = \text{cte}$. cortan la superficie y definen la curva $g(x, y) = z = k$.

5.8. Campos vectoriales y líneas de flujo

Consideremos ahora un campo vectorial $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ y estudiemos su representación, y lo que es más importante, su variación.

Tal y como hemos dicho y volvemos a representar en la Figura 5.9, los campos vectoriales asocian un vector (con su módulo dirección y sentido) a cada punto del espacio. Comúnmente, nos referimos a campos vectoriales según el caso: *campos de fuerza* (el vector del campo es una fuerza), *campo de velocidades* (el vector del campo es una velocidad). Del mismo modo, a aquellas líneas a las cuales los vectores son tangentes se les dominan *líneas de campo*, *curvas integrales* o simplemente *líneas de flujo* o de *corriente*. A las trayectorias

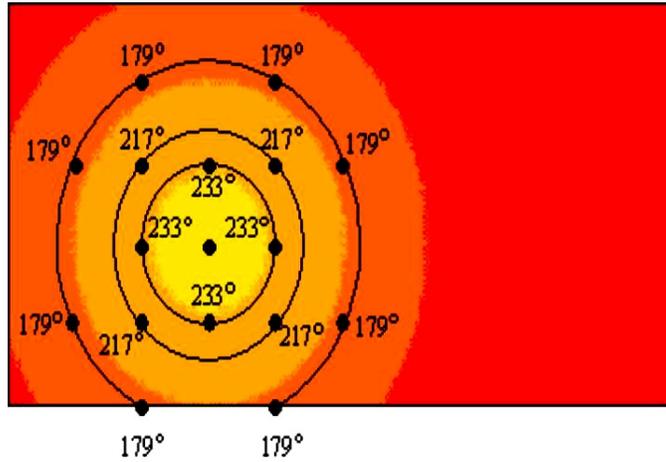


Figura 5.7: Curvas Isotermas $T = T(x, y) = cte$

ortogonales a estas líneas, vale decir, a aquellas líneas cuyos vectores tangentes son ortogonales al campo, se les denominarán *líneas equipotenciales*. El ejemplo más emblemático lo constituye el gradiente de un campo escalar $\nabla\phi(x, y)$. Las *líneas equipotenciales* las define el campo escalar mismo, $\phi(x, y) = z = cte$ (curva de nivel) y construimos un campo vectorial con su gradiente, $\nabla\phi(x, y)$. Como el gradiente es perpendicular a la curva de nivel tendremos que las *curvas integrales*, (líneas de flujo o líneas de corriente) del campo vectorial $\nabla\phi(x, y)$ serán *trayectorias ortogonales* a las *curvas equipotenciales*.

5.8.1. Líneas de flujo o curvas integrales

Supongamos el caso bidimensional³ en coordenadas cartesianas, y consideremos un desplazamiento diferencial $d\mathbf{r}$ en la dirección del campo vectorial, es fácil convencerse que

$$d\mathbf{r} \propto \mathbf{a}(x, y) = a_x(x, y)\mathbf{i} + a_y(x, y)\mathbf{j} \Rightarrow \frac{dx}{a_x(x, y)} = \frac{dy}{a_y(x, y)}$$

con lo cual encontramos las *líneas de flujo* o *curvas integrales* $y(x)$ del campo $\mathbf{a}(x, y)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_y(x, y)}{a_x(x, y)} \Rightarrow y(x) = \int \frac{a_y(x, y)}{a_x(x, y)} dx$$

así dado un campo vectorial

$$\mathbf{a} = -x\mathbf{i} + y\mathbf{j} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x} + C \Rightarrow y(x) = \frac{1}{x}C$$

o lo que son lo mismo hipérbolas $yx = C$.

Otra forma, equivalente de verlo es que

$$d\mathbf{r} \propto \mathbf{a}(x(t), y(t), z(t), t) \Rightarrow d\mathbf{r} \times \mathbf{a}(x(t), y(t), z(t), t) = 0$$

³El caso tridimensional sólo añade complicaciones técnicas y no riqueza conceptual.

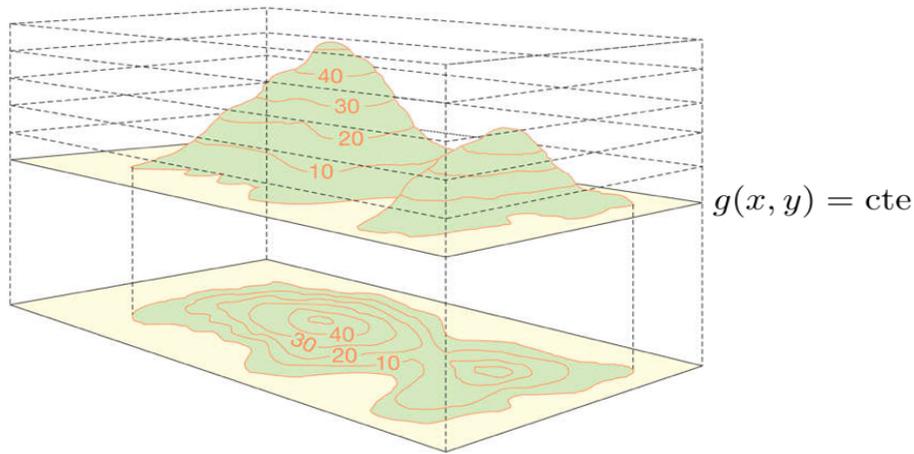


Figura 5.8: Curvas de Nivel para una función $z = g(x, y) = \text{cte}$.

$$\left\| \begin{array}{ccc} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ dx & dy & dz \\ a_x(x(t), y(t), z(t), t) & a_y(x(t), y(t), z(t), t) & a_z(x(t), y(t), z(t), t) \end{array} \right\| = 0$$

Por lo cual

$$\begin{aligned} & [a_z(x(t), y(t), z(t), t) dy - a_y(x(t), y(t), z(t), t) dz] \mathbf{i} \\ & + [a_x(x(t), y(t), z(t), t) dz - a_z(x(t), y(t), z(t), t) dx] \mathbf{j} \\ & + [a_y(x(t), y(t), z(t), t) dx - a_x(x(t), y(t), z(t), t) dy] \mathbf{k} = 0 \end{aligned}$$

y finalmente

$$\frac{dx}{a_x(x(t), y(t), z(t), t)} = \frac{dy}{a_y(x(t), y(t), z(t), t)} = \frac{dz}{a_z(x(t), y(t), z(t), t)}$$

La integral de estas ecuaciones construirá las líneas de flujo o curvas integrales.

5.8.2. Trayectorias ortogonales a las líneas de flujo

Para encontrar las *trayectorias ortogonales* al campo vectorial o las *líneas equipotenciales* construimos un campo vectorial $\mathbf{a}^\perp(x, y)$ que sea ortogonal en todo punto a $\mathbf{a}(x, y)$

$$\mathbf{a}^\perp(x, y) \cdot \mathbf{a}(x, y) = 0 \Rightarrow a_x(x, y) a_x^\perp(x, y) + a_y(x, y) a_y^\perp(x, y) = 0 \Rightarrow \frac{a_x(x, y)}{a_y(x, y)} = -\frac{a_y^\perp(x, y)}{a_x^\perp(x, y)}$$

donde

$$\mathbf{a}^\perp(x, y) = a_x^\perp(x, y) \mathbf{i} - a_y^\perp(x, y) \mathbf{j}$$

y ahora procedemos del mismo modo pero con el campo vectorial $\mathbf{a}^\perp(x, y)$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{a_y^\perp(x, y)}{a_x^\perp(x, y)} \Rightarrow y(x) = -\int \frac{a_y^\perp(x, y)}{a_x^\perp(x, y)} dx$$

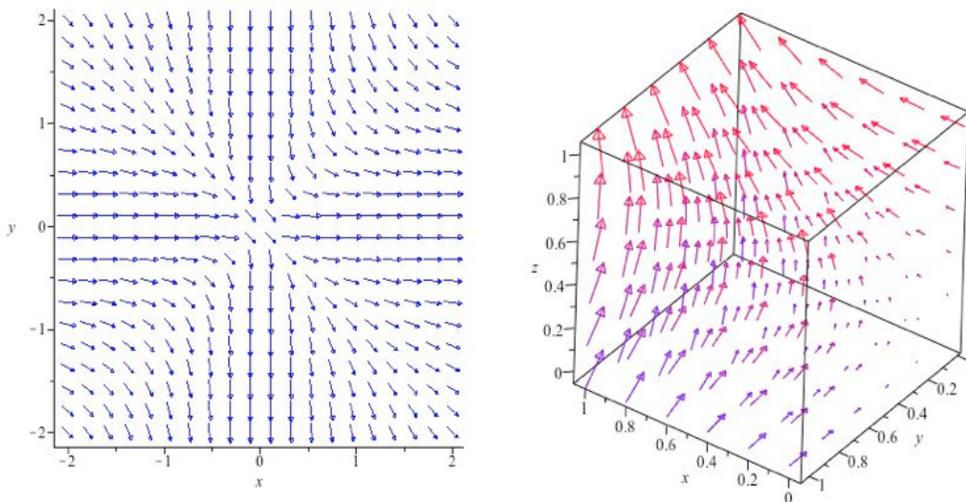


Figura 5.9: Campos vectoriales

con lo cual las trayectorias ortogonales al campo

$$\mathbf{a} = -x\mathbf{i} + y\mathbf{j} \Rightarrow \mathbf{a}^\perp = y\mathbf{i} + x\mathbf{j} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} \Rightarrow y(x) = \sqrt{C^2 + x^2}$$

serán curvas.

5.9. Flujo de Campos Vectoriales

Podemos también imaginar flujo de campos vectoriales. Para ello, consideramos una superficie infinitesimal $d\mathbf{S} = \|d\mathbf{S}\| \hat{\mathbf{n}}_s$, con $\hat{\mathbf{n}}_s$ el vector unitario normal esa superficie S . Entonces, la cantidad

$$dF = \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S} = \mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{n}}_s dS \Rightarrow F = \iint_s \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S} = \iint_s \mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{n}}_s dS = \iint_s a_{\hat{\mathbf{n}}} dS$$

representará el flujo del campo vectorial a través de la superficie $d\mathbf{S}$. Hemos denotado $a_{\hat{\mathbf{n}}}$ como la componente de \mathbf{a} a lo largo de $\hat{\mathbf{n}}_s$. Hay que hacer notar que $F = \iint_s \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S}$ es independiente del sistema de coordenadas y en cartesianas puede expresarse como

$$dF = \mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{n}}_s dS = a^1 \cos(\widehat{\hat{\mathbf{n}}_s a^1}) + a^2 \cos(\widehat{\hat{\mathbf{n}}_s a^2}) + a^3 \cos(\widehat{\hat{\mathbf{n}}_s a^3})$$

donde $\{a^1, a^2, a^3\}$ son las componentes cartesianas del vector \mathbf{a} . La idea que esta cantidad representa flujo puede tenerse si pensamos en un fluido incompresible que fluye con un campo de velocidades $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r})$. El volumen que atraviesa una determinada superficie en un intervalo de tiempo dt . Así, dS definirá la base de un tubo de fluido y tendrá como “altura” la $\|\mathbf{v}\| \cos(\widehat{\hat{\mathbf{n}}_s \mathbf{v}}) dt$ ya que la altura no tiene por qué ser perpendicular a la base⁴. Por lo tanto, la cantidad de fluido que atraviesa la superficie por unidad de tiempo

⁴Si lo es $\cos(\widehat{\hat{\mathbf{n}}_s \mathbf{v}}) = 1$ porque la velocidad es paralela a la normal.

viene dada por

$$dF = \left(\|\mathbf{v}\| \cos(\widehat{\hat{\mathbf{n}}_s \mathbf{v}}) \right) dS = \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}}_s dS = \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} \Rightarrow F = \iint_s \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = \iint_s \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}}_s dS = \iint_s v_{\hat{\mathbf{n}}} dS$$

5.10. La fauna de los operadores vectoriales

A partir del concepto de campo escalar, presentaremos la fauna de objetos diferenciales en el espacio tridimensional. Salvo que se diga lo contrario, utilizaremos el sistema de coordenadas cartesianas, vale decir

$$(q^1, q^2, q^3) \iff (x, y, z)$$

$$|r\rangle = x|i\rangle + y|j\rangle + z|k\rangle \iff \mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

$$d\mathbf{r} \Rightarrow |dr\rangle = \left(\frac{\partial |r\rangle}{\partial x} \right) dx + \left(\frac{\partial |r\rangle}{\partial y} \right) dy + \left(\frac{\partial |r\rangle}{\partial z} \right) dz = dx|i\rangle + dy|j\rangle + dz|k\rangle$$

$$h_x = \left\| \frac{\partial |r\rangle}{\partial x} \right\| = 1, \quad h_y = \left\| \frac{\partial |r\rangle}{\partial y} \right\| = 1, \quad h_z = \left\| \frac{\partial |r\rangle}{\partial z} \right\| = 1$$

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \iff g_{11} = g_{xx} = 1; \quad g_{22} = g_{yy} = 1; \quad g_{33} = g_{zz} = 1.$$

5.10.1. Derivada direccional, diferencial total y gradiente

Derivada direccional de Campos escalares

Para analizar los cambios en los campos escalares requerimos comparar dos “instantes de tiempo” para ello, parametrizamos las componentes del vector y tendremos que

$$z = \phi(\mathbf{r}(t)) = g(x(t), y(t))$$

$$\frac{d\phi(x(t), y(t))}{dt} = \frac{\partial \phi(x(t), y(t))}{\partial x} \frac{dx(t)}{dt} + \frac{\partial \phi(x(t), y(t))}{\partial y} \frac{dy(t)}{dt} = \nabla \phi(x(t), y(t)) \cdot \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt}$$

donde hemos representado

$$\nabla \phi(x(t), y(t)) = \frac{\partial \phi(x, y)}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \phi(x, y)}{\partial y} \mathbf{j} = \phi_x(x, y) \mathbf{i} + \phi_y(x, y) \mathbf{j} = \partial^i \phi(x, y) |i\rangle = \phi^{,i}(x, y) |i\rangle$$

y lo llamaremos el gradiente de la función. El gradiente de un campo escalar es uno de los objetos más útiles, el cual lo hemos utilizado de manera operacional y no nos hemos detenido a reflexionar sobre sus propiedades.

Es claro que para una curva de nivel

$$g(x, y) = z = \phi(\mathbf{r}(t)) = k = \text{cte}$$

$$\frac{d\phi(x(t), y(t))}{dt} = \frac{dk}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{d\phi(x(t), y(t))}{dt} = 0 = \nabla \phi(x(t), y(t)) \cdot \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt}$$

con lo cual dado que $\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt}$ es la tangente a la curva, el gradiente es perpendicular a la curva. La derivada direccional indicará la tasa de cambio del campo escalar en la dirección que apuntemos.

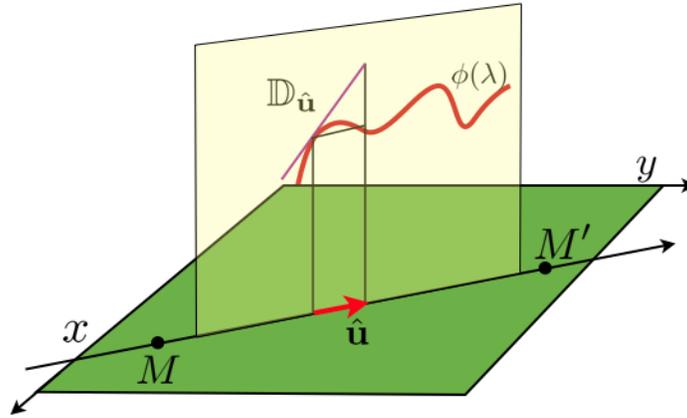


Figura 5.10: Derivada Direccional

En una generalización de la idea que surge de parametrización de la curva o de la derivada total respecto al tiempo

$$\frac{d\phi}{dt} = \nabla\phi(x(t), y(t)) \cdot \frac{dr(t)}{dt}$$

Así es claro que, dados dos puntos M y M' definiremos la derivada en la dirección de un vector unitario $\hat{\mathbf{u}} \leftrightarrow \overrightarrow{M'M}$ como

$$\mathbb{D}_{\hat{\mathbf{u}}}\phi = \nabla\phi(x, y) \cdot \hat{\mathbf{u}} = \frac{d\phi}{d\lambda} = \lim_{M' \rightarrow M} \frac{\phi(M') - \phi(M)}{|\overrightarrow{M'M}|}$$

Tal y como se puede apreciar en la figura (5.10) la derivada direccional representa la pendiente de la recta tangente a la curva que surge como intersección entre la superficie $\phi(x, y) = z = k = \text{cte}$ y el plano vertical formado por el eje z y el vector unitario $\hat{\mathbf{u}}$. Si se da el caso que la función ϕ dependa de manera explícita del parámetro tendremos que

$$\phi = \phi(x(t), y(t), t) \Rightarrow \frac{d\phi}{dt} = \frac{\partial\phi(x(t), y(t), t)}{\partial t} + \nabla\phi(x(t), y(t), t) \cdot \frac{dr(t)}{dt}$$

En este punto, varias conclusiones se pueden derivar del concepto de derivada total. La primera es que dado que, la norma de la derivada direccional a lo largo de $\hat{\mathbf{u}}$ es

$$\|\mathbb{D}_{\hat{\mathbf{u}}}\phi\| = \|\nabla\phi(x, y) \cdot \hat{\mathbf{u}}\| = |\nabla\phi(x, y)| \cos(\widehat{\nabla\phi(x, y), \hat{\mathbf{u}}})$$

(donde hemos denotado por $\widehat{\nabla\phi(x, y), \hat{\mathbf{u}}}$ como el ángulo que forman los vectores $\nabla\phi(x, y)$ y $\hat{\mathbf{u}}$), el valor máximo del la norma de la derivada direccional será

$$\|\mathbb{D}_{\hat{\mathbf{u}}}\phi\|_{\text{máx}} = |\nabla\phi(x, y)| = \sqrt{\partial^i\phi\partial_i\phi} \equiv \sqrt{\frac{\partial\phi}{\partial x_i} \frac{\partial\phi}{\partial x^i}} \equiv \sqrt{\left(\frac{\partial\phi}{\partial x^1}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial x^3}\right)^2}$$

Es decir, cuando $\hat{\mathbf{u}}$ apunta en la dirección del gradiente, o lo que es lo mismo, en la dirección de la mayor tasa de cambio el valor máximo lo indica la dirección del gradiente. O dicho de otro modo, en un determinado

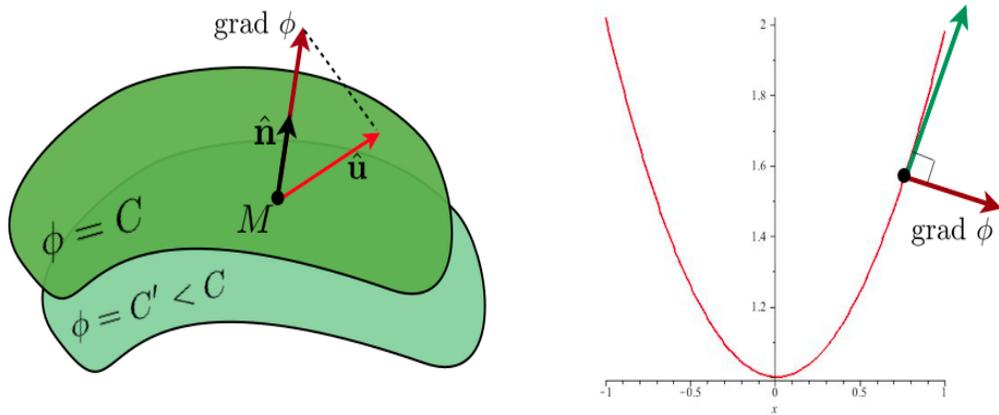


Figura 5.11: Dirección de máxima variación en una función. Gradiente y tangente de una función.

punto M de la superficie $\phi(x, y) = z$ el vector $\nabla\phi$ apunta en la dirección de la máxima tasa de cambio, tal y como podemos apreciar en la figura (5.11).

La segunda conclusión es dado que el gradiente es ortogonal a la superficie, los vectores perpendiculares a él conformarán el plano tangente a la superficie en un determinado punto.

Gradiente y flujo de un campo vectorial

Podemos utilizar la idea de flujo de un campo vectorial y generalizar la definición de gradiente para que sea independiente de coordenadas.

$$\nabla\phi = \text{grad } \phi = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \iint_s \phi(x, y, z) \, dS = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \iint_s \phi(x, y, z) \, \hat{\mathbf{n}}_s \, dS$$

Esto es, supongamos que construimos un campo vectorial de la forma siguiente

$$\mathbf{a}(x, y, z) = \mathbf{c} \phi(x, y, z) \quad \text{con } \mathbf{c} = \text{cte}$$

con lo cual

$$\mathbf{F} = \iiint_s \mathbf{c} \phi(x, y, z) \cdot d\mathbf{S} = \iint_s \mathbf{c} \phi(x, y, z) \cdot \hat{\mathbf{n}}_s \, dS$$

Es claro que esta expresión vale para todos los sistemas de coordenadas. En particular, para un sistema de coordenadas cartesianas construimos un cubo diferencial con aristas que coincidan con los ejes coordenados. Entonces se tiene que las caras del cubo serán con

$$\begin{aligned} d\mathbf{S}_{x+} &= (dy \, dz) \mathbf{i}; & d\mathbf{S}_{x-} &= -(dy \, dz) \mathbf{i} \\ d\mathbf{S}_{y+} &= (dx \, dz) \mathbf{j}; & d\mathbf{S}_{y-} &= -(dx \, dz) \mathbf{j} \\ d\mathbf{S}_{z+} &= (dx \, dy) \mathbf{k}; & d\mathbf{S}_{z-} &= -(dx \, dy) \mathbf{k} \end{aligned}$$

con lo cual, el flujo por las seis caras será

$$\begin{aligned} dF &= \mathbf{c} \phi(x, y, z) \cdot d\mathbf{S}_{x+} + \mathbf{c} \phi(x, y, z) \cdot d\mathbf{S}_{x-} + \mathbf{c} \phi(x, y, z) \cdot d\mathbf{S}_{y+} \\ &+ \mathbf{c} \phi(x, y, z) \cdot d\mathbf{S}_{y-} + \mathbf{c} \phi(x, y, z) \cdot d\mathbf{S}_{z+} + \mathbf{c} \phi(x, y, z) \cdot d\mathbf{S}_{z-} \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} dF &= \mathbf{c} [\phi(x+dx, y, z) dy dz - \phi(x, y, z) dy dz + \phi(x, y+dy, z) dx dz - \phi(x, y, z) dx dz \\ &+ \phi(x, y, z+dz) dx dy - \phi(x, y, z) dx dy] \\ dF &= \mathbf{c} [\{\phi(x+dx, y, z) - \phi(x, y, z)\} dy dz + \{\phi(x, y+dy, z) - \phi(x, y, z)\} dx dz + \\ &+ \{\phi(x, y, z+dz) - \phi(x, y, z)\} dx dy] \end{aligned}$$

Desarrollando por Taylor hasta primer orden porque estamos considerando un “cubo diferencial” tendremos que

$$\begin{aligned} \phi(x+dx, y, z) &\approx \phi(x, y, z) + \frac{\partial \phi(x, y, z)}{\partial x} dx \\ \phi(x, y+dy, z) &\approx \phi(x, y, z) + \frac{\partial \phi(x, y, z)}{\partial y} dy \\ \phi(x, y, z+dz) &\approx \phi(x, y, z) + \frac{\partial \phi(x, y, z)}{\partial z} dz \end{aligned}$$

Con lo cual

$$\begin{aligned} dF &= \frac{\partial \phi(x, y, z)}{\partial x} dx dy dz + \frac{\partial \phi(x, y, z)}{\partial y} dy dx dz + \frac{\partial \phi(x, y, z)}{\partial z} dz dx dy \\ &= \left(\frac{\partial \phi(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial \phi(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial \phi(x, y, z)}{\partial z} \right) dV \Rightarrow dF = \nabla \phi dV \end{aligned}$$

$$\nabla \phi = \frac{dF}{dV} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{F_2 - F_1}{V_2 - V_1} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \iint_s \phi(x, y, z) d\mathbf{S} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \iint_s \phi(x, y, z) \hat{\mathbf{n}} dS$$

Nótese que hemos supuesto que $\Delta V \equiv V_2 \equiv V$ y que $F_2 = \iint_s \phi(x, y, z) d\mathbf{S}$. Que quiere decir que tanto $V_1 \sim 0$ con lo cual el flujo a través de un punto se anula, $F_1 \sim 0$.

Gradiente y coordenadas curvilíneas

La generalización de la expresión del gradiente en coordenadas curvilíneas es inmediata a partir de diferencial total de una función $\phi(q^1, q^2, q^3)$. Esto es

$$\phi(q^1, q^2, q^3) = \phi(q^j) \Rightarrow d\phi = \frac{\partial \phi(q^1, q^2, q^3)}{\partial q^j} dq^j = \phi(q^1, q^2, q^3) \cdot d\mathbf{r}$$

con

$$\nabla \phi(q^1, q^2, q^3) = \frac{1}{\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^1} \right\|} \frac{\partial \phi}{\partial q^1} \langle e_1 | + \frac{1}{\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^2} \right\|} \frac{\partial \phi}{\partial q^2} \langle e_2 | + \frac{1}{\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^3} \right\|} \frac{\partial \phi}{\partial q^3} \langle e_3 |$$

y

$$d\mathbf{r} = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^1} dq^1 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^2} dq^2 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^3} dq^3 \right) \Rightarrow \left\| \frac{\partial |r\rangle}{\partial q^1} \right\| |e_1\rangle dq^1 + \left\| \frac{\partial |r\rangle}{\partial q^2} \right\| |e_2\rangle dq^2 + \left\| \frac{\partial |r\rangle}{\partial q^3} \right\| |e_3\rangle dq^3$$

ya que

$$|e_1\rangle = \frac{1}{\left\| \frac{\partial |r\rangle}{\partial q^1} \right\|} \frac{\partial |r\rangle}{\partial q^1}; \quad |e_2\rangle = \frac{1}{\left\| \frac{\partial |r\rangle}{\partial q^2} \right\|} \frac{\partial |r\rangle}{\partial q^2}; \quad |e_3\rangle = \frac{1}{\left\| \frac{\partial |r\rangle}{\partial q^3} \right\|} \frac{\partial |r\rangle}{\partial q^3};$$

Es decir, la forma general del gradiente para un sistema de coordenadas curvilíneas es

$$\nabla \phi = \text{grad } \phi = \frac{1}{h_1} \frac{\partial \phi}{\partial \tilde{x}^1} |e_1\rangle + \frac{1}{h_2} \frac{\partial \phi}{\partial \tilde{x}^2} |e_2\rangle + \frac{1}{h_3} \frac{\partial \phi}{\partial \tilde{x}^3} |e_3\rangle$$

Donde denotamos $h_i = \left\| \frac{\partial |r\rangle}{\partial q^i} \right\| = \sqrt{g_{ii}}$ el factor de escala que acompaña a la base $|e_i\rangle$.

5.10.2. Divergencia y flujo en campos vectoriales

Viendo con un poco más de cuidado la expresión para el gradiente tenemos

$$\nabla(\phi) = \text{grad } \phi = \left(\frac{|e_1\rangle}{h_1} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^1} + \frac{|e_2\rangle}{h_2} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{|e_3\rangle}{h_3} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^3} \right) \phi = \frac{|e_i\rangle}{(h)_i} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^i} \phi$$

Donde hemos indicado por $(h)_i$ al factor de escala y no implica suma. La suma está indicada entre las componentes $\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^i} \equiv \partial_i$ y los elementos de la base $\{|e_i\rangle\}$. Con esta inspiración podemos construir un operador vectorial

$$\nabla \equiv \frac{\langle e_1 |}{\mathcal{H}(h_1, h_2, h_3)} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^1} + \frac{\langle e_2 |}{\mathcal{F}(h_1, h_2, h_3)} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\langle e_3 |}{\mathcal{G}(h_1, h_2, h_3)} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^3}$$

con lo cual, si cuidamos el orden de operación, podremos realizar un “producto escalar entre dos vectores”

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{a} &\equiv \left(\frac{\langle e_1 |}{\mathcal{H}(h_1, h_2, h_3)} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^1} + \frac{\langle e_2 |}{\mathcal{F}(h_1, h_2, h_3)} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\langle e_3 |}{\mathcal{G}(h_1, h_2, h_3)} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^3} \right) (a^1 |e_1\rangle + a^2 |e_2\rangle + a^3 |e_3\rangle) \\ \nabla \cdot \mathbf{a} &\equiv \frac{\langle e_1 |}{\mathcal{H}(h_1, h_2, h_3)} \frac{\partial (a^1 |e_1\rangle + a^2 |e_2\rangle + a^3 |e_3\rangle)}{\partial \tilde{x}^1} + \frac{\langle e_2 |}{\mathcal{F}(h_1, h_2, h_3)} \frac{\partial (a^1 |e_1\rangle + a^2 |e_2\rangle + a^3 |e_3\rangle)}{\partial \tilde{x}^2} \\ &+ \frac{\langle e_3 |}{\mathcal{G}(h_1, h_2, h_3)} \frac{\partial (a^1 |e_1\rangle + a^2 |e_2\rangle + a^3 |e_3\rangle)}{\partial \tilde{x}^3} \end{aligned}$$

y hay que tener cuidado con la posible variación de los vectores base. Consideremos en caso de coordenadas cartesianas, $(x^1, x^2, x^3) \rightarrow (x, y, z)$, donde la base $\{|e_i\rangle\} \equiv \{|i\rangle, |j\rangle, |k\rangle\}$ es constante. Entonces tendremos de forma inmediata que

$$\nabla \cdot \mathbf{a} = \frac{\partial a^i(x^j)}{\partial \tilde{x}^i} \equiv \partial_i a^i(x^j) \equiv \frac{\partial a_x(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial a_y(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial a_z(x, y, z)}{\partial z}$$

Divergencia como medida de flujo

El significado físico de la divergencia puede comprenderse si consideramos la siguiente definición, independiente del sistema de coordenadas

$$\text{div } \mathbf{a} \equiv \nabla \cdot \mathbf{a} = \frac{dF}{dV} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \iint_s \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S} \equiv \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \iint_s \mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{n}}_s dS = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \iint_s a_{\hat{\mathbf{n}}} dS$$

Es decir, el flujo por unidad de volumen. Otra vez, para un sistema de coordenadas cartesianas construimos un cubo diferencial con aristas que coincidan con los ejes coordenados. Entonces se tiene que las caras del cubo serán con

$$\begin{aligned} d\mathbf{S}_{x+} &= (dy \, dz) \mathbf{i}; & d\mathbf{S}_{x-} &= -(dy \, dz) \mathbf{i} \\ d\mathbf{S}_{y+} &= (dx \, dz) \mathbf{j}; & d\mathbf{S}_{y-} &= -(dx \, dz) \mathbf{j} \\ d\mathbf{S}_{z+} &= (dx \, dy) \mathbf{k}; & d\mathbf{S}_{z-} &= -(dx \, dy) \mathbf{k} \end{aligned}$$

El flujo por las seis caras será

$$dF = \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S}_{x+} + \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S}_{x-} + \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S}_{y+} + \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S}_{y-} + \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S}_{z+} + \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S}_{z-}$$

con lo cual

$$\begin{aligned} dF &= a_x(x+dx, y, z) \, dy \, dz - a_x(x, y, z) \, dy \, dz + a_y(x, y+dy, z) \, dx \, dz - a_y(x, y, z) \, dx \, dz \\ &+ a_z(x, y, z+dz) \, dx \, dy - a_z(x, y, z) \, dx \, dy \\ &= [a_x(x+dx, y, z) - a_x(x, y, z)] \, dy \, dz + [a_y(x, y+dy, z) - a_y(x, y, z)] \, dx \, dz \\ &+ [a_z(x, y, z+dz) - a_z(x, y, z)] \, dx \, dy \end{aligned}$$

Desarrollando por Taylor otra vez, tendremos

$$\begin{aligned} a_x(x+dx, y, z) &\approx a_x(x, y, z) + \frac{\partial a_x(x, y, z)}{\partial x} dx \\ a_y(x, y+dy, z) &\approx a_y(x, y, z) + \frac{\partial a_y(x, y, z)}{\partial y} dy \\ a_z(x, y, z+dz) &\approx a_z(x, y, z) + \frac{\partial a_z(x, y, z)}{\partial z} dz \end{aligned}$$

y obtendremos

$$\begin{aligned} dF &= \frac{\partial a_x(x, y, z)}{\partial x} dx \, dy \, dz + \frac{\partial a_y(x, y, z)}{\partial y} dy \, dx \, dz + \frac{\partial a_z(x, y, z)}{\partial z} dz \, dx \, dy \\ &= \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S} = \left(\frac{\partial a_x(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial a_y(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial a_z(x, y, z)}{\partial z} \right) dV \end{aligned}$$

Consecuentemente

$$F = \iint_S \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \left(\frac{\partial a_x(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial a_y(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial a_z(x, y, z)}{\partial z} \right) dV \equiv \iiint_V (\nabla \cdot \mathbf{a}) dV$$

La primera conclusión es que podemos convertir una integral de superficie cerrada de un campo vectorial, en una integral de volumen encerrada por esa misma superficie. Lo hemos demostrado para el caso de coordenadas cartesianas, pero como el flujo $F = \iint_S \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S}$ es un escalar, esta afirmación vale para **cualquier sistema de coordenadas**. Esto se conoce como el *Teorema de la Divergencia* el cual veremos más adelante (ver sección 5.12.1 en la página 263). A partir de este teorema tenemos que si la divergencia de un campo vectorial es positiva lo interpretaremos como flujo hacia afuera (saliente) del volumen V encerrado por la superficie, S , y si la divergencia del campo es negativa tendremos flujo entrante. Como ilustración puede ver el ejemplo de la página 245.

Divergencia y coordenadas curvilíneas

Para encontrar la expresión para la divergencia en coordenadas curvilíneas generalizadas partimos de la definición invariante de sistema de coordenadas

$$\operatorname{div} \mathbf{a} \equiv \nabla \cdot \mathbf{a} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \iint_S \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S} \equiv \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \iint_S \mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{n}}_s dS = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \iint_S a_{\hat{\mathbf{n}}} dS$$

Al igual que procedimos en coordenadas cartesianas, ahora consideraremos un “paralelepípedo curvilíneo” con tres de sus aristas alineadas con el sistema ortogonal curvilíneo. Las caras de este “paralelepípedo curvilíneo” podrán ser representadas como

$$\begin{aligned} d\mathbf{S}_{q^1+} &= (ds_{\rightarrow q^2} ds_{\rightarrow q^3})_{dq^1} |e_1\rangle; & d\mathbf{S}_{q^1-} &= -(ds_{\rightarrow q^2} ds_{\rightarrow q^3}) |e_1\rangle \\ d\mathbf{S}_{q^2+} &= (ds_{\rightarrow q^3} ds_{\rightarrow q^1})_{dq^2} |e_2\rangle; & d\mathbf{S}_{q^2-} &= -(ds_{\rightarrow q^3} ds_{\rightarrow q^1}) |e_2\rangle \\ d\mathbf{S}_{q^3+} &= (ds_{\rightarrow q^1} ds_{\rightarrow q^2})_{dq^3} |e_3\rangle; & d\mathbf{S}_{q^3-} &= -(ds_{\rightarrow q^1} ds_{\rightarrow q^2}) |e_3\rangle \end{aligned}$$

donde denotamos $ds_{\rightarrow q^i}$ el arco de curva a lo largo de la coordenadas curvilíneas generalizada q^i . Los paréntesis $(\cdot)_{dq^i}$ indican que esta superficie es evaluada en $q^i + dq^i$. Adicionalmente, es de hacer notar que

$$(ds_{\rightarrow q^i}) = \sqrt{g_{ii}} dq^i = h_i dq^i, \quad \text{aquí los índices repetidos NO indican suma}$$

Ahora bien, dado que $|a\rangle \equiv \mathbf{a} = a^j |e_j\rangle$, el flujo por las seis caras será

$$dF = \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S}_{q^1+} + \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S}_{q^1-} + \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S}_{q^2+} + \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S}_{q^2-} + \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S}_{q^3+} + \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S}_{q^3-}$$

Para comenzar vemos que es el flujo del campo vectorial lo que está siendo evaluado en dos puntos distintos. A lo largo de q^1 vemos que

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S}_{q^1-} &= (a^1(q^1, q^2, q^3) h_2 h_3) dq^2 dq^3 \\ \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S}_{q^2-} &= (a^2(q^1, q^2, q^3) h_3 h_1) dq^3 dq^1 \\ \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S}_{q^3-} &= (a^3(q^1, q^2, q^3) h_1 h_2) dq^1 dq^2 \end{aligned}$$

con lo cual es el flujo lo que debemos desarrollar por Taylor.

$$\begin{aligned} a^1(q^1 + dq^1, q^2, q^3) h_2 h_3 &= a^1(q^1, q^2, q^3) h_2 h_3 + \frac{\partial (a^1(q^1, q^2, q^3) h_2 h_3)}{\partial q^1} dq^1 \\ a^2(q^1, q^2 + dq^2, q^3) h_3 h_1 &= a^2(q^1, q^2, q^3) h_3 h_1 + \frac{\partial (a^2(q^1, q^2, q^3) h_3 h_1)}{\partial q^2} dq^2 \\ a^3(q^1 + dq^1, q^2, q^3) h_1 h_2 &= a^3(q^1, q^2, q^3) h_1 h_2 + \frac{\partial (a^3(q^1, q^2, q^3) h_1 h_2)}{\partial q^3} dq^3 \end{aligned}$$

Nótese que el caso cartesiano no se hizo explícito este hecho por cuanto $h_3 = h_2 = h_1 = 1$. Entonces el flujo por el caso de coordenadas curvilíneas será

$$\begin{aligned} dF &= \frac{\partial (a^1(q^1, q^2, q^3) h_2 h_3)}{\partial q^1} dq^1 dq^2 dq^3 + \frac{\partial (a^2(q^1, q^2, q^3) h_3 h_1)}{\partial q^2} dq^2 dq^3 dq^1 + \\ &\quad + \frac{\partial (a^3(q^1, q^2, q^3) h_1 h_2)}{\partial q^3} dq^3 dq^1 dq^2 \end{aligned}$$

Si recordamos que

$$dV = (ds_{\rightarrow q^1}) (ds_{\rightarrow q^2}) (ds_{\rightarrow q^3}) = \sqrt{g_{11}} dq^1 \sqrt{g_{22}} dq^2 \sqrt{g_{33}} dq^3 = h_1 h_2 h_3 dq^1 dq^2 dq^3$$

donde denotamos $ds_{\rightarrow q^i}$ el arco de curva a lo largo de la coordenadas curvilíneas generalizada q^i .

Tendremos que

$$\frac{dF}{dV} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left(\frac{\partial (a^1 (q^1, q^2, q^3) h_2 h_3)}{\partial q^1} + \frac{\partial (a^2 (q^1, q^2, q^3) h_3 h_1)}{\partial q^2} + \frac{\partial (a^3 (q^1, q^2, q^3) h_1 h_2)}{\partial q^3} \right)$$

con lo cual identificamos la forma genérica de la divergencia en coordenadas curvilíneas

$$\operatorname{div} \mathbf{a} \equiv \nabla \cdot \mathbf{a} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left(\frac{\partial (a^1 (q^1, q^2, q^3) h_2 h_3)}{\partial q^1} + \frac{\partial (a^2 (q^1, q^2, q^3) h_3 h_1)}{\partial q^2} + \frac{\partial (a^3 (q^1, q^2, q^3) h_1 h_2)}{\partial q^3} \right).$$

Un par de ejemplos

■ La ecuación de continuidad

El primero de los ejemplos que consideraremos es la ecuación de continuidad. Consideremos una superficie cerrada S que encierra un volumen V . Esta superficie está inmersa en un fluido, de densidad $\rho(\mathbf{r}, t)$ que fluye con un campo de velocidades $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$. Supondremos además que el volumen V que encierra la superficie S no cambia de posición, con lo cual, la variación de masa del fluido contenido en este volumen es

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\iiint_V \rho(\mathbf{r}, t) dV \right) = \iiint_V \frac{\partial \rho(\mathbf{r}, t)}{\partial t} dV$$

Entonces, la variación de la cantidad de fluido encerrada por la superficie S será igual a la cantidad de fluido que escapa (o ingresa) a través de esa superficie. Esto es

$$\iiint_V \frac{\partial \rho(\mathbf{r}, t)}{\partial t} dV = - \iint_S \rho(\mathbf{r}, t) \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \cdot \hat{\mathbf{n}}_s dS = - \iiint_V \nabla \cdot (\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \rho(\mathbf{r}, t)) dV$$

con lo cual

$$\iiint_V \left(\frac{\partial \rho(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \rho(\mathbf{r}, t)) \right) dV = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \rho(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \rho(\mathbf{r}, t)) = 0$$

y esta última representa la ecuación de continuidad en dinámica de fluidos.

■ Fuentes y sumideros

El segundo ejemplo es un cálculo explícito que ilustra la interpretación de la divergencia como medida de flujo de un campo vectorial. Consideremos un campo vectorial de la forma

$$\mathbf{a}(\mathbf{r}) = q \frac{\mathbf{r}}{r^3} \equiv \frac{q}{r^2} \hat{\mathbf{u}}_r$$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{a} &= \frac{1}{h_r h_\theta h_\varphi} \left(\frac{\partial (a_r (r, \theta, \varphi) h_\theta h_\varphi)}{\partial r} + \frac{\partial (a_\theta (r, \theta, \varphi) h_r h_\varphi)}{\partial \theta} + \frac{\partial (a_\varphi (r, \theta, \varphi) h_r h_\theta)}{\partial \varphi} \right) \\ &= \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \frac{\partial \left(\frac{q}{r^2} r^2 \sin(\theta) \right)}{\partial r} = 0 \end{aligned}$$

ya que en coordenadas esféricas, $h_r = 1$, $h_\theta = r$, $h_\varphi = r \sin \theta$.

Nótese que el origen del sistema coordenado (el punto $r = 0$) no está definido porque no lo estaba en el campo vectorial original $\mathbf{a}(\mathbf{r}) = \frac{q}{r^2} \hat{\mathbf{u}}_r$. Con lo cual, se tiene que si la superficie S **no** encierra a $r = 0$, entonces el flujo a través de esa superficie será nulo

$$F = \iint_S \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V (\nabla \cdot \mathbf{a}) dV = 0.$$

Es decir, todo lo que entra sale. Sin embargo, si el volumen **contiene** al origen de coordenadas no podemos decir nada por cuanto hay una indeterminación en la expresión de la divergencia.

Consideremos con más cuidado este caso de la aplicación del *Teorema de la Divergencia*, en el cual la superficie S **contenga** el origen de coordenadas. Es claro que el volumen contenido entre dos esferas de distintos radio $\tilde{r} < r$, centradas en el origen y con superficies \tilde{S} y S respectivamente no contiene al origen y por lo tanto el flujo será nulo

$$F = \iiint_V (\nabla \cdot \mathbf{a}) dV = 0 = \iint_S \mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{n}}_s dS + \iint_{\tilde{S}} \mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{n}}_{\tilde{s}} d\tilde{S}$$

Pero el campo vectorial sobre la superficie \tilde{S} de la esfera de radio \tilde{r} es

$$\mathbf{a} = \frac{q}{\tilde{r}^2} \hat{\mathbf{u}}_r, \text{ y } \hat{\mathbf{n}}_{\tilde{s}} \equiv -\hat{\mathbf{u}}_r, \text{ con lo cual } \iint_{\tilde{S}} \mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{n}}_{\tilde{s}} d\tilde{S} = \iint_{\tilde{S}} \frac{q}{\tilde{r}^2} \hat{\mathbf{u}}_r \cdot (-\hat{\mathbf{u}}_r) d\tilde{S} = - \iint_{\tilde{S}} \frac{q}{\tilde{r}^2} ds_{\rightarrow\theta} ds_{\rightarrow\varphi}$$

es decir,

$$\iint_S \mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{n}}_s dS = \iint_{\tilde{S}} \frac{q}{\tilde{r}^2} ds_{\rightarrow\theta} ds_{\rightarrow\varphi} = \iint_{\tilde{S}} \frac{q}{\tilde{r}^2} \tilde{r}^2 \sin(\theta) d\theta d\varphi = q \int_0^\pi \sin(\theta) d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = 4\pi q$$

ya que: $d\tilde{S} = h_\theta d\theta h_\varphi d\varphi \equiv \tilde{r} d\theta \tilde{r} \sin(\theta) d\varphi$. Con lo cual, tenemos que el flujo de un campo singular en un punto (el origen de coordenadas), $\mathbf{a}(\mathbf{r}) = \frac{q}{r^2} \hat{\mathbf{u}}_r$, a través de una superficie que encierra ese punto singular, no es nulo y es igual a $4\pi q$. El campo vectorial $\mathbf{a}(\mathbf{r})$, se denominará campo de una partícula fuente si $q > 0$ y campo de un sumidero si $q < 0$.

5.10.3. Rotores, Líneas de torbellino y Circulación

Del mismo modo como hemos venido procediendo, haremos otra operación vectorial con el operador nabla ∇ . Tendremos entonces el *rotor* o *rotacional* actuando u operando sobre un campo vectorial $\nabla \times \mathbf{a}$. En coordenadas cartesianas podremos expresar esta operación como

$$\nabla \times \mathbf{a} = \varepsilon^{ijk} \partial_j a_k |e_i\rangle \equiv \varepsilon^{ijk} \frac{\partial a_k}{\partial x^j} |e_i\rangle = (\partial_2 a_3 - \partial_3 a_2) |e_1\rangle + (\partial_3 a_1 - \partial_1 a_3) |e_2\rangle + (\partial_1 a_2 - \partial_2 a_1) |e_3\rangle$$

$$\nabla \times \mathbf{a} = (\partial_y a_z - \partial_z a_y) \mathbf{i} + (\partial_z a_x - \partial_x a_z) \mathbf{j} + (\partial_x a_y - \partial_y a_x) \mathbf{k} \equiv \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}$$

El rotor de un campo vectorial genera otro campo (*pseudo*) vectorial llamado *campo rotor* del campo vectorial. Por razones que serán evidentes enseguida, las curvas integrales de este *campo rotor* se denominan *líneas de torbellino*.

Líneas de torbellino

Consideremos el siguiente campo vectorial en coordenadas cilíndricas para $z \geq 0$

$$\mathbf{a} = z \hat{\mathbf{u}}_\varphi = z [-\sin(\varphi) \mathbf{i} + \cos(\varphi) \mathbf{j}] = \frac{-z y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \mathbf{i} + \frac{z x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \mathbf{j}$$

con lo cual el campo rotor del campo vectorial \mathbf{a} será

$$\begin{aligned} \mathbf{b} = \nabla \times \mathbf{a}(x, y, z) &= \nabla \times \left(-\frac{z y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \mathbf{i} + \frac{z x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \mathbf{j} \right) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ -\frac{z y}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \frac{z x}{\sqrt{x^2 + y^2}} & 0 \end{vmatrix} \\ &= -\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \mathbf{i} - \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \mathbf{j} + \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} \mathbf{k} \end{aligned}$$

Es claro que el campo vectorial y su campo rotor son ortogonales

$$\left(-\frac{z y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \mathbf{i} + \frac{z x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \mathbf{j} \right) \cdot \left(-\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \mathbf{i} - \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \mathbf{j} + \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} \mathbf{k} \right) = 0$$

Tal y como se detalló en la Sección 5.8 de la página 234 las *líneas de flujo* se construyen a partir de un vector diferencial paralelo a campo vectorial en cada punto. Esto es, si

$$\mathbf{b} = \nabla \times \mathbf{a}(x, y, z) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = (\partial_y a_z - \partial_z a_y) \mathbf{i} + (\partial_z a_x - \partial_x a_z) \mathbf{j} + (\partial_x a_y - \partial_y a_x) \mathbf{k}$$

tendremos que

$$d\mathbf{r} \propto \mathbf{b} = \nabla \times \mathbf{a}(x, y, z) \Rightarrow \frac{dx}{b_x(x, y, z)} = \frac{dy}{b_y(x, y, z)} = \frac{dz}{b_z(x, y, z)} = d\lambda$$

o lo que es igual a

$$d\lambda = \frac{dx}{(\partial_y a_z - \partial_z a_y)} = \frac{dy}{(\partial_z a_x - \partial_x a_z)} = \frac{dz}{(\partial_x a_y - \partial_y a_x)}$$

donde hemos parametrizado la curva con λ .

Por lo tanto

$$d\lambda = \frac{\sqrt{x^2 + y^2} dx}{-x} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2} dy}{-y} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2} dz}{z}$$

Las dos primeras ecuaciones proveen

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \Rightarrow y(x) = x C_1 \Rightarrow \begin{cases} \frac{dx}{d\lambda} = \frac{-x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \tilde{C}_1 \Rightarrow x(\lambda) = \lambda \tilde{C}_1 \\ \frac{dy}{d\lambda} = \frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \tilde{C}_2 \Rightarrow y(\lambda) = \lambda \tilde{C}_2 \end{cases}$$

con

$$C_1 = \text{cte}; \quad \tilde{C}_1 = -\frac{1}{\sqrt{1 + (C_1)^2}} = \text{cte}; \quad \tilde{C}_2 = -\frac{C_1}{\sqrt{1 + (C_1)^2}} = C_1 \tilde{C}_1 = \text{cte}$$

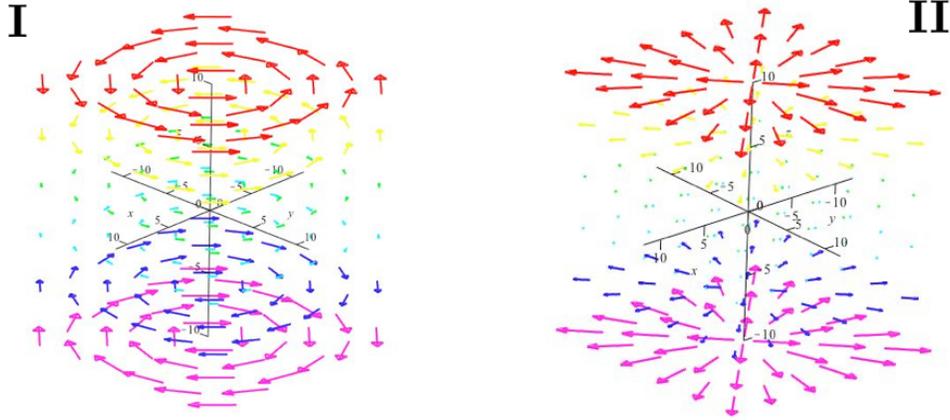


Figura 5.12: Rotores de un campo vectorial, líneas de torbellino

finalmente

$$\frac{\sqrt{x^2 + y^2} dz}{z} = d\lambda \Rightarrow \frac{dz}{d\lambda} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{z}{x\sqrt{1 + (C_1)^2}} = \frac{z}{\lambda \tilde{C}_1 \sqrt{1 + (C_1)^2}} = -\frac{z}{\lambda}$$

con lo cual

$$\frac{dz}{d\lambda} = -\frac{z}{\lambda} \Rightarrow z(\lambda) = \frac{1}{\lambda} \tilde{C}_3.$$

Líneas de campo ortogonales a superficies

Hemos visto como la condición $d\mathbf{r} \propto \mathbf{b} = \nabla \times \mathbf{a}(x, y, z)$ encuentra líneas (de *torbellino*) perpendiculares al campo $\mathbf{a}(x, y, z)$. Uno también puede plantearse encontrar el conjunto de superficies para las cuales las líneas de flujo del campo vectorial, $\mathbf{a}(x, y, z)$, sean perpendiculares. Para ello suponemos que existen estas superficies y que se representan, matemáticamente, como un función $\varphi = \varphi(x, y, z)$. Por lo tanto:

$$\nabla\varphi \propto \mathbf{a}(x, y, z) \Rightarrow \nabla \times [\gamma(x, y, z) \mathbf{a}(x, y, z)] = \nabla\gamma(x, y, z) \times \mathbf{a}(x, y, z) + \gamma(x, y, z) \nabla \times \mathbf{a}(x, y, z) = 0$$

es decir, $\nabla\varphi$ es proporcional al campo $\mathbf{a}(x, y, z)$ y al aplicar el rotor a ambos miembros se anula. Más aún, al proyectar sobre el mismo vector \mathbf{a} la ecuación de la derecha nos queda

$$\mathbf{a}(x, y, z) \cdot [\nabla\gamma(x, y, z) \times \mathbf{a}(x, y, z)] + \mathbf{a}(x, y, z) \cdot [\gamma(x, y, z) \nabla \times \mathbf{a}(x, y, z)] = 0$$

ambos sumandos se anula por definición de producto vectorial, pero el segundo sumando

$$\mathbf{a}(x, y, z) \cdot [\nabla \times \mathbf{a}(x, y, z)] = 0$$

impone una condición sobre el campo independiente de la función de proporcionalidad.

Por lo tanto, la condición necesaria y suficiente para que las líneas de flujo de un campo vectorial $\mathbf{a}(x, y, z)$ sean perpendiculares a un conjunto de superficies $\varphi = \varphi(x, y, z)$ es

$$\mathbf{a}(x, y, z) \cdot [\nabla \times \mathbf{a}(x, y, z)] = 0.$$

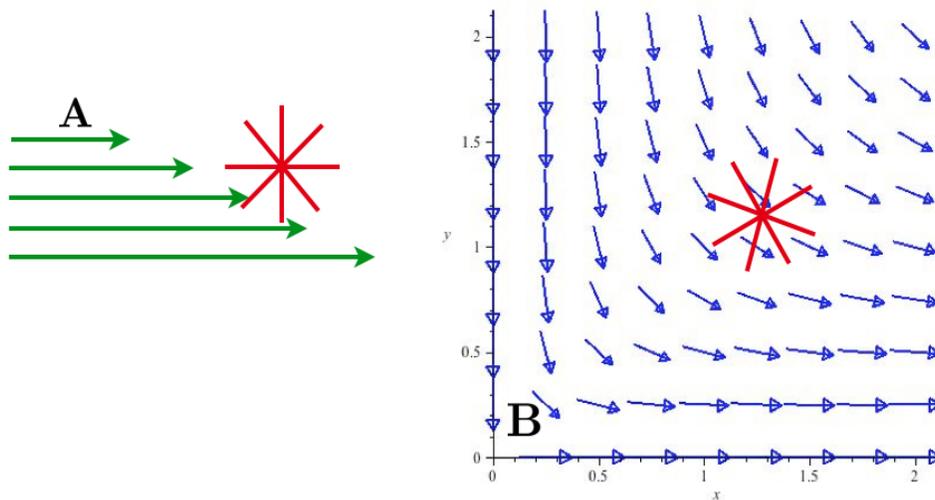


Figura 5.13: Idea sobre el significado físico del rotor

Circulación de un campo vectorial

La idea (y el nombre de *rotor*) surge de la idea de rotación (¿circulación?) que este operador descubre al ser “aplicado” a un campo vectorial. Como se muestra en la Figura 5.13, la idea intuitiva es colocar un “detector” de rotación inmerso en el campo. En este caso es un par de aspas e imaginamos que el campo vectorial representa un campo de velocidades de un fluido. Si el fluido hace girar las aspas en sentido horario (tirabuzón o sacacorchos derecho hacia arriba) diremos que el campo tiene una “circulación” positiva y el rotor del campo siempre será positivo en esa región. Si es a la inversa, diremos que el campo tiene una “circulación” negativa y el rotor también lo será en esa región. Finalmente, si el par de aspas no rota, el campo tendrá una circulación nula o no tendrá circulación y su rotor será también nulo en esa región.

Para concretar esta intuición de forma matemática, procedemos de la siguiente forma. Suponga una circunferencia con radio $r = 2$, la cual viene descrita paramétricamente por el radio vector

$$\mathbf{r}(\varphi) = 2 \cos(\varphi)\mathbf{i} + 2 \sin(\varphi)\mathbf{j} \Rightarrow d\mathbf{r} = 2 [-\sin(\varphi)\mathbf{i} + \cos(\varphi)\mathbf{j}] d\varphi$$

y nos planteamos “hacer circular el campo” a lo largo de la esa trayectoria. Esto es realizar la siguiente integral

$$\Gamma = \oint \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} z (-\sin(\varphi)\mathbf{i} + \cos(\varphi)\mathbf{j}) \cdot 2 (-\sin(\varphi)\mathbf{i} + \cos(\varphi)\mathbf{j}) d\varphi = 4\pi z$$

El campo vectorial $\mathbf{a} = z (-\sin(\varphi)\mathbf{i} + \cos(\varphi)\mathbf{j})$ está representado en la Figura 5.12. Hemos utilizado el símbolo \oint para denotar la integral de línea en un circuito cerrado. Es la primera idea de integrales de campos vectoriales que veremos con más detalles en las sección 5.11.1. Uno hace el producto escalar $\mathbf{a} \cdot d\mathbf{r}$ y luego integra.

Es interesante comparar este resultado con el flujo del campo de rotores a través de la superficie que

delimita la circunferencia de radio $r = 2$. Vale decir

$$\begin{aligned} \iint (\nabla \times \mathbf{a}) \cdot \hat{\mathbf{n}}_s dS &= \iint \left(\frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}} \mathbf{i} - \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \mathbf{j} + \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}} \mathbf{k} \right) \cdot \mathbf{k} dx dy \\ &= z \iint \frac{dx dy}{\sqrt{x^2+y^2}} = z \iint \frac{dr r d\theta}{r} = z \int_0^2 dr \int_0^{2\pi} d\theta = 4z\pi \end{aligned}$$

Esta "coincidencia" no es tal, corresponde a otro Teorema Integral para campos vectoriales, el *Teorema de Stokes* (ver sección 5.12.2 en la página 269) mediante el cual se convierte una integral cerrada de línea de un campo vectorial en el flujo del campo de rotores. Este teorema lo estudiaremos con detalle en la sección 5.12.2

La idea de circulación se puede generalizar a un campo vectorial genérico,

$$\mathbf{a} = a_x(x, y, z) \mathbf{i} + a_y(x, y, z) \mathbf{j} + a_z(x, y, z) \mathbf{k}$$

con lo cual, la integral de línea cerrada, a lo largo de una circunferencia de radio, r , en el plano xy será

$$\Gamma = \oint \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} \{a_x(x, y, z) \mathbf{i} + a_y(x, y, z) \mathbf{j} + a_z(x, y, z) \mathbf{k}\} \cdot (-r \sin(\varphi) \mathbf{i} + r \cos(\varphi) \mathbf{j}) d\varphi$$

y suponiendo $r \ll 1$ podemos desarrollar por Taylor las componentes del campo vectorial en el plano xy alrededor del origen de coordenadas $r_{x,y} \sim 0$. Esto es

$$a_x(x, y, 0) = a_x|_{r=0} + x \left. \frac{\partial a_x}{\partial x} \right|_{r=0} + y \left. \frac{\partial a_x}{\partial y} \right|_{r=0} + \dots = a_x|_{r=0} + r \cos(\varphi) \left. \frac{\partial a_x}{\partial x} \right|_{r=0} + r \sin(\varphi) \left. \frac{\partial a_x}{\partial y} \right|_{r=0} + \dots$$

$$a_y(x, y, 0) = a_y|_{r=0} + x \left. \frac{\partial a_y}{\partial x} \right|_{r=0} + y \left. \frac{\partial a_y}{\partial y} \right|_{r=0} + \dots = a_y|_{r=0} + r \cos(\varphi) \left. \frac{\partial a_y}{\partial x} \right|_{r=0} + r \sin(\varphi) \left. \frac{\partial a_y}{\partial y} \right|_{r=0} + \dots$$

Por lo tanto, la integral de línea nos queda como

$$\begin{aligned} \Gamma = \oint \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi} - \left[a_x|_{r=0} + r \cos(\varphi) \left. \frac{\partial a_x}{\partial x} \right|_{r=0} + r \sin(\varphi) \left. \frac{\partial a_x}{\partial y} \right|_{r=0} \right] r \sin(\varphi) d\varphi + \\ &\quad + \int_0^{2\pi} \left[a_y|_{r=0} + r \cos(\varphi) \left. \frac{\partial a_y}{\partial x} \right|_{r=0} + r \sin(\varphi) \left. \frac{\partial a_y}{\partial y} \right|_{r=0} \right] r \cos(\varphi) d\varphi \end{aligned}$$

con lo cual

$$\Gamma = \oint \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = \pi r^2 \left\{ \left. \frac{\partial a_y}{\partial x} \right|_{r=0} - \left. \frac{\partial a_x}{\partial y} \right|_{r=0} \right\} + O(r^3)$$

Finalmente vemos que la componente del rotor en el origen del plano x, y es igual al límite de la circulación a lo largo de una curva cerrada, dividida entre el área de la superficie que encierra la curva cerrada.

$$\left. \frac{\partial a_y}{\partial x} \right|_{r=0} - \left. \frac{\partial a_x}{\partial y} \right|_{r=0} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\Gamma}{\pi r^2}.$$

Rotores y velocidades angulares

Considere un cuerpo rígido que gira alrededor de un eje con velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$. Entonces la velocidad tangencial de un punto P , con una posición \mathbf{r} medida a un origen O situado en ese eje, siempre es

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = \mathbf{i}(\omega_y z - \omega_z y) + \mathbf{j}(\omega_z x - \omega_x z) + \mathbf{k}(\omega_x y - \omega_y x)$$

y su rotor será

$$\nabla \times \mathbf{v} = (\partial_y v_z - \partial_z v_y) \mathbf{i} + (\partial_z v_x - \partial_x v_z) \mathbf{j} + (\partial_x v_y - \partial_y v_x) \mathbf{k} \equiv \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$$

es decir, por ser un cuerpo rígido la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ es independiente de \mathbf{r} ; o lo que es lo mismo, todo el cuerpo rígido tiene la misma velocidad angular. Con ello tendremos que

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{v} &= \varepsilon^{ijk} \partial_j v_k \mathbf{e}_i = \varepsilon^{ijk} \partial_j \varepsilon_{klm} \omega^l r^m \mathbf{e}_i = \left(\delta_l^i \delta_m^j - \delta_m^i \delta_l^j \right) \partial_j (\omega^l r^m) \mathbf{e}_i \\ &= \left(\delta_l^i \delta_m^j - \delta_m^i \delta_l^j \right) \omega^l \delta_j^m \mathbf{e}_i = (3\omega^i - \omega^i) \mathbf{e}_i = 2\omega^i \mathbf{e}_i = 2\boldsymbol{\omega} \end{aligned}$$

sin índices hubiera sido

$$\begin{aligned} (\nabla \times \mathbf{v})_x &= (\partial_y v_z - \partial_z v_y) = \partial_y (\omega_x y - \omega_y x) - \partial_z (\omega_z x - \omega_x z) = 2\omega_x \\ (\nabla \times \mathbf{v})_y &= (\partial_z v_x - \partial_x v_z) = \partial_z (\omega_y z - \omega_z y) - \partial_x (\omega_x y - \omega_y x) = 2\omega_y \\ (\nabla \times \mathbf{v})_z &= (\partial_x v_y - \partial_y v_x) = \partial_x (\omega_z x - \omega_x z) - \partial_y (\omega_y z - \omega_z y) = 2\omega_z \end{aligned}$$

Otra vez, el rotor de un campo de velocidades de un cuerpo (que rota) “detecta” su velocidad angular.

Rotores y coordenadas curvilíneas

Una vez más recurrimos a una definición para el rotor independiente del sistemas de coordenada

$$\nabla \times \mathbf{a} = \text{rot } \mathbf{a} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \iiint d\mathbf{S} \times \mathbf{a} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \iiint \hat{\mathbf{n}}_s \times \mathbf{a} dS$$

y del mismo modo que calculamos el flujo a través de las distintas capas de un volumen podremos (no lo haremos y se lo dejaremos al lector) demostrar que

$$\nabla \times \mathbf{a} = \text{rot } \mathbf{a} = \frac{1}{h_{\tilde{j}} h_{\tilde{k}}} \left[\varepsilon^{ijk} \frac{\partial (h_{\tilde{k}} a_k)}{\partial q^j} \mathbf{e}_i \right] = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \mathbf{e}_1 & h_2 \mathbf{e}_2 & h_3 \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial q^1} & \frac{\partial}{\partial q^2} & \frac{\partial}{\partial q^3} \\ h_1 a_1 & h_2 a_2 & h_3 a_3 \end{vmatrix}$$

donde los índices repetidos i, j, k indican suma; \tilde{j} y \tilde{k} no indican suma sino que replican los valores de los índices j, k .

Explícitamente

$$\text{rot } \mathbf{a} = \frac{\mathbf{e}_1}{h_2 h_3} \left[\frac{\partial (h_3 a_3)}{\partial q^2} - \frac{\partial (h_2 a_2)}{\partial q^3} \right] + \frac{\mathbf{e}_2}{h_1 h_3} \left[\frac{\partial (h_1 a_1)}{\partial q^3} - \frac{\partial (h_3 a_3)}{\partial q^1} \right] + \frac{\mathbf{e}_3}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial (h_2 a_2)}{\partial q^1} - \frac{\partial (h_1 a_1)}{\partial q^2} \right]$$

5.10.4. Formulario del Operador *nabla*, ∇

El operador *nabla*, ∇ , en las fórmulas anteriores actúa como un operador lineal. Esto es, dadas $\varphi(\mathbf{r})$, $\chi(\mathbf{r})$, $\psi(\mathbf{r})$ funciones escalares de variable vectorial y \mathbf{a} y \mathbf{b} dos campos vectoriales cuales quiera, se puede generar el siguiente formulario, el cual deberá ser demostrado por el lector

$$\begin{aligned}\nabla(\varphi + \chi\psi) &= \nabla\varphi + \nabla(\chi\psi) = \nabla\varphi + \psi\nabla\chi + \chi\nabla\psi \\ \nabla \cdot (\mathbf{a} + \varphi\mathbf{b}) &= \nabla \cdot \mathbf{a} + \varphi\nabla \cdot \mathbf{b} + \nabla\varphi \cdot \mathbf{b} \\ \nabla \times (\mathbf{a} + \varphi\mathbf{b}) &= \nabla \times \mathbf{a} + \vec{\nabla} \times (\varphi\mathbf{b}) = \nabla \times \mathbf{a} + \vec{\nabla}\varphi \times \mathbf{b} + \varphi\nabla \times \mathbf{b}\end{aligned}$$

y también, si consideramos las cantidades $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ y $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ tendremos

$$\nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = [\partial^i (a^j b_j)] \mathbf{e}_i = (\nabla \cdot \mathbf{a}) \mathbf{b} + (\nabla \cdot \mathbf{b}) \mathbf{a}$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \partial^i (\varepsilon_{ijk} a^j b^k) = (\varepsilon_{ijk} \partial^i a^j) b^k + (\varepsilon_{ijk} \partial^i b^k) a^j = (\nabla \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} - \mathbf{a} \cdot (\nabla \times \mathbf{b})$$

$$\nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{a} - \mathbf{b}(\nabla \cdot \mathbf{a}) + \mathbf{a}(\nabla \cdot \mathbf{b}) - (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{b}$$

es claro que

$$\mathbf{a}(\nabla \cdot \mathbf{b}) \neq (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{a} \iff a^j (\partial^i b_i) \neq b_i \partial^i a^j$$

por cuanto en las partes izquierdas las derivadas actúan sobre las componentes de \mathbf{b} , mientras que en las partes derechas es sobre las componentes de \mathbf{a} .

Otros casos importantes se presentan cuando los campos escalares y/o vectoriales son a su vez funciones de un campo escalar. Es decir, funciones compuestas. Esto es

$$\psi = \psi(\chi(\mathbf{r})) \quad \text{y} \quad \mathbf{a} = \mathbf{a}(\chi(\mathbf{r})).$$

En este caso, tendremos

$$\nabla\psi(\chi(\mathbf{r})) = \frac{d\psi}{d\chi} \nabla\chi; \quad \nabla \cdot \mathbf{a}(\chi(\mathbf{r})) = \nabla\chi \cdot \frac{d\mathbf{a}}{d\chi}; \quad \nabla \times \mathbf{a}(\chi(\mathbf{r})) = (\nabla\chi) \times \frac{d\mathbf{a}}{d\chi}$$

Para demostrar, por ejemplo, $\nabla \cdot \mathbf{a}(\chi(\mathbf{r})) = \nabla\chi \cdot \frac{d\mathbf{a}}{d\chi}$, utilizamos la estrategia de Taylor y expandimos el campo vectorial alrededor de un determinado punto, digamos $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$ arbitrario. Esto es

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{r}_0) + \left. \frac{d\mathbf{a}}{d\chi} \right|_{\mathbf{r}_0} (\chi(\mathbf{r}) - \chi(\mathbf{r}_0)) + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2\mathbf{a}}{d\chi^2} \right|_M (\chi(\mathbf{r}) - \chi(\mathbf{r}_0))^2 + \dots$$

aplicando la divergencia a ambos miembros queda como

$$\nabla \cdot \mathbf{a} = \nabla \cdot [\mathbf{a}(\mathbf{r}_0)] + \nabla \cdot \left[\left. \frac{d\mathbf{a}}{d\chi} \right|_{\mathbf{r}_0} (\chi(\mathbf{r}) - \chi(\mathbf{r}_0)) \right] + \frac{1}{2} \nabla \cdot \left[\left. \frac{d^2\mathbf{a}}{d\chi^2} \right|_M (\chi(\mathbf{r}) - \chi(\mathbf{r}_0))^2 \right] + \dots$$

con lo cual

$$\nabla \cdot \mathbf{a} = \left. \frac{d\mathbf{a}}{d\chi} \right|_{\mathbf{r}_0} \cdot \nabla\chi(\mathbf{r}) + (\chi(\mathbf{r}) - \chi(\mathbf{r}_0)) \left. \frac{d^2\mathbf{a}}{d\chi^2} \right|_{\mathbf{r}_0} \cdot \nabla\chi(\mathbf{r}) + \frac{1}{2} (\chi(\mathbf{r}) - \chi(\mathbf{r}_0))^2 \left. \frac{d^3\mathbf{a}}{d\chi^3} \right|_{\mathbf{r}_0} \cdot \nabla\chi(\mathbf{r}) + \dots$$

esta relación vale para todo \mathbf{r} , en particular para $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$. Con lo cual

$$\nabla \cdot \mathbf{a}|_{\mathbf{r}_0} = \left. \frac{d\mathbf{a}}{d\chi} \right|_{\mathbf{r}_0} \cdot \nabla\chi(\mathbf{r}_0) \implies \nabla \cdot \mathbf{a} = \frac{d\mathbf{a}}{d\chi} \cdot \nabla\chi(\mathbf{r})$$

ya que \mathbf{r}_0 es arbitrario, con lo cual queda demostrado.

5.10.5. *Nabla* dos veces y el Laplaciano

Formulario de *Nabla* dos veces

Considerando a *Nabla*, ∇ , como un operador surge la pregunta de su aplicación repetida sobre distintos objetos. Consideremos primero las siguientes expresiones en coordenadas cartesianas. Esto es

$$\nabla \cdot \nabla \phi = \nabla^2 \phi = \Delta \phi = \partial^i \partial_i \phi$$

$$\nabla \times \nabla \phi = \varepsilon^{ijk} \partial_j \partial_k \phi \mathbf{e}_i = 0$$

$$\nabla (\nabla \cdot \mathbf{a}) = \partial^i (\partial^j a_j) \mathbf{e}_i = \partial^j \partial^i a_j \mathbf{e}_i$$

$$\nabla \times (\nabla \cdot \mathbf{a}) = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{a}) = 0$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{a}) = \varepsilon^{ijk} \partial_j \varepsilon_{klm} \partial^l a^m \mathbf{e}_i = \left(\delta_l^i \delta_m^j - \delta_m^i \delta_l^j \right) \partial_j \partial^l a^m \mathbf{e}_i = \partial^i \partial_j a^j \mathbf{e}_i - \partial_j \partial^j a^i \mathbf{e}_i$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{a}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{a}) - \Delta \mathbf{a}$$

Laplaciano y campos escalares

Más allá de la gimnasia de índices para determinar la expresión de la relación vectorial, quizá la más importante de las aplicaciones es el Laplaciano, $\nabla^2 = \Delta$, el cual en \mathfrak{R}^3 y en coordenadas cartesianas puede expresarse como:

$$\nabla \cdot \nabla \phi = \nabla^2 \phi = \Delta \phi = \partial^i \partial_i \phi = \partial_{xx} \phi + \partial_{yy} \phi + \partial_{zz} \phi$$

La importancia el Laplaciano reside en que la mayor parte (casi todas) las ecuaciones de la física matemática son ecuaciones diferenciales (ordinarias y parciales) de segundo orden y el Laplaciano las genera en el espacio. Adicionalmente la solución a la ecuación armónica

$$\Delta \phi = \partial^i \partial_i \phi = \partial_{xx} \phi + \partial_{yy} \phi + \partial_{zz} \phi = 0$$

es de importancias en varias áreas de la física.

Se puede demostrar fácilmente que el Laplaciano cumple con

$$\Delta (\phi + C\psi) = \Delta \phi + C\Delta \psi; \quad \Delta (\phi\psi) = \phi\Delta\psi + \psi\Delta\phi + 2\nabla\psi \cdot \nabla\phi$$

considerando las expresiones para el gradiente y la divergencia en coordenadas curvilíneas

$$\nabla \phi = \frac{1}{h_1} \frac{\partial \phi}{\partial q^1} \tilde{\mathbf{e}}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial \phi}{\partial q^2} \tilde{\mathbf{e}}_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial \phi}{\partial q^3} \tilde{\mathbf{e}}_3$$

y

$$\nabla \cdot \mathbf{a} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left(\frac{\partial (a^1 (q^1, q^2, q^3) h_2 h_3)}{\partial q^1} + \frac{\partial (a^2 (q^1, q^2, q^3) h_3 h_1)}{\partial q^2} + \frac{\partial (a^3 (q^1, q^2, q^3) h_1 h_2)}{\partial q^3} \right)$$

respectivamente, es fácil llegar a la expresión para el Laplaciano en coordenadas curvilíneas

$$\nabla^2 \phi \equiv \Delta \phi = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial q^1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial \phi}{\partial q^1} \right) + \frac{\partial}{\partial q^2} \left(\frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial \phi}{\partial q^2} \right) + \frac{\partial}{\partial q^3} \left(\frac{h_2 h_1}{h_3} \frac{\partial \phi}{\partial q^3} \right) \right\}.$$

Laplaciano y campos vectoriales

Inspirado en la forma que toma un campo vectorial en coordenadas cartesianas, definiremos el Laplaciano de un campo vectorial como la relación

$$\Delta \mathbf{a} = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{a}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{a})$$

Desarrollando esta expresión en coordenadas cartesianas tendremos que

$$\Delta \mathbf{a} = [\partial^i (\partial^j a_j) - (\partial^i \partial_j a^j - \partial_j \partial^j a^i)] \mathbf{e}_i \implies \Delta \mathbf{a} = (\partial_j \partial^j a^i) \mathbf{e}_i \equiv (\Delta a^i) \mathbf{e}_i$$

Es decir, que el Laplaciano de un campo vectorial, **expresado en coordenadas cartesianas**, es igual al vector cuyas componentes son los Laplacianos de las componentes del campo original. Es importante resaltar que la expresión $\Delta \mathbf{a} = (\Delta a^i) \mathbf{e}_i$ se cumple únicamente en coordenadas cartesianas pero la definición que hemos propuesto, $\Delta \mathbf{a} = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{a}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{a})$, es una ecuación vectorial y es, por lo tanto, válida en cualquier sistema de coordenadas.

El Laplaciano de campos vectoriales no lleva construir un formulario de relaciones fácilmente demostrables

$$\Delta (\nabla \phi) = \nabla (\Delta \phi); \quad \nabla \cdot (\Delta \mathbf{a}) = \Delta (\nabla \cdot \mathbf{a}); \quad \nabla \times (\Delta \mathbf{a}) = \Delta (\nabla \times \mathbf{a}).$$

5.10.6. Derivadas Direccionales de Campos Vectoriales

El concepto

Formalmente y como siempre la misma idea de derivada como cociente incremental. Dados dos puntos P_1 y P_2 y un vector \mathbf{u} que los une (va de $P_1 \rightarrow P_2$), entonces por definición

$$\mathbf{D}_{|\mathbf{u}} |a\rangle \equiv \frac{d\mathbf{a}}{du} = \lim_{P_2 \rightarrow P_1} \frac{\mathbf{a}(P_2) - \mathbf{a}(P_1)}{P_2 - P_1} \Rightarrow \left(\frac{d\mathbf{a}}{du} \right)^i = \left(\frac{da^i}{du} \right) = \lim_{P_2 \rightarrow P_1} \frac{a^i(P_2) - a^i(P_1)}{P_2 - P_1}$$

por consiguiente, si \mathbf{a} , tiene por componentes cartesianas (en general cualquier sistema de coordenadas ortogonales) (a_x, a_y, a_z) las componentes del vector derivado serán $\left(\frac{da_x}{du}, \frac{da_y}{du}, \frac{da_z}{du} \right)$. De modo que inspirados en la derivada direccional de un campo escalar que presentamos en la sección 5.10.1, podemos construir la expresión para la derivada direccional de cada una de las componentes del vector $\frac{d\mathbf{a}}{du}$. Esto es

$$\frac{d\phi}{du} = \mathbf{D}_{|\mathbf{u}} \phi = \nabla \phi \cdot \mathbf{u} = u^i \partial_i \phi \Rightarrow \frac{da^i}{du} = \mathbf{u} \cdot \nabla a^i = u^j \partial_j a^i \Rightarrow \mathbf{D}_{|\mathbf{u}} |a\rangle \equiv \frac{d\mathbf{a}}{du} = (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{a}$$

Otra vez, en coordenadas cartesianas se tiene que

$$\mathbf{D}_{|\mathbf{u}} \mathbf{a} = (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{a} = (u^i \partial_i a^j) \mathbf{e}_j \Rightarrow \mathbf{D}_{|\mathbf{u}} (\circ) \equiv \frac{d(\circ)}{du} = (\mathbf{u} \cdot \nabla) (\circ) \equiv u^i \partial_i (\circ).$$

Un ejemplo: el campo de aceleraciones de un fluido

El ejemplo más estándar es la descripción del campo de aceleraciones de un fluido en movimiento. El campo de aceleraciones de un fluido, como de costumbre, es la variación del campo de velocidades respecto al tiempo. Esto es, $\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}$. Para escribir la expresión de este campo de aceleraciones, supongamos que un fluido se mueve y registra un campo de velocidades $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ el cual, en general, será inhomogéneo y no estacionario. Identificamos una porción del fluido (partícula) cualquiera y observamos que en un intervalo

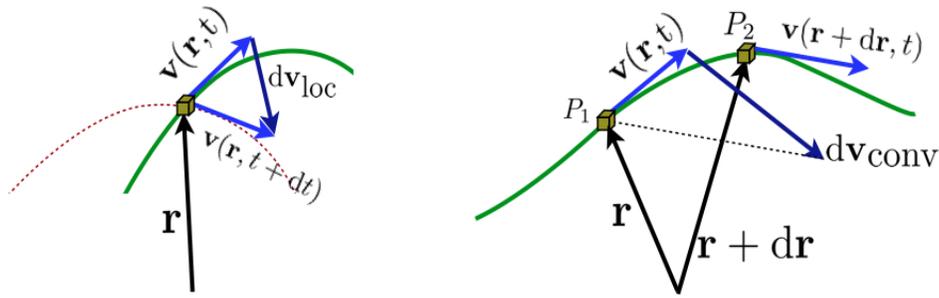


Figura 5.14: Contribuciones a la variación de la velocidad en un fluido

de tiempo dt esa porción identificada se mueve de $P_1 \rightarrow P_2$ y registra un incremento en su velocidad de \mathbf{v} en P_1 a $\mathbf{v} + d\mathbf{v}$ en P_2 :

$$\mathbf{v}(P_1) \equiv \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \quad \text{y} \quad \mathbf{v}(P_2) \equiv \mathbf{v}(\mathbf{r} + d\mathbf{r}, t + dt) .$$

Tal y como ejemplificamos en la Figura 5.14, este incremento proviene de dos contribuciones. Una, llamada local, debido a el cambio en la variable temporal y otra, por la comparación del vector velocidad, \mathbf{v} , en dos posiciones (traslación espacial o contribución convectiva).

$$d\mathbf{v}_t = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} dt \quad \text{y} \quad d\mathbf{v}_u = \frac{d\mathbf{v}}{du} du$$

Visto de otro modo un poco más informal, dado que el campo es función de dos variables y una de ellas vectorial

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \Rightarrow \mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial r} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$$

De la discusión anterior es claro que $\frac{d\mathbf{v}}{du}$ es la derivada direccional del campo de velocidades a lo largo del vector unitario \mathbf{u} que apunta de $P_1 \rightarrow P_2$. Ahora bien, para este caso tenemos que:

$$du = \|d\mathbf{r}\|, \quad du = \|\mathbf{v}\| dt \quad \text{y} \quad \mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}$$

con lo cual la derivada direccional queda como

$$\frac{d\mathbf{v}}{du} = \frac{1}{\|\mathbf{v}\|} (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$$

y finalmente la aceleración como

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{1}{\|\mathbf{v}\|} (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \Rightarrow a^i = \frac{1}{\|\mathbf{v}\|} (\mathbf{v} \cdot \nabla) v^i + \frac{\partial v^i}{\partial t}$$

donde hemos representado las componentes cartesianas de los vectores velocidad y aceleración como v^i y a^i , respectivamente.

Es importante hacer una reflexión un poco más física de las contribuciones. La contribución local proviene de la variación del vector (por la dependencia temporal) alrededor del punto, sin importar la dirección que sigue al partícula y la contribución convectiva proviene de la inhomogeneidad del campo de velocidades. Esto es de la variación del campo de velocidades según la dirección que siga la partícula.

5.10.7. La Derivada Covariante

En un sistema de coordenadas generalizadas $\{q^i\}$, las bases locales $\{\mathbf{e}_i\}$ son funciones de las coordenadas, de decir

$$\mathbf{e}_i = \mathbf{e}_i(q^1, q^2, q^3), \quad \mathbf{e}^i = \mathbf{e}^i(q^1, q^2, q^3)$$

por lo que el diferencial de cualquier campo vectorial $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{r})$ viene a ser:

$$d\mathbf{A} = d(A_i \mathbf{e}^i) = \mathbf{e}^i dA_i + A_i d\mathbf{e}^i, \quad d\mathbf{A} = d(A^i \mathbf{e}_i) = \mathbf{e}_i dA^i + A^i d\mathbf{e}_i$$

por lo tanto, las bases de las coordenadas generalizadas también cambian punto a punto. Entonces resulta que

$$d\mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial q^j} dq^j \Rightarrow \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial q^j} = \frac{\partial A_i}{\partial q^j} \mathbf{e}^i + A_i \frac{\partial \mathbf{e}^i}{\partial q^j} = \frac{\partial A^i}{\partial q^j} \mathbf{e}_i + A^i \frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial q^j}$$

Las componentes covariantes o contravariantes del vector $\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial q^j}$ vienen a ser las componentes de un tensor de segundo orden llamado la *derivada covariante* del vector dado. De esta manera, la derivada covariante de un vector covariante tiene como componentes:

$$A_{i;j} \equiv \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial q^j} \cdot \mathbf{e}_i$$

mientras que la derivada covariante de un vector contravariante tiene componentes

$$A^i_{;j} \equiv \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial q^j} \cdot \mathbf{e}^i$$

Notemos que si el campo vectorial es homogéneo, es decir, tiene magnitud y dirección constante, entonces podemos ver lo siguiente:

$$\mathbf{A} = A^i \mathbf{e}_i = (A^i + dA^i)(\mathbf{e}_i + d\mathbf{e}_i) \Rightarrow \mathbf{e}_i dA^i + A^i d\mathbf{e}_i + dA^i d\mathbf{e}_i = 0$$

si nos quedamos sólo con los términos a primer orden:

$$d\mathbf{A} = \mathbf{e}_i dA^i + A^i d\mathbf{e}_i = 0$$

esto significa que:

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial q^j} dq^j = A^i_{;j} dq^j = 0 \Rightarrow A^i_{;j} = 0$$

La derivada covariante de un campo vectorial homogéneo es cero.

Desde un punto de vista geométrico, un campo vectorial homogéneo se puede interpretar como el resultado de desplazar al vector \mathbf{A} paralelo a sí mismo por todos los puntos del espacio, esto significa que la condición $A^i_{;j} = 0$ podría ser considerada como la condición del desplazamiento paralelo.

Por otra parte, notemos que según lo visto anteriormente

$$A^i_{;j} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial q^j} \cdot \mathbf{e}^i = \frac{\partial A^i}{\partial q^j} + A^l \frac{\partial \mathbf{e}_l}{\partial q^j} \cdot \mathbf{e}^i \quad \text{y} \quad A_{i;j} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial q^j} \cdot \mathbf{e}_i = \frac{\partial A_i}{\partial q^j} + A_l \frac{\partial \mathbf{e}^l}{\partial q^j} \cdot \mathbf{e}_i$$

donde hemos usado el hecho de que $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}^j = \delta_i^j$.

Se puede apreciar que $\frac{\partial \mathbf{e}_j}{\partial q^k}$ se puede escribir como una combinación lineal de los vectores base

$$\frac{\partial \mathbf{e}_j}{\partial q^k} = \left(\frac{\partial \mathbf{e}_j}{\partial q^k} \right)^i \mathbf{e}_i = \left(\mathbf{e}^i \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_j}{\partial q^k} \right) \mathbf{e}_i \equiv \Gamma_{jk}^i \mathbf{e}_i$$

donde hemos introducido la siguiente notación:

$$\Gamma_{jk}^i = \mathbf{e}^i \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_j}{\partial q^k} \quad \text{y de manera equivalente:} \quad \Gamma_{ik}^j = \mathbf{e}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{e}^j}{\partial q^k}$$

Estas cantidades se denominan *Símbolos de Christoffel del segundo tipo* y en realidad viene representado por 27 componentes.

Por lo tanto, podemos escribir ahora

$$A_{;j}^i = \frac{\partial A^i}{\partial q^j} + \Gamma_{jk}^i A^k = \partial_j A^i + \Gamma_{jk}^i A^k \quad \text{y} \quad A_{i;j} = \frac{\partial A_i}{\partial q^j} - \Gamma_{ji}^k A_k = \partial_j A_i - \Gamma_{ji}^k A_k$$

el signo menos en la segunda ecuación es debido a que

$$\frac{\partial(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}^j)}{\partial q^k} = 0 \Rightarrow \mathbf{e}^j \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial q^k} = -\mathbf{e}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{e}^j}{\partial q^k}$$

Además, se tiene el hecho de que los Símbolos de Christoffel son simétricos bajo el cambio de los dos índices inferiores

$$\Gamma_{jk}^i = \Gamma_{kj}^i.$$

En conclusión:

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial q^j} \equiv A_{;j}^i \mathbf{e}_i \quad \text{o} \quad \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial q^j} \equiv A_{i;j} \mathbf{e}^i$$

Tenemos entonces que la derivada covariante de un campo vectorial toma en cuenta no sólo el cambio en el campo mismo, a medida que nos movemos a lo largo de las curvas coordenadas, sino que también da cuenta de como cambian las bases. Por lo tanto, si las bases no varían al pasar de un punto a otro (bases rectangulares cartesianas) los Símbolos de Christoffel se anulan y la derivada covariante no es más que la derivada normal.

Los Símbolos de Christoffel pueden calcularse a partir del tensor métrico y de su propiedad de simetría.

$$\begin{aligned} \Gamma_{jk}^i &= \frac{1}{2} (\Gamma_{jk}^i + \Gamma_{kj}^i) = \frac{1}{2} \left(\mathbf{e}^i \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_k}{\partial q^j} + \mathbf{e}^i \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_j}{\partial q^k} \right) = \frac{1}{2} \left((g^{il} \mathbf{e}_l) \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_k}{\partial q^j} + (g^{il} \mathbf{e}_l) \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_j}{\partial q^k} \right) \\ &= \frac{1}{2} g^{il} \left[\frac{\partial}{\partial q^j} (\mathbf{e}_l \cdot \mathbf{e}_k) + \frac{\partial}{\partial q^k} (\mathbf{e}_l \cdot \mathbf{e}_j) - \mathbf{e}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_l}{\partial q^j} - \mathbf{e}_j \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_l}{\partial q^k} \right] = \frac{1}{2} g^{il} \left[\frac{\partial g_{lk}}{\partial q^j} + \frac{\partial g_{lj}}{\partial q^k} - \mathbf{e}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_j}{\partial q^l} - \mathbf{e}_j \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_k}{\partial q^l} \right] \\ &= \frac{1}{2} g^{il} \left[\frac{\partial g_{lk}}{\partial q^j} + \frac{\partial g_{lj}}{\partial q^k} - \frac{\partial (\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_k)}{\partial q^l} \right] = \frac{1}{2} g^{il} \left[\frac{\partial g_{lk}}{\partial q^j} + \frac{\partial g_{lj}}{\partial q^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial q^l} \right] \end{aligned}$$

Hemos llegado entonces a la siguiente e importante relación:

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} g^{il} \left[\frac{\partial g_{lk}}{\partial q^j} + \frac{\partial g_{lj}}{\partial q^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial q^l} \right]$$

Es importante tener en cuenta que la derivada covariante es un tensor, a pesar de que la derivada parcial y los Símbolos de Christoffel que conforman la suma no lo son, es decir, la combinación de estos dos objetos que no son tensores forman un tensor. Es también importante definir los *Símbolos de Christoffel de primer tipo*

$$\Gamma_{ijk} \equiv g_{il} \Gamma_{jk}^l = \frac{1}{2} g_{il} g^{lm} \left[\frac{\partial g_{mk}}{\partial q^j} + \frac{\partial g_{mj}}{\partial q^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial q^m} \right] = \frac{1}{2} \delta_i^m \left[\frac{\partial g_{mk}}{\partial q^j} + \frac{\partial g_{mj}}{\partial q^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial q^m} \right]$$

esto es

$$\Gamma_{ijk} \equiv g_{il} \Gamma_{jk}^l = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial g_{ik}}{\partial q^j} + \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial q^i} \right] = \mathbf{e}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_j}{\partial q^k}$$

A estas alturas, debe quedar claro que en el caso de utilizar coordenadas cartesianas todos los Símbolos de Christoffel son iguales a cero ya que todas las componentes del tensor métrico son constantes, además se puede apreciar que en estas coordenadas las componentes covariantes y contravariantes de un vector son iguales. Y al hacer la siguiente contracción

$$A^i_{;i} = \partial_i A^i + \Gamma^i_{ik} A^k \Rightarrow A^i_{;i} = \partial_i A^i = \sum_i \partial_i A_i \Rightarrow \text{un escalar}$$

Revisemos ahora como transforman los Símbolos de Christoffel del primer tipo bajo un cambio de coordenadas. Recordemos que un tensor debe trasformar de la siguiente manera (usaremos una notación ligeramente diferente a la usada anteriormente)

$$T_{i'j'k'} = \alpha^l_{i'} \alpha^m_{j'} \alpha^n_{k'} T_{lmn}, \quad \text{con} \quad \alpha^l_{i'} = \frac{\partial q^l}{\partial q^{i'}}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \Gamma_{i'j'k'} &= \mathbf{e}_{i'} \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_{j'}}{\partial q^{k'}} = \alpha^l_{i'} \mathbf{e}_l \cdot \frac{\partial}{\partial q^m} (\alpha^n_{j'} \mathbf{e}_n) \frac{\partial q^m}{\partial q^{k'}} \\ &= \alpha^l_{i'} \alpha^m_{k'} \alpha^n_{j'} \mathbf{e}_l \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_n}{\partial q^m} + \alpha^l_{i'} \alpha^m_{k'} (\mathbf{e}_l \cdot \mathbf{e}_n) \frac{\partial \alpha^n_{j'}}{\partial q^m} \\ &= \alpha^l_{i'} \alpha^m_{k'} \alpha^n_{j'} \Gamma_{lnm} + \alpha^l_{i'} \alpha^m_{k'} g_{ln} \frac{\partial \alpha^n_{j'}}{\partial q^m} \end{aligned}$$

es decir, no transforma como un tensor.

Ejercicios

1. Demuestre que

$$\Gamma^{i'}_{j'k'} = \alpha^{i'}_l \alpha^m_{j'} \alpha^n_{k'} \Gamma^l_{mn} + \alpha^{i'}_n \alpha^m_{k'} \frac{\partial \alpha^n_{j'}}{\partial q^m}$$

2. Demuestre que

$$A^{i'}_{;j'} = \alpha^{i'}_l \alpha^m_{j'} A^l_{;m}$$

3. Demuestre que

$$A_{i';j'} = \alpha^l_{i'} \alpha^m_{j'} A_{l;m}$$

Como una extensión de todo lo anterior, podemos escribir las derivadas covariantes de tensores de rango mayor, por ejemplo: ⁵

$$\begin{aligned} T^{ij}_{;k} &\equiv \frac{\partial T^{ij}}{\partial q^k} + \Gamma^i_{kl} T^{lj} + \Gamma^j_{kl} T^{il} = T^{ij}_{;k} + \Gamma^i_{kl} T^{lj} + \Gamma^j_{kl} T^{il} \\ T_{ij;k} &\equiv \frac{\partial T_{ij}}{\partial q^k} - \Gamma^l_{ik} T_{lj} - \Gamma^l_{jk} T_{il} = T_{ij;k} - \Gamma^l_{ik} T_{lj} - \Gamma^l_{jk} T_{il} \\ T^i_{j;k} &\equiv \frac{\partial T^i_j}{\partial q^k} + \Gamma^i_{kl} T^l_j - \Gamma^l_{jk} T^i_l = T^i_{j;k} + \Gamma^i_{kl} T^l_j - \Gamma^l_{jk} T^i_l \end{aligned}$$

⁵Las derivadas parciales las indicaremos con una coma: $\frac{\partial T^{ij}}{\partial q^k} = \partial_k T^{ij} \equiv T^{ij}_{;k}$

Es claro que si calculamos la derivada covariante de “una componente contravariante” ponemos un signo mas y si lo que estamos es calculando la derivada covariante de una “componente covariante” podemos poner un signo menos.

Para el caso de un tensor de orden cero, es decir, un escalar, la derivada covariante se reduce a la derivada parcial con respecto a las coordenadas

$$\phi_{;i} = \frac{\partial \phi}{\partial q^i}$$

esto significa que la derivada covariante de un escalar es un vector covariante que tiene como componentes las componentes covariantes del gradiente de ϕ .

Podemos averiguar ahora sobre la acción de la derivada covariante sobre el tensor métrico:

$$\begin{aligned} g_{ij;k} &= g_{ij,k} - \Gamma_{ik}^l g_{lj} - \Gamma_{jk}^l g_{il} = g_{ij,k} - \Gamma_{jik} - \Gamma_{ijl} \\ &= g_{ij,k} - \frac{1}{2} \left[\frac{\partial g_{jk}}{\partial q^i} + \frac{\partial g_{ji}}{\partial q^k} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial q^j} \right] - \frac{1}{2} \left[\frac{\partial g_{ik}}{\partial q^j} + \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial q^i} \right] \\ &= g_{ij,k} - \frac{1}{2} [g_{jk,i} + g_{ji,k} - g_{ik,j} + g_{ik,j} + g_{ij,k} - g_{jk,i}] = 0 \end{aligned}$$

De este último resultado se obtiene la siguiente igualdad

$$g_{ij,k} = \Gamma_{jik} + \Gamma_{ijl}$$

Se dice que el tensor métrico es transparente a la derivada covariante, lo que se conoce como el Teorema de Ricci. Esto significa que el tensor métrico es constante para la derivada covariante, por ejemplo:

$$\begin{aligned} g_{il} A^l_{;j} &= (g_{il} A^l)_{;j} = A_{i;j} \\ g_{il} T^{lj}_{;k} &= (g_{il} T^{lj})_{;k} = T^j_{i;k} \end{aligned}$$

Volviendo a tema del operador diferencial en coordenadas generalizadas tenemos entonces, y a modo de repaso lo siguiente:

- Si tenemos un campo escalar $\phi = \phi(q^1, q^2, q^3)$, por gradiente entendemos a un vector cuyas componentes covariantes son

$$\frac{\partial \phi}{\partial q^i} \Rightarrow \text{grad } \phi = \frac{\partial \phi}{\partial q^i} \mathbf{e}_i$$

En el caso particular de la derivada direccional de ϕ en la dirección del vector \mathbf{s} se tiene

$$\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{s}} = \mathbf{s} \cdot \text{grad } \phi, \quad \text{con } \mathbf{s} = s^i \mathbf{e}_i$$

- Si tenemos un campo vectorial $\mathbf{A} = \mathbf{A}(q^1, q^2, q^3)$, para la divergencia de \mathbf{A} tendremos que es la contracción de la derivada covariante de \mathbf{A} , esto es:

$$\text{div } \mathbf{A} \equiv A^i_{;i} = \partial_i A^i + \Gamma_{ij}^i A^j$$

Para el caso de las componentes covariantes de \mathbf{A} , tenemos

$$\text{div } \mathbf{A} \equiv A^i_{;i} = (g^{ij} A_j)_{;i} = g^{ij} A_{j;i}$$

El cálculo de los diferentes Símbolos de Christoffel suele ser un trabajo laborioso, pero se pueden buscar otros caminos como veremos a continuación. Podemos ver que:

$$\Gamma_{ik}^i = \frac{1}{2} g^{il} [\partial_i g_{lk} + \partial_k g_{li} - \partial_l g_{ik}] = \frac{1}{2} g^{il} \partial_k g_{il}$$

donde hemos intercambiado los índices mudos i y l para que se cancelen el primer y el tercer término entre los corchetes.

Recurriendo a la representación matricial del tensor métrico, podemos ver que:

$$\left[\frac{G_{ij}}{G} \right] \equiv [g^{ij}] = [g^{ji}] = [g_{ji}]^{-1},$$

donde $G \equiv \det[g^{ij}]$ y G_{ij} la matriz cofactor de los elementos de $[g^{ij}]$.

De la definición del determinante se tiene

$$G = g_{ij} G_{ij}, \quad (\text{no hay suma sobre } i)$$

Como G_{ij} es independiente de g_{ij} se tiene que

$$\frac{\partial G}{\partial g_{ij}} = G_{ij}$$

y

$$g^{ij} = \frac{G_{ij}}{G} = \frac{1}{G} \frac{\partial G}{\partial g_{ij}}$$

por lo tanto:

$$\Gamma_{ik}^i = \frac{1}{2} g^{il} \partial_k g_{il} = \frac{1}{2G} \frac{\partial G}{\partial g_{il}} \frac{\partial g_{il}}{\partial x^k} = \frac{1}{2G} \frac{\partial G}{\partial x^k} = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial x^k} \equiv \frac{\partial_k \sqrt{G}}{\sqrt{G}}$$

Con esto podemos ver que podemos obtener una expresión bien general para la divergencia:

$$\text{div } \mathbf{A} \equiv A^i{}_{;i} = \partial_i A^i + \frac{\partial_i \sqrt{G}}{\sqrt{G}} A^i = \frac{\partial_i (\sqrt{G} A^i)}{\sqrt{G}}$$

Se define el Laplaciano de un campo escalar $\phi = \phi(\mathbf{r})$ como la divergencia del gradiente

$$\Delta \phi = \text{div} \cdot \text{grad } \phi = \frac{\partial_i [\sqrt{G} (\text{grad } \phi)^i]}{\sqrt{G}} = \frac{\partial_i [\sqrt{G} g^{ij} (\text{grad } \phi)_j]}{\sqrt{G}} = \frac{\partial_i [\sqrt{G} g^{ij} \partial_j \phi]}{\sqrt{G}}$$

Para finalizar, recordemos que podemos construir a partir de un tensor de segundo rango un tensor antisimétrico, por ejemplo, de $A_{i;j}$ tenemos el tensor $A_{i;j} - A_{j;i}$. Ahora bien, de:

$$A_{i;j} = \partial_j A_i - \Gamma_{ij}^k A_k \quad \text{y} \quad A_{j;i} = \partial_i A_j - \Gamma_{ji}^k A_k$$

resulta

$$A_{i;j} - A_{j;i} = \partial_j A_i - \partial_i A_j$$

por la simetría de los símbolos de Christoffel. Aunque las derivadas parciales de un vector no son tensores, por eso fue que definimos la derivada covariante, la diferencia antisimétrica si que es un tensor. Los tensores antisimétricos tienen únicamente tres componentes independientes (en todos los sistemas de coordenadas) y en este caso, pueden verse como las componentes de un vector relacionado con el rotor del vector \mathbf{A} .

$$(\text{rot } \mathbf{A})^i = \frac{1}{\sqrt{G}} (\partial_j A_k - \partial_k A_j) \Rightarrow \text{rot } \mathbf{A} = \frac{1}{\sqrt{G}} \det \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{G}} \epsilon^{ijk} A_j \mathbf{e}_k$$

con i, j, k una permutación cíclica de 1, 2, 3.

5.11. Integrales y Campos Vectoriales

5.11.1. Integrales de Campos

Después de haber diferenciado campos escalares y vectoriales, el siguiente paso es integrarlos. El primer caso de este tipo integrales es el trivial que siempre hemos utilizado:

$$\int \mathbf{V}(u) \, du = \mathbf{i} \int V_x(u) \, du + \mathbf{j} \int V_y(u) \, du + \mathbf{k} \int V_z(u) \, du = \left[\int V^i(u) \, du \right] \mathbf{e}_i$$

Así integramos la aceleración de un movimiento parabólico

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{a} = -g\mathbf{k} \Rightarrow \int \mathbf{a} \, dt = \mathbf{k} \int -g \, dt = -g\mathbf{k}t + \mathbf{v}_0 = -g\mathbf{k}t + \mathbf{i}v_{0x} + \mathbf{j}v_{0y} + \mathbf{k}v_{0z}$$

Ahora bien, existen sutilezas en este caso que debemos tener en cuenta. Por ejemplo considere la integral

$$\int dt \left(\mathbf{a} \times \frac{d^2\mathbf{a}}{dt^2} \right) = \int dt \left(\frac{d}{dt} \left(\mathbf{a} \times \frac{d\mathbf{a}}{dt} \right) - \frac{d\mathbf{a}}{dt} \times \frac{d\mathbf{a}}{dt} \right) = \int dt \frac{d}{dt} \left(\mathbf{a} \times \frac{d\mathbf{a}}{dt} \right) = \mathbf{a} \times \frac{d\mathbf{a}}{dt} + \mathbf{c}$$

Pero en general los casos quedan resueltos integrando componente a componente con la ayuda de la notación de índices

$$\int dt (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \left[\int dt (\varepsilon^{ijk} a_j b_k) \right] \mathbf{e}_i$$

Quizá uno de los problemas que ilustra mejor esta situación es el movimiento bajo fuerzas centrales. La Ley de Gravitación de Newton nos dice que

$$\sum \mathbf{F} = m \mathbf{a} = m \frac{d}{dt} \left(\frac{d}{dt} \left(G \frac{M}{r_{mM}^2} \mathbf{u}_r \right) \right) \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{d}{dt} \left(G \frac{M}{r_{mM}^2} \mathbf{u}_r \right) \right) = \mathbf{a}$$

Es costumbre definir la *velocidad aerolar*, \mathbf{v}_A , como el área barrida por el radio vector posición, $\mathbf{r}(t)$ que describe la trayectoria de la partícula

$$2\mathbf{v}_A = \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} = r \mathbf{u}_r \times \frac{d(r \mathbf{u}_r)}{dt} = r \mathbf{u}_r \times \left(\frac{dr}{dt} \mathbf{u}_r + r \frac{d\mathbf{u}_r}{dt} \right) = r \mathbf{u}_r \times r \frac{d\mathbf{u}_r}{dt} = r^2 \mathbf{u}_r \times \frac{d\mathbf{u}_r}{dt}$$

Nótese que si \mathbf{c} es un vector constante

$$\frac{d}{dt} \left(\mathbf{u}_r \times \frac{d\mathbf{u}_r}{dt} \right) = 0 \Rightarrow \mathbf{u}_r \times \frac{d\mathbf{u}_r}{dt} = \mathbf{c} \Rightarrow 2\mathbf{v}_A = r^2 \mathbf{u}_r \times \frac{d\mathbf{u}_r}{dt} = \text{const}$$

con lo cual

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{v} \times \mathbf{v}_A) = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \times \mathbf{v}_A = G \frac{M}{r_{mM}^2} \hat{\mathbf{u}}_r \times \mathbf{v}_A = \frac{MG}{2} \left\{ \mathbf{u}_r \times \left(\mathbf{u}_r \times \frac{d\mathbf{u}_r}{dt} \right) \right\}$$

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{v} \times \mathbf{v}_A) = \frac{MG}{2} \left\{ \left(\mathbf{u}_r \cdot \frac{d\mathbf{u}_r}{dt} \right) \mathbf{u}_r - (\mathbf{u}_r \cdot \mathbf{u}_r) \frac{d\mathbf{u}_r}{dt} \right\} = \frac{MG}{2} \frac{d\mathbf{u}_r}{dt}$$

integrando

$$\mathbf{v} \times \mathbf{v}_A = \frac{MG}{2} \mathbf{u}_r + \mathbf{p}$$

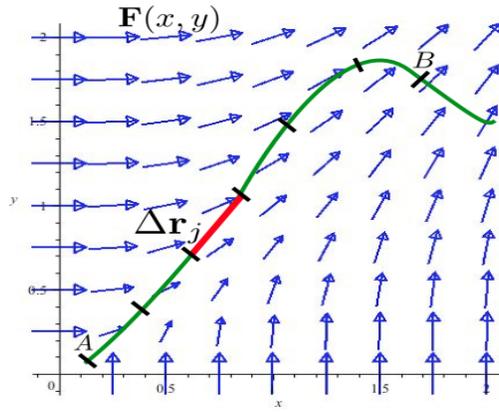


Figura 5.15: Trayectorias de integración y campos vectoriales

donde \mathbf{p} es un vector arbitrario de constante de integración. Finalmente nos damos cuenta que

$$\mathbf{r} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{v}_A) = r \mathbf{u}_r \cdot \left(\frac{MG}{2} \mathbf{u}_r + \mathbf{p} \right) = \frac{MG}{2} r + rp \cos(\theta)$$

$$\mathbf{r} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{v}_A) = \varepsilon^{ijk} r_i v_j v_{Ak} \equiv \mathbf{v}_A \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) = \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}_A = v_A^2$$

y entonces

$$v_A^2 = \frac{MG}{2} r + rp \cos(\theta) \Rightarrow r = \frac{v_A^2}{\frac{MG}{2} + p \cos(\theta)} \equiv \frac{\frac{2v_A^2}{MG}}{1 + \frac{2p}{MG} \cos(\theta)}$$

que constituye la ecuación de una cónica.

5.11.2. Integrales de línea

Ahora nos detendremos con más cuidado en integrales que también ya hemos utilizado, pero muy rápidamente. Así tendremos por delante algunos objetos del siguiente tenor:

$$\int_C \phi \, d\mathbf{r}, \quad \int_C \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r} \quad \text{y} \quad \int_C \mathbf{V} \times d\mathbf{r}$$

Este tipo de objetos se conoce como integrales de línea y requieren la especificación de la curva C , la trayectoria, a lo largo de la cual se lleva la integración. Es clara la importancia de esa trayectoria para la integración de los campos por cuanto encontrarán expresiones del campo vectorial que puebla la región a través de la cual se integra. Esas trayectorias serán abiertas o cerradas dependiendo de la curva que se siga en el proceso de integración.

Así para integrar un campo escalar $\phi = \phi(\mathbf{r})$ en coordenadas cartesianas, tendremos que

$$\begin{aligned} \int_C \phi(x, y, z) \, d\mathbf{r} &= \int_C \phi(x, y, z) (dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}) \\ &= \mathbf{i} \int_C \phi(x, y(x), z(x)) \, dx + \mathbf{j} \int_C \phi(x(y), y, z(y)) \, dy + \mathbf{k} \int_C \phi(x(z), y(z), z) \, dz \end{aligned}$$

tal y como indicamos arriba, las tres integrales se podrán realizar si conocemos, en cada caso, la expresión del integrando en término de la variable de integración. Esa es la razón por la cual hay que especificar la curva C que define la trayectoria de integración.

5.11.3. Integrales de Superficie

Otros objetos que ya nos hemos encontrado son las integrales de superficie cuando evaluamos el flujo de un campo vectorial y lo relacionamos con la divergencia. Así interpretamos que objetos

$$\iint_s \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S} \equiv \iint_s \mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{n}}_s dS = \iint_s a_{\hat{\mathbf{n}}} dS$$

representaban el flujo de las líneas de campo a través del diferencial de superficie $d\mathbf{S}$. Es costumbre que se separen el módulo, dS , de la dirección y el sentido, $\hat{\mathbf{n}}_s$ el cual es el vector normal (sentido positivo) a la superficie. Otra vez, las superficies podrán ser abiertas (cuando disponen de una curva que limita sus fronteras) y cerradas cuando no. Un círculo será una superficie abierta y una esfera cerrada. Por convención supondremos que el vector normal a una superficie cerrada tendrá sentido positivo saliendo.

La utilización de integrales de superficie nos ha permitido definir, de manera invariante (independiente del sistema de coordenadas) las expresiones para los operadores diferenciales. Así hemos podido definir:

$$\nabla \phi \equiv \text{grad } \phi = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \iint_s \phi(x, y, z) d\mathbf{S} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \iint_s \phi(x, y, z) \hat{\mathbf{n}}_s dS$$

$$\nabla \cdot \mathbf{a} \equiv \text{div } \mathbf{a} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \iint_s \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S} \equiv \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \iint_s \mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{n}}_s dS = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \iint_s a_{\hat{\mathbf{n}}} dS$$

$$\nabla \times \mathbf{a} \equiv \text{rot } \mathbf{a} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \iint_s d\mathbf{S} \times \mathbf{a} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \iint_s \hat{\mathbf{n}}_s \times \mathbf{a} dS$$

5.12. Campos Vectoriales y Teoremas integrales

En esta sección presentaremos un conjunto de teoremas que relacionan las variaciones de un campo vectorial con las fuentes que lo producen. En términos técnicos (matemáticos) resultan fundamentales cuando queremos convertir un tipo de integral (línea, superficie o volumen) en otra.

El primer teorema, el *Teorema de Gauss* permite expresar el valor de una integral de volumen, V , encerrado por una determinada superficie, S , (cerrada) en términos de una integral sobre esa superficie, S . El otro teorema importante es el *Teorema de Stokes*, el cual permite relacionar el valor de una integral de superficie con la integral de línea sobre la curva que delimita esa superficie.

5.12.1. Teorema de Gauss

Presentación y demostración

La primera relación que presentaremos entre una integral de superficie de un campo vectorial, \mathbf{a} , y una de superficie de su derivada es el Teorema de Gauss el cual se expresa de forma vectorial como

$$\iint_s \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S} \equiv \iint_s \mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{n}}_s dS = \int_V \nabla \cdot \mathbf{a} dV$$

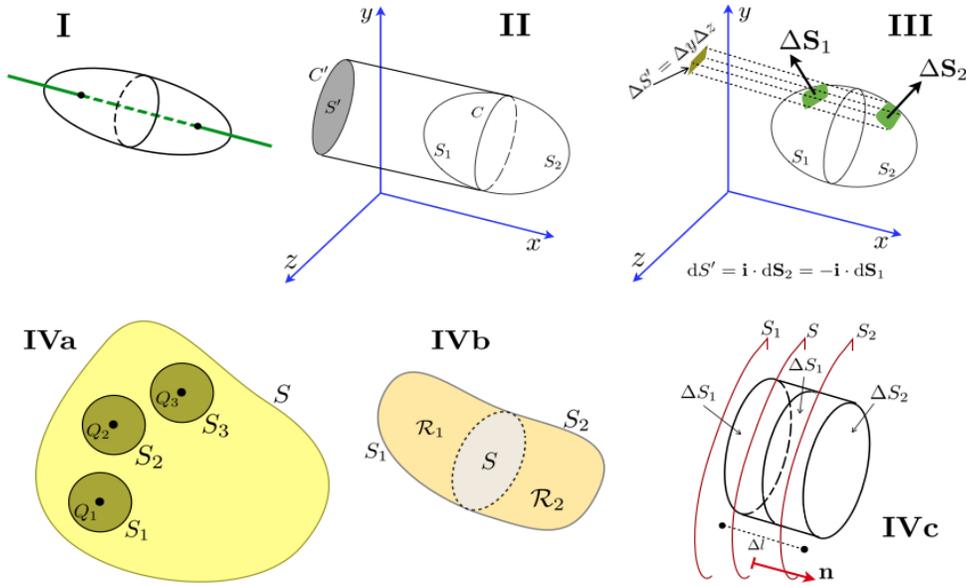


Figura 5.16: Teoremas de Gauss

donde $\mathbf{a} = \mathbf{a}(x, y, z)$ es el campo vectorial, $d\mathbf{S} \equiv \hat{\mathbf{n}}_s dS$ es el diferencial de área y dV el diferencial de volumen.

Tal y como vimos en su oportunidad el término $\nabla \cdot \mathbf{a}$ es interpretado como el flujo del campo \mathbf{a} por unidad de volumen, por lo tanto, el lado derecho de la ecuación es la tasa de flujo neto que sale del volumen sobre el cual estamos integrando.

La demostración del Teorema de Gauss es como sigue. Supongamos un volumen encerrado por una superficie convexa, S , como se muestra en la Figura 5.16 en los cuadrantes I, II y III. Supongamos además que orientamos el sistema de coordenada de tal forma que una línea paralela a uno de los ejes toca la superficie en dos puntos (Figura 5.16, cuadrante I). De este modo podemos trazar una superficie (perpendicular a esa línea) tal que divida la superficie, S , en dos superficies, S_1 y S_2 cada una de las cuales está bordeada por la curva C , (Figura 5.16, cuadrante II).

Al evaluar la integral

$$\int_S a_x \mathbf{i} \cdot d\mathbf{S} = \int_{S_1} a_x \mathbf{i} \cdot d\mathbf{S} + \int_{S_2} a_x \mathbf{i} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{s'} [a_x(x_2, y, z) - a_x(x_1, y, z)] dS'$$

ya que las componentes x de los vectores normales a las dos superficies que contribuyen (Figura 5.16, cuadrante III) tienen signos opuestos

$$dS_{2x} = \mathbf{i} \cdot d\mathbf{S}_2 = -\mathbf{i} \cdot d\mathbf{S}_1 = -dS_{1x} = dydz = dS'$$

Ahora bien, dado que

$$\frac{\partial a_x}{\partial x} = \lim_{x_2 \rightarrow x_1} \frac{a_x(x_2, y, z) - a_x(x_1, y, z)}{x_2 - x_1} \Rightarrow a_x(x_2, y, z) - a_x(x_1, y, z) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial a_x}{\partial x} dx$$

con lo cual

$$\int_S a_x \mathbf{i} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{s'} \left[\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial a_x}{\partial x} dx \right] dydz = \int_V \frac{\partial a_x}{\partial x} dV$$

y equivalentemente al hacerlo en las direcciones \mathbf{j} y \mathbf{k} , obtendremos

$$\int_S a_y \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \frac{\partial a_y}{\partial y} dV \quad \text{y} \quad \int_S a_z \mathbf{k} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \frac{\partial a_z}{\partial z} dV.$$

Finalmente hemos demostrado el Teorema de la divergencia o Teorema de Gauss

$$\iint_S \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S} \equiv \iint_S \mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{n}}_s dS = \int_V \left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \right) dV = \int_V (\partial_i a^i) dV = \int_V (\nabla \cdot \mathbf{a}) dV$$

Expresiones equivalentes para el Teorema de Gauss

Si bien la expresión estándar es la que hemos presentado, existen algunas variantes que se derivan de ella. Por ejemplo si consideramos un campo escalar, $\phi(x, y, z)$, el teorema de Gauss nos conduce a

$$\iint_S \phi(x, y, z) d\mathbf{S} = \iiint_V \nabla \phi(x, y, z) dV \quad \text{y} \quad \iint_S d\mathbf{S} \times \mathbf{B}(x, y, z) = \iiint_V \nabla \times \mathbf{B}(x, y, z) dV$$

donde $\mathbf{B}(x, y, z)$ es un campo vectorial.

Para comprobar la primera de estas dos relaciones consideramos un vector \mathbf{c} constante y construimos un campo vectorial

$$\mathbf{a}(x, y, z) = \mathbf{c} \phi(x, y, z)$$

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S} &= \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{a} dV \Rightarrow \mathbf{c} \cdot \iint_S \phi(x, y, z) d\mathbf{S} = \mathbf{c} \cdot \iiint_V \nabla \phi(x, y, z) dV \\ 0 &= \mathbf{c} \cdot \left[\iint_S \phi(x, y, z) d\mathbf{S} - \iiint_V \nabla \phi(x, y, z) dV \right] \end{aligned}$$

es decir, para todo vector \mathbf{c} siempre se cumple que

$$\iint_S \phi(x, y, z) d\mathbf{S} = \iiint_V \nabla \phi(x, y, z) dV$$

Esa misma metodología se puede aplicar para demostrar la segunda relación si consideramos un campo vectorial $\mathbf{a}(x, y, z) = \mathbf{c} \times \mathbf{B}(x, y, z)$, con \mathbf{c} vector constante y se procede de una manera similar.

Ley de Gauss y Campo Eléctrico

La aplicación más emblemática del Teorema de Gauss lo constituyen el cálculo de la divergencia del campo eléctrico \mathbf{E} y su relación con las distribuciones de cargas existentes. Desde siempre sabemos que el campo eléctrico producido por una carga Q_i viene dado por

$$\mathbf{E}_i(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_i}{r_i^2} \mathbf{u}_{r_i}; \Rightarrow \iint_{S_i} \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{S}_i = \frac{Q_i}{\epsilon_0} \Leftrightarrow \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0}$$

En definitiva la “deducción” de una de las ecuaciones de Maxwell. Si calculamos el flujo del campo eléctrico en una región sin cargas todas las líneas del campo $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ atraviesan el volumen: todas entran y todas salen. Sin embargo si tenemos un conjunto de cargas discretas distribuidas dentro de la región encerrada por la

superficie S , (ver Figura 5.16, cuadrante IVa) podemos encerrar cada una de las cargas con superficies esféricas S_i . Por lo tanto

$$\iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} + \sum_i \iint_{S_i} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}_i = \int_V \nabla \cdot \mathbf{E} dV = 0 \Rightarrow \iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = - \sum_i \iint_{S_i} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}_i$$

Con lo cual hemos definido una superficie con “huecos” alrededor de cada una de las cargas y llegamos a la conclusión que lo que entra sale. Por su parte, el campo eléctrico medido para cada superficie esférica interior S_i será

$$\mathbf{E}|_{S_i} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_i}{r_i^2} \mathbf{u}_{r_i} + \mathbf{E}'$$

donde \mathbf{E}' es el campo de todas las otras cargas presentes en el volumen encerrado por S . Es claro que este campo \mathbf{E}' tiene flujo cero neto sobre cada esfera de superficie S_i . Por lo tanto

$$\iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = - \sum_i \iint_{S_i} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_i}{r_i^2} \mathbf{u}_{r_i} + \mathbf{E}' \right) \cdot \mathbf{n}_{S_i} dS_i = \sum_i \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_i}{r_i^2} \iint_{S_i} dS_i = \frac{\sum_i Q_i}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

donde hemos utilizado que

$$\int_{V_i} (\nabla \cdot \mathbf{E}') dV_i = 0 = \sum_i \iint_{S_i} \mathbf{E}' \cdot \hat{\mathbf{n}}_{S_i} dS_i; \quad \mathbf{u}_{r_i} \cdot \hat{\mathbf{n}}_{S_i} = -1; \quad \text{y} \quad \iint_{S_i} dS_i = S_i = 4\pi r_i^2$$

Finalmente encontramos una de las leyes de Maxwell si reescribimos la integral de superficie utilizando la Ley de Gauss

$$\iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{r}) dV \Rightarrow \iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_V (\nabla \cdot \mathbf{E}) dV = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{r}) dV$$

con lo cual

$$\int_V \left(\nabla \cdot \mathbf{E} - \frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0} \right) dV \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0}$$

Discontinuidades y densidades superficiales de carga

Normalmente, siempre consideramos que los campos vectoriales $\mathbf{a} = \mathbf{a}(x, y, z)$ son campos continuos (y, más aún, con todas sus derivadas continuas). Sin embargo, encontramos en la naturaleza situaciones en las cuales el campo varía mucho en una distancia muy corta (infinitesimal). En estas situaciones podemos simular esta rápida variación como una discontinuidad en el campo. Existe formas de aplicar el Teorema de Gauss para algunas situaciones en las cuales tratamos con campos discontinuos. La manera apropiada de tratar (derivadas e integrales de) funciones discontinuas es considerándolas no funciones sino distribuciones. Este tipo de tratamiento está fuera del alcance de este formulario y será considerado en otros cursos.

Supongamos el caso que ilustra la Figura 5.16, cuadrante IVb. Una región \mathcal{R} delimitada por una superficie S , dentro de la cual, una superficie de discontinuidad, \bar{S} , separa dos subregiones \mathcal{R}_1 y \mathcal{R}_2 a través de la cual un campo vectorial, $\mathbf{a} = \mathbf{a}(x, y, z)$, es discontinuo. Ahora bien, el campo vectorial es continuo en las subregiones, por lo cual el flujo del campo atraviesa las superficies S_1 y \bar{S} que delimitan el volumen V_1 de la región \mathcal{R}_1 . Entonces el Teorema de Gauss para cada región queda expresado como

$$\int_{V_1} (\nabla \cdot \mathbf{a}) dV = \iint_{S_1} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{\bar{S}} \mathbf{a}_+ \cdot \hat{\mathbf{n}}_{\bar{S}} d\bar{S} \quad \text{y} \quad \int_{V_2} (\nabla \cdot \mathbf{a}) dV = \iint_{S_2} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S} - \iint_{\bar{S}} \mathbf{a}_- \cdot \hat{\mathbf{n}}_{\bar{S}} d\bar{S}$$

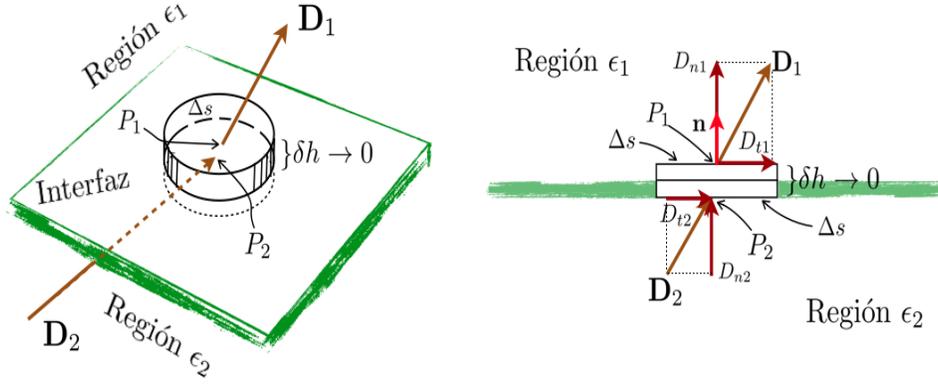


Figura 5.17: Discontinuidad del Vector Desplazamiento

donde $\hat{\mathbf{n}}_{\bar{S}}$ es el vector normal a la superficie \bar{S} , de separación de las dos regiones. Adicionalmente hemos denotado, \mathbf{a}_+ y \mathbf{a}_- el campo \mathbf{a} evaluado del lado de \mathcal{R}_1 y \mathcal{R}_2 , respectivamente. Si ahora consideramos el teorema de Gauss en toda la región

$$\int_{V_1+V_2} (\nabla \cdot \mathbf{a}) dV \equiv \int_{V_1} (\nabla \cdot \mathbf{a}) dV + \int_{V_2} (\nabla \cdot \mathbf{a}) dV$$

Claramente si el campo es continuo dentro de la región \mathcal{R} entonces nos queda la formulación estándar del Teorema de Gauss

$$\int_{V_1+V_2} (\nabla \cdot \mathbf{a}) dV = \iint_S \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S}$$

por el contrario si el campo es discontinuo, entonces debe tomarse en cuenta la discontinuidad del campo y la relación que surge de sumar el flujo a través de las dos regiones es

$$\int_{V_1+V_2} (\nabla \cdot \mathbf{a}) dV = \iint_S \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S} - \iint_{\bar{S}} (\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1) \cdot \hat{\mathbf{n}}_{\bar{S}} d\bar{S}$$

con $\hat{\mathbf{n}}_{\bar{S}}$ el vector unitario, normal a la superficie \bar{S} y que apunta de $\mathcal{R}_1 \rightarrow \mathcal{R}_2$. Es claro que la discontinuidad que cuenta es la de la componente del campo perpendicular a la superficie (ver Figura 5.17).

Este tipo de discontinuidad en campos irrotacionales es generado por la presencia de fuentes, las cuales, en este caso son densidades superficiales de carga.

Quizá el ejemplo típico para la aplicación de las anteriores consideraciones es la aplicación de las ecuaciones de Maxwell en el caso del vector desplazamiento eléctrico \mathbf{D} , a través de una superficie \bar{S} , que separa dos medios. Este caso se ilustra en la Figura 5.16, cuadrante IVc y en la Figura 5.17, sólo que en este último caso el vector normal está definido a la inversa: la región 2 corresponde a la región 1 de la Figura 5.16, cuadrante IVc. La ecuación de Maxwell correspondiente será

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0} \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho(\mathbf{r}) \Rightarrow (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \cdot \hat{\mathbf{n}}_{\bar{S}} = \sigma, \quad \text{con } \mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$$

donde $\hat{\mathbf{n}}_{\bar{S}}$ es el vector normal a la superficie (ver Figura 5.16, cuadrante IVc) y σ es la densidad superficial de carga en la superficie S . Para comprobar esta relación construimos un volumen cilíndrico infinitesimal que

encierra la superficie de discontinuidad, de tal forma que ΔS_2 corresponde con la “tapa” del cilindro y ΔS_1 con su “base” (Figura 5.16 cuadrante IVc). Adicionalmente, como $\Delta l \sim 0$, no sólo podremos trabajar sin las integrales, el flujo a través de las “paredes” del cilindro será despreciable y $\Delta S_2 \approx \Delta S_1$, sino que además, al encerrar la discontinuidad no tomamos en cuenta la contribución de la superficie ΔS_3 (o \bar{S} , en el cuadrante IVb de la Figura 5.16). Así

$$(\nabla \cdot \mathbf{D}) dV = \mathbf{D}_2 \cdot \Delta \mathbf{S}_2 - \mathbf{D}_1 \cdot \Delta \mathbf{S}_1 \Rightarrow \rho(\mathbf{r}) (\Delta S_2 \Delta l) = (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \cdot \hat{\mathbf{n}}_{s_2} \Delta S_2$$

con lo cual

$$\rho(\mathbf{r}) \Delta l \equiv \sigma = (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \cdot \hat{\mathbf{n}}_{s_2}.$$

Teoremas de Green

Cuando consideramos campos vectoriales muy particulares el Teorema de Gauss nos lleva a un par de identidades vectoriales conocidas como las *Identidades o Teoremas de Green*

Supongamos que tenemos dos campos escalares: $\zeta(x, y, z)$ y $\xi(x, y, z)$ entonces y con ellos construimos un campo vectorial

$$\mathbf{a}(x, y, z) = \zeta(x, y, z) \nabla \xi(x, y, z) \Rightarrow \iint_s \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V (\nabla \cdot \mathbf{a}) dV$$

es decir

$$\iint_s (\zeta(x, y, z) \nabla \xi(x, y, z)) \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \nabla \cdot (\zeta(x, y, z) \nabla \xi(x, y, z)) dV$$

con lo cual arribamos a la *primera identidad de Green, Primer Teorema de Green o, Teorema escalar de Green*:

$$\iint_s (\zeta(x, y, z) \nabla \xi(x, y, z)) \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V [\zeta(x, y, z) (\nabla \cdot \nabla \xi(x, y, z)) + \nabla \zeta(x, y, z) \cdot \nabla \xi(x, y, z)] dV$$

Si ahora, consideramos los siguientes campos vectoriales

$$\nabla \cdot (\zeta(x, y, z) \nabla \xi(x, y, z)) = \nabla \zeta(x, y, z) \cdot \nabla \xi(x, y, z) + \zeta(x, y, z) \nabla \cdot \nabla \xi(x, y, z)$$

$$\nabla \cdot (\xi(x, y, z) \nabla \zeta(x, y, z)) = \nabla \xi(x, y, z) \cdot \nabla \zeta(x, y, z) + \xi(x, y, z) \nabla \cdot \nabla \zeta(x, y, z)$$

Restando ambas expresiones tendremos que

$$\nabla \cdot \{\zeta(x, y, z) \nabla \xi(x, y, z) - \xi(x, y, z) \nabla \zeta(x, y, z)\} = \zeta(x, y, z) \nabla \cdot \nabla \xi(x, y, z) - \xi(x, y, z) \nabla \cdot \nabla \zeta(x, y, z)$$

y al integrar sobre un volumen V obtendremos la formulación del *Teorema de simétrico de Green, la segunda identidad*.

$$\iiint_V \{\zeta(x, y, z) \nabla \cdot \nabla \xi(x, y, z) - \xi(x, y, z) \nabla \cdot \nabla \zeta(x, y, z)\} dV = \iint_s \{\zeta(x, y, z) \nabla \xi(x, y, z) - \xi(x, y, z) \nabla \zeta(x, y, z)\} \cdot d\mathbf{S}$$

La utilidad de estas relaciones las veremos en el desarrollo de la Teoría del Potencial en la sección 5.13.1 en la página 272.

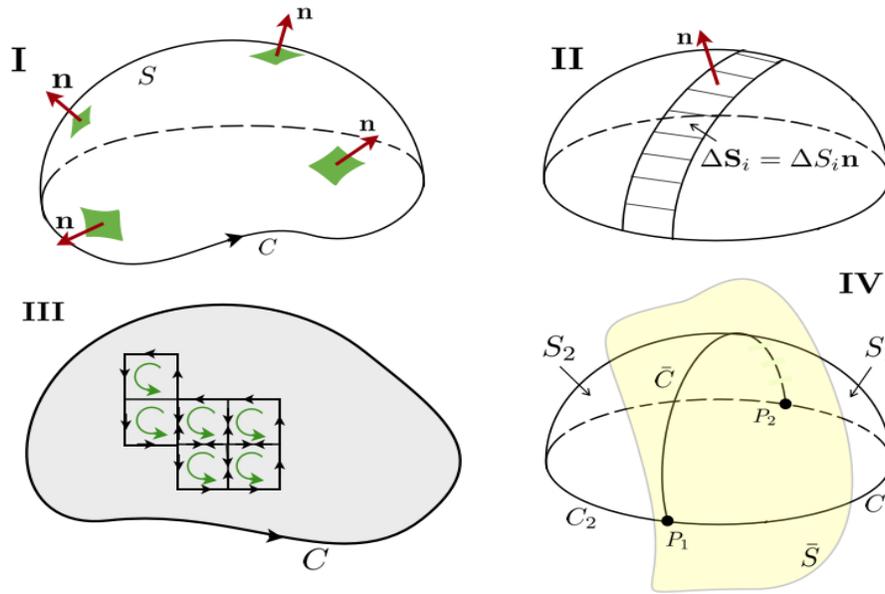


Figura 5.18: Teorema de Stokes

5.12.2. Teorema de Stokes

Presentación y demostración

El teorema de Stokes relaciona una integral de línea escalar de un campo vectorial, $\mathbf{a} = \mathbf{a}(x, y, z)$, a lo largo de una curva cerrada C , con una integral del rotor del campo sobre la superficie encerrada por la misma curva C . Es decir

$$\oint \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{a}) \cdot d\mathbf{S} \equiv \iint_S (\nabla \times \mathbf{a}) \cdot \hat{\mathbf{n}}_s \, dS.$$

Tal y como hemos mencionado antes la superficie la define su vector normal, y éste lo define el “sentido” de circulación de la curva que bordea la superficie (ver Figura 5.18 cuadrantes I y III).

No haremos una demostración formal del Teorema de Stokes como lo hicimos para el Gauss. Nos convenceremos de que es correcta la relación a partir de algunas situaciones sencillas. Cualquier superficie la podremos dividir en pequeñas cuadrículas diferenciales, las cuales sumadas constituyen la superficie (ver Figura 5.18 cuadrante II). Es fácil convencerse que la circulación⁶ por el borde de una cuadrícula diferencial (por ejemplo en el plano xy) nos lleva a

$$\Gamma_{1234} = \oint_{1234} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = \int_1 a_x(x, y) \, dx + \int_2 a_y(x, y) \, dy + \int_3 a_x(x, y) \, (-dx) + \int_4 a_y(x, y) \, (-dy)$$

donde hemos denotado la trayectoria a lo largo del perímetro de la cuadrícula por 1234. De la Figura 5.19 podemos intuir

$$\Gamma_{1234} = \int a_x(x_0, y_0) \, dx + \int a_y(x_0 + dx, y_0) \, dy + \int a_x(x_0, y_0 + dy) \, (-dx) + \int a_y(x_0, y_0) \, (-dy)$$

⁶Pueden consultar otro ejemplo de circulación en la sección 5.10.3.

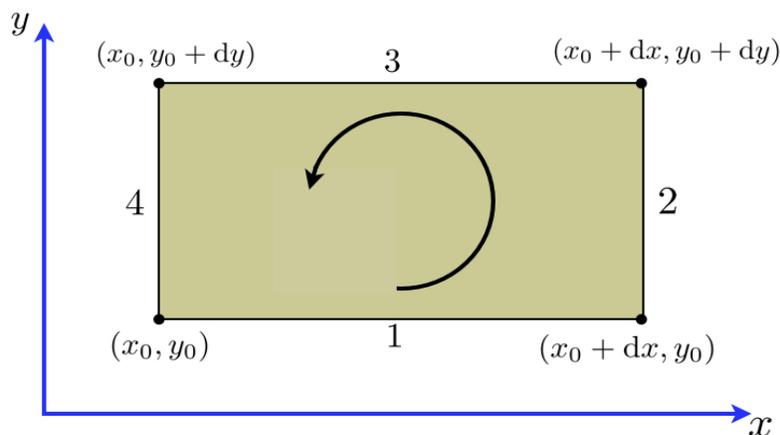


Figura 5.19: Circulación en una cuadrícula del plano x, y

y de allí el desarrollo por Taylor que nos conduce a

$$\begin{aligned} \Gamma_{1234} &= \int a_x(x_0, y_0) dx + \int \left[a_y(x_0, y_0) + \frac{\partial a_y}{\partial x} \Big|_{x_0} dx \right] dy - \int \left[a_x(x_0, y_0) + \frac{\partial a_x}{\partial y} \Big|_{y_0} dy \right] dx \\ &+ \int a_y(x_0, y_0) dy \\ &= \int \left[\frac{\partial a_y}{\partial x} \Big|_{x_0} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \Big|_{y_0} \right] dx dy = \iint_S \nabla \times \mathbf{a} \Big|_z dS_z \equiv \iint_S (\nabla \times \mathbf{a}) \cdot d\mathbf{S}. \end{aligned}$$

Esto vale para todos los puntos (x_0, y_0) y se puede aplicar para las otras superficies, con lo cual es fácil convergerse que esta técnica se puede utilizar para cada cuadrícula en las que hemos dividido la superficie (ver Figura 5.18 cuadrante II). Más aún, las circulaciones a lo largo de los perímetros de las cuadrículas interiores se anulan (ver Figura 5.18 cuadrante III) y sólo sobrevive la circulación a lo largo del perímetro exterior de la superficie. Con ello

$$\sum_{\text{cuadrícula}} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} \equiv \sum (\nabla \times \mathbf{a}) \cdot d\mathbf{S} \Rightarrow \oint \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{a}) \cdot d\mathbf{S}.$$

Expresiones equivalentes para el Teorema de Stokes

Del mismo modo que hicimos en la sección 5.12.1 con el Teorema de Gauss, podemos hacerlo para el Teorema de Stokes y tendremos

$$\oint \phi(x, y, z) d\mathbf{r} = \iint_S d\mathbf{S} \times \nabla \phi(x, y, z) \quad \text{y} \quad \oint d\mathbf{r} \times \mathbf{B}(x, y, z) = \iint_S (d\mathbf{S} \times \nabla) \times \mathbf{B}(x, y, z)$$

donde $\phi(x, y, z)$ es un campo escalar y $\mathbf{B}(x, y, z)$ un campo vectorial.

Otra vez, la metodología para proceder a la demostración se fundamenta en considerar un par de campos vectoriales de la forma: $\mathbf{a}(x, y, z) = \phi(x, y, z) \mathbf{c}$ y $\mathbf{b}(x, y, z) = \mathbf{c} \times \mathbf{B}(x, y, z)$ y desarrollar un álgebra vectorial mínima.

Teorema de Stokes y Fuerzas Conservativas

El teorema de Stokes nos permite identificar que campos vectoriales irrotacionales generan integrales de línea las cuales son independientes de la trayectoria. Esto es

$$\nabla \times \mathbf{F}(x, y, z) = 0 \Rightarrow \iint_S (\nabla \times \mathbf{a}) \cdot d\mathbf{S} = \oint \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = 0$$

con lo cual, lo que se está implicando es que toda trayectoria cerrada se puede fraccionar en dos trayectorias abiertas que se unen en los extremos, entonces

$$\oint \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = 0 = \int_{C_1} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} + \int_{C_2} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} \Rightarrow \int_{\substack{P_1 \\ \text{curva } C_1}}^{P_2} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} \equiv \int_{\substack{P_1 \\ \text{curva } C_2}}^{P_2} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r}$$

y lo que nos dice es que vamos de un punto (de corte de la curva cerrada) P_1 a otro punto P_2 por dos trayectorias distintas y la integral de línea es la misma. Más adelante veremos que a los campos vectoriales irrotacionales les está asociado un potencial tal que

$$\nabla \times \mathbf{F}(x, y, z) = 0 \Rightarrow \mathbf{F}(x, y, z) \propto \nabla \phi(x, y, z).$$

Teorema de Stokes y discontinuidades del campo vectorial

Al igual que el Teorema de Gauss puede ser considerado para manejar funciones discontinuas, el Teorema de Stokes también tiene una expresión cuando se consideran campos discontinuos (continuo a trozos o continuos por segmentos)

Consideremos el caso más simple el de un campo vectorial $\mathbf{a}(x, y, z)$ que es discontinuo sobre una superficie \bar{S} , que divide \mathcal{R} en dos subregiones \mathcal{R}_1 y \mathcal{R}_2 (ver otra vez 5.16, cuadrante IVb). En este caso la superficie S , será abierta y estará delimitada por una curva C_2 . La intersección de las superficies S y \bar{S} será una curva \bar{C} , la cual dividirá a S en dos superficies S_1 y S_2 (ver Figura 5.18 cuadrante IV). Entonces, aplicando el Teorema de Stokes:

$$\begin{aligned} \oint_{C_1 + \bar{C}} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} &= \int_{\substack{P_1 \\ \text{curva } C_1}}^{P_2} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} + \int_{\substack{P_2 \\ \text{curva } \bar{C}}}^{P_1} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = \iint_{S_1} (\nabla \times \mathbf{a}) \cdot d\mathbf{S} \\ \oint_{C_2 + \bar{C}} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} &= \int_{\substack{P_2 \\ \text{curva } C_2}}^{P_1} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} + \int_{\substack{P_1 \\ \text{curva } \bar{C}}}^{P_2} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = \iint_{S_2} (\nabla \times \mathbf{a}) \cdot d\mathbf{S} \end{aligned}$$

Ahora bien si las sumamos obtendremos

$$\iint_{S_1} (\nabla \times \mathbf{a}) \cdot d\mathbf{S} + \iint_{S_2} (\nabla \times \mathbf{a}) \cdot d\mathbf{S} = \oint_C \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} + \int_{\substack{P_2 \\ \text{curva } \bar{C} \text{ en } S_1}}^{P_1} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} + \int_{\substack{P_1 \\ \text{curva } \bar{C} \text{ en } S_2}}^{P_2} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r}$$

la cual puede ser reescrito como

$$\oint_C \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{a}) \cdot d\mathbf{S} - \int_{\substack{P_1 \\ \text{curva } \bar{C}}}^{P_2} (\mathbf{a}|_{S_2} - \mathbf{a}|_{S_1}) \cdot d\mathbf{r}$$

donde hemos denotado $\mathbf{a}|_{S_2}$ como el campo vectorial evaluado sobre la curva \bar{C} “del lado” de la superficie S_2 . Es importante señalar que el término que incorpora la contribución de la discontinuidad del campo sólo encierra componentes tangenciales a la superficie. Esto es claro del producto escalar con el vector $d\mathbf{r}$ tangente a la curva \bar{C} (y también a la superficie S).

5.13. Teoría de Potencial

5.13.1. Potenciales escalares

Si un campo vectorial $\vec{F}(x, y, z)$ en una determinada región \mathcal{R} puede asociarse con un gradiente de un potencial tendremos que

$$\mathbf{F}(x, y, z) = -\nabla\phi(x, y, z) \Leftrightarrow \nabla \times \mathbf{F}(x, y, z) = 0 \Leftrightarrow \oint \mathbf{F}(x, y, z) \cdot d\mathbf{r} = 0.$$

La ventaja que un campo derive de un potencial es, por un lado la simplicidad y la cantidad de información que sobre el campo tenemos: describimos la interacción por una función y no con tres (las componentes del campo) y sabremos que el campo es irrotacional y conservativo. Pero además la función que describe el campo es escalar, con lo cual es independiente del sistema de coordenadas.

Cualquiera de las afirmaciones implica las otras dos, con o cual podremos elegir cualquier de ellas para demostrar las otras dos. Veamos:

- un campo que derive de un potencial es conservativo e irrotacional

$$\mathbf{F} = -\nabla\phi(x, y, z) \Rightarrow \begin{cases} -\nabla \times (\nabla\phi(x, y, z)) = 0 \\ -\oint \nabla\phi(x, y, z) \cdot d\mathbf{r} = -\oint d\phi = \phi(x_0, y_0, z_0) - \phi(x_0, y_0, z_0) = 0 \end{cases}$$

donde hemos utilizado la definición de diferencial total

$$d\phi = \frac{\partial\phi(x, y, z)}{\partial x} dx + \frac{\partial\phi(x, y, z)}{\partial y} dy + \frac{\partial\phi(x, y, z)}{\partial z} dz = \nabla\phi(x, y, z) \cdot d\mathbf{r}$$

- un campo conservativo es irrotacional y deriva de un potencial.

Un campo conservativo implica que el trabajo ($\int_{P_1}^{P_2} \mathbf{F}(x, y, z) \cdot d\mathbf{r}$) es independiente de la trayectoria entre P_1 y P_2 . Por eso llamamos a la fuerza conservativa por cuanto se conserva la energía y por lo tanto, ésta depende únicamente de la posición

$$\oint \mathbf{F}(x, y, z) \cdot d\mathbf{r} = 0 \Rightarrow \int_{P_1}^{P_2} \mathbf{F}(x, y, z) \cdot d\mathbf{r} = \phi(x_2, y_2, z_2) - \phi(x_1, y_1, z_1)$$

↓

$$\mathbf{F}(x, y, z) \cdot d\mathbf{r} = d\phi = -\nabla\phi(x, y, z) \cdot d\mathbf{r} \Rightarrow \mathbf{F}(x, y, z) = -\nabla\phi(x, y, z),$$

con lo cual hemos demostrado que el campo vectorial deriva de un potencial. El signo menos (-) es una convención tradicional del oficio del Físico y proviene de nuestra intuición de flujo de los acontecimientos: "El agua siempre fluye hacia abajo".

Ahora bien, utilizando el Teorema de Stokes tendremos:

$$\mathbf{F}(x, y, z) = -\nabla\phi(x, y, z) \Rightarrow \oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_{S_2} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} = 0 \Rightarrow \nabla \times \mathbf{F}(x, y, z) = 0.$$

Es fácil demostrar que el campo también es irrotacional.

- un campo de fuerzas irrotacional implica que el campo deriva de un potencial y que el campo es conservativo.

Otra vez, por el Teorema de Stokes si el campo es irrotacional es conservativo

$$\nabla \times \mathbf{F}(x, y, z) = 0 \Rightarrow \iint_{S_2} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} = \oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$$

y si es conservativo deriva de un potencial

$$\mathbf{F}(x, y, z) \cdot d\mathbf{r} = d\phi = -\nabla\phi(x, y, z) \cdot d\mathbf{r} \Rightarrow \mathbf{F}(x, y, z) = -\nabla\phi(x, y, z)$$

En definitiva, si cualquiera de las condiciones se cumple: conservativo, irrotacional o potencial, las otras también se cumplirán.

5.13.2. Potenciales vectoriales y calibres

Al igual que derivamos un campo vectorial \mathbf{F} a partir de un potencial escalar $\phi(x, y, z)$ y asociamos su existencia a su condición de irrotacionalidad, $\nabla \times \mathbf{F}(x, y, z) = 0$, podemos pensar que un campo sin divergencia (*solenoidal* o *transverso*) conlleva a la existencia de un potencial *vectorial*. Esto es

$$\nabla \cdot \mathbf{F}(x, y, z) = 0 \Rightarrow \mathbf{F}(x, y, z) = \nabla \times \mathbf{a}(x, y, z)$$

Claramente

$$\nabla \cdot \mathbf{F}(x, y, z) = \partial_i F^i = \partial_i (\varepsilon^{ijk} \partial_j A_k) = 0.$$

El campo vectorial $\mathbf{a} = \mathbf{a}(x, y, z)$ se conoce con el nombre de *potencial vectorial* del campo \mathbf{F} . Ahora bien, el campo solenoidal, \mathbf{F} , no queda unívocamente determinado a partir de su potencial vectorial. Existe una arbitrariedad de un campo escalar, llamado *de calibre* $\chi = \chi(x, y, z)$ (gauge en inglés) de forma tal que

$$\mathbf{a}' = \mathbf{a} + \nabla\chi(x, y, z) \Rightarrow \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{a}' = \nabla \times (\mathbf{a} + \nabla\chi) = \nabla \times \mathbf{a} + \nabla \times (\nabla\chi) = \nabla \times \mathbf{a}$$

de forma que varios potenciales vectoriales \mathbf{a}' y \mathbf{a} generan el mismo campo vectorial \mathbf{F} . Esta arbitrariedad nos permite particularizar el calibre según nos convenga. Existen varios calibres en el mercado, los cuales son utilizados según el problema físico al cual tratemos. Entre ellos podemos mencionar un par de ellos:

- **El calibre de Lorentz:**

Esta selección proviene de requerir que el campo de calibre satisfaga la ecuación de onda

$$\nabla^2 \chi(x, y, z, t) - a \frac{\partial^2 \chi(x, y, z, t)}{\partial t^2} = 0$$

donde a es una constante. Nótese que hemos supuesto que el campo de calibre puede depender del tiempo. El calibre del Lorentz se escoge porque (entre otras cosas) permite que la solución a la ecuación de onda para el potencial vectorial

$$\nabla^2 \mathbf{a}(x, y, z, t) - a \frac{\partial^2 \mathbf{a}(x, y, z, t)}{\partial t^2} = 0$$

quede unívocamente determinada.

- **El calibre de Coulomb, de radiación o transverso:**

La selección de este calibre impone que el potencial vectorial $\mathbf{a}(x, y, z, t)$ satisfaga la ecuación

$$\nabla \cdot \mathbf{a} = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{a}'(x, y, z, t) = \nabla \cdot (\mathbf{a}(x, y, z, t) + \nabla\chi(x, y, z, t)) = 0 \Rightarrow \nabla^2 \chi(x, y, z, t) = 0$$

El nombre de calibre de Coulomb, de radiación o transverso proviene de las consecuencias de su utilización en las ecuaciones de Maxwell.

Nótese que si el campo (y el calibre) es independiente del tiempo $\mathbf{a} = \mathbf{a}(x, y, z)$ ambos calibres coinciden.

5.13.3. Teorema de Green y Potenciales

Si el rotor y la divergencia de un campo vectorial \mathbf{F} , decente (continuo y continuamente diferenciable) están especificados en una región del espacio delimitada por una superficie cerrada S , y las componentes del campo normales a esa superficie $\hat{\mathbf{n}}_s \cdot \mathbf{F}$, también se conocen, entonces el Teorema de Green nos garantiza que ese campo \mathbf{F} que cumple con esas condiciones es único.

Esa demostración procede así. Supongamos que existe otro campo vectorial que cumple con las mismas condiciones que el campo \mathbf{F} . Esto es

$$\left. \begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{F} &= \nabla \cdot \mathbf{G} \\ \nabla \times \mathbf{F} &= \nabla \times \mathbf{G} \\ \hat{\mathbf{n}}_s \cdot \mathbf{F} &= \hat{\mathbf{n}}_s \cdot \mathbf{G} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \mathbf{H} = \mathbf{F} - \mathbf{G} \Rightarrow \begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{H} = 0 \\ \hat{\mathbf{n}}_s \cdot \mathbf{H} = 0 \end{cases}$$

como \mathbf{H} es irrotacional entonces

$$\nabla \times \mathbf{H} = 0 \Rightarrow \mathbf{H} = \nabla \phi(x, y, z) \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{H} = \nabla \cdot \nabla \phi(x, y, z) = 0$$

y el Teorema de Green nos garantiza que

$$\oint \phi \nabla \phi \cdot d\mathbf{S} = \iint_{\bar{S}} \phi (\nabla \phi \cdot \hat{\mathbf{n}}_s) d\bar{S} = \iiint_V [\phi (\nabla \cdot \nabla \phi) + \nabla \phi \cdot \nabla \phi] dV$$

con lo cual

$$\iint_{\bar{S}} \phi (\nabla \phi \cdot \hat{\mathbf{n}}_s) d\bar{S} = \iint_{\bar{S}} \phi (\mathbf{H} \cdot \hat{\mathbf{n}}_s) d\bar{S} = \iiint_V [\mathbf{H} \cdot \mathbf{H}] dV \Rightarrow \mathbf{H} = 0$$

de donde se deduce que $\mathbf{F} = \mathbf{G}$ es decir, que el campo \mathbf{F} es único.

5.13.4. Teorema de Helmholtz

El teorema de Helmholtz afirma que todo campo vectorial \mathbf{F} , continuo, y continuamente diferenciable (al menos a trozos) y, regular en infinito se puede expresar como una suma de dos “componentes”, una *longitudinal* o *irrotacional* \mathbf{F}_l , y otra *transversa* o *solenoidal* \mathbf{F}_t . Esto es

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_l + \mathbf{F}_t, \quad \text{con} \quad \begin{cases} \nabla \times \mathbf{F}_l = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{F}_t = 0 \end{cases}$$

En general dado que el campo \mathbf{F} puede ser discontinuo, tendremos que suponer que

$$\left. \begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{F} &= \rho(\mathbf{r}) \\ \nabla \times \mathbf{F} &= \mathbf{J}(\mathbf{r}) \end{aligned} \right\} \text{ y como } \mathbf{F} = \mathbf{F}_l + \mathbf{F}_t \Rightarrow \begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{F} = \nabla \cdot (\mathbf{F}_l + \mathbf{F}_t) = \nabla \cdot \mathbf{F}_l = \rho(\mathbf{r}) \\ \nabla \times \mathbf{F} = \nabla \times (\mathbf{F}_l + \mathbf{F}_t) = \nabla \times \mathbf{F}_t = \mathbf{J}(\mathbf{r}) \end{cases}$$

dado que $\nabla \cdot (\circ)$ y $\nabla \times (\circ)$ son lineales. Esta separación del campo vectorial $\mathbf{F} = \mathbf{F}_l + \mathbf{F}_t$ es completamente general y siempre puede hacerse para cualquier campo vectorial.

Supondremos además, que la solución a la ecuación de Poisson $\nabla^2 \phi(x, y, z) = -\rho(x, y, z)$ existe y es única⁷.

⁷Esta suposición es indispensable. Las condiciones sobre el potencial $\phi(x, y, z)$ que la implican serán consideradas en otros cursos de Métodos Matemáticos. En este curso, supondremos que existe y es única.

Tendremos que

$$\nabla \times \mathbf{F}_l = 0 \Rightarrow \mathbf{F}_l = -\nabla \phi(x, y, z) \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F}_l = -\nabla^2 \phi(x, y, z) = \rho(\mathbf{r})$$

y la solución existe y es única. Es decir, podemos expresar de manera unívoca al campo vectorial \mathbf{F} (a través de su “componente” longitudinal \mathbf{F}_l) en términos de un campo escalar (a función potencial) $\phi(x, y, z)$. Por otra parte

$$\nabla \cdot \mathbf{F}_t = 0 \Rightarrow \mathbf{F}_t = \nabla \times \mathbf{a} \Rightarrow \nabla \times \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F}_t = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{a}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{a}) - \nabla^2 \mathbf{a} = \mathbf{J}(\mathbf{r})$$

La cual al seleccionar el calibre de Coulomb $\nabla \cdot \mathbf{a} = 0$ se convierte en

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{a}) = \nabla^2 \mathbf{a} = \partial^i \partial_i \mathbf{a} = -\mathbf{J}(\mathbf{r}) \Rightarrow \partial^i \partial_i a^k = -J^k(\mathbf{r}) \Leftrightarrow \begin{cases} \nabla^2 a_x = -J_x(\mathbf{r}) \\ \nabla^2 a_y = -J_y(\mathbf{r}) \\ \nabla^2 a_z = -J_z(\mathbf{r}) \end{cases}$$

Una vez más nos topamos con la solución a la ecuación de Poisson, esta vez para cada componente. Esto se cumple siempre, porque hemos supuesto que la solución para la ecuación de Poisson existe y es única.

Un corolario del Teorema de Helmholtz que un campo vectorial queda unívocamente determinado si conocemos su rotor y su divergencia.

5.14. Algunos ejemplos resueltos

- Hallar las componentes cartesianas del vector que, en coordenadas cilíndricas, tiene las siguiente componentes $(1, -1, 3)$

Solución: Ese vector en coordenadas cilíndricas se puede escribir como: $\mathbf{V} = \hat{\mathbf{u}}_r - \hat{\mathbf{u}}_\varphi + 3\hat{\mathbf{u}}_z$.

En general, las componentes de los vectores transforman como

$$\tilde{a}^i = \frac{\partial \tilde{x}^i(x^m)}{\partial x^k} a^k \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \tilde{a}^1 = \frac{\partial \tilde{x}^1(x^m)}{\partial x^k} a^k \\ \tilde{a}^2 = \frac{\partial \tilde{x}^2(x^m)}{\partial x^k} a^k \\ \tilde{a}^3 = \frac{\partial \tilde{x}^3(x^m)}{\partial x^k} a^k \end{array} \right\} \text{ con } \left\{ \begin{array}{l} \tilde{x}^1 = x \\ \tilde{x}^2 = y \\ \tilde{x}^3 = z \end{array} \right\} \text{ y } \left\{ \begin{array}{l} x^1 = r \\ x^2 = \varphi \\ x^3 = z \end{array} \right\}$$

y la ley de transformación entre coordenadas cartesianas y coordenadas cilíndricas es

$$x = x(r, \varphi) = r \cos(\varphi); \quad y = y(r, \varphi) = r \sin(\varphi) \quad \text{y} \quad z = z$$

con lo cual es fácil identificar

$$\begin{aligned} \frac{\partial x(r, \varphi)}{\partial r} &= \cos(\varphi) & \frac{\partial x(r, \varphi)}{\partial \varphi} &= -r \sin(\varphi) & \frac{\partial x(r, \varphi)}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial y(r, \varphi)}{\partial r} &= \sin(\varphi) & \frac{\partial y(r, \varphi)}{\partial \varphi} &= r \cos(\varphi) & \frac{\partial y(r, \varphi)}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial z}{\partial r} &= 0 & \frac{\partial z}{\partial \varphi} &= 0 & \frac{\partial z}{\partial z} &= 1 \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\tilde{a}^1 = \frac{\partial \tilde{x}^1(x^m)}{\partial x^k} a^k = \frac{\partial \tilde{x}^1(x^m)}{\partial x^1} a^1 + \frac{\partial \tilde{x}^1(x^m)}{\partial x^2} a^2 + \frac{\partial \tilde{x}^1(x^m)}{\partial x^3} a^3$$

$$\tilde{a}^1 = \frac{\partial x(r, \varphi)}{\partial r} (1) + \frac{\partial x(r, \varphi)}{\partial \varphi} (-1) = \cos(\varphi) + r \sin(\varphi) = \cos(-1) + 1 \sin(-1) = -0,30117$$

del mismo modo

$$\tilde{a}^2 = \frac{\partial y(r, \varphi)}{\partial r} (1) + \frac{\partial y(r, \varphi)}{\partial \varphi} (-1) = \sin(\varphi) - r \cos(\varphi) = \sin(-1) - (1) \cos(1) = -1,3818$$

$$\tilde{a}^3 = 3$$

con lo cual $\vec{V} = \hat{\mathbf{u}}_r - \hat{\mathbf{u}}_\varphi + 3\hat{\mathbf{u}}_z = -0,30117 \mathbf{i} - 1,3818 \mathbf{j} + 3 \mathbf{k}$.

- Dados T_j^i , a^i y $b^i \in \mathfrak{E}^3$ con

$$T_j^i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

- a) Suponga que T_j^i , \mathbf{a} y \mathbf{b} están expresados en coordenadas cartesianas, calcule: $A_{ij}a^i b^j$, $S_{ij}a^i a^j$ y $A_{ij}b^i b^j$. Donde S_{ij} y A_{kl} son, respectivamente, las partes simétrica y antisimétrica del tensor T_j^i .

Solución: La métrica en coordenadas cartesianas viene dada por

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Tendremos que:

$$S_{ij} = \frac{1}{2}(T_{ij} + T_{ji}) = \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 3 & 8 & 2 \\ 6 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

Nótese que la expresión matricial para $T_{ij} \equiv g_{ik}T_j^k$ es la misma que para T_j^i debido a la forma de la métrica en este espacio. Del mismo modo

$$A_{ij} = \frac{1}{2}(T_{ij} - T_{ji}) = \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

por lo tanto

$$a^i A_{ij} b^j = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 & 2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} = -\frac{87}{2}$$

$$a^i S_{ij} a^j = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 & 2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 3 & 8 & 2 \\ 6 & 2 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} = 1$$

$$b^i A_{ij} b^j = 0$$

- b) Suponga ahora que esos mismos T_j^i , \mathbf{a} y \mathbf{b} están expresados en coordenadas cilíndricas.

- 1) Encuentre la expresión para \mathbf{b} en coordenadas esféricas.

Solución: Al expresar \mathbf{b} en cilíndricas tendremos que $\mathbf{b} = -2 \hat{\mathbf{u}}_\rho + 5 \hat{\mathbf{u}}_\varphi + 4 \hat{\mathbf{u}}_z$ con lo cual para expresar \mathbf{b} en esféricas podemos proceder de dos formas.

La primera forma es transformando las componentes al conocer como transforman las coordenadas. Es decir conociendo $x^i = x^i(\tilde{x}^m)$ y $\tilde{x}^j = \tilde{x}^j(x^m)$ expresar $\tilde{b}^i = \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^k} b^k$. Dado que

$$x(\rho, \tilde{\varphi}) = \rho \cos(\tilde{\varphi}) = x(r, \varphi, \theta) = r \cos(\varphi) \sin(\theta) \Rightarrow \begin{cases} \rho = r \sin(\theta) \\ \tilde{\varphi} = \varphi \end{cases} \quad y \quad z = r \cos(\theta)$$

equivalentemente,

$$r = \sqrt{\rho^2 + z^2}; \quad \theta = \arctan\left(\frac{\rho}{z}\right); \quad \tilde{\varphi} = \varphi$$

por lo tanto

$$\tilde{b}^i = \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^k} b^k = \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{x}^1}{\partial x^1} & \frac{\partial \tilde{x}^1}{\partial x^2} & \frac{\partial \tilde{x}^1}{\partial x^3} \\ \frac{\partial \tilde{x}^2}{\partial x^1} & \frac{\partial \tilde{x}^2}{\partial x^2} & \frac{\partial \tilde{x}^2}{\partial x^3} \\ \frac{\partial \tilde{x}^3}{\partial x^1} & \frac{\partial \tilde{x}^3}{\partial x^2} & \frac{\partial \tilde{x}^3}{\partial x^3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial \rho} & \frac{\partial r}{\partial \varphi} & \frac{\partial r}{\partial z} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} & \frac{\partial \varphi}{\partial \varphi} & \frac{\partial \varphi}{\partial z} \\ \frac{\partial \theta}{\partial \rho} & \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} & \frac{\partial \theta}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{b}^i = \begin{pmatrix} \frac{\partial \sqrt{\rho^2+z^2}}{\partial \rho} & \frac{\partial \sqrt{\rho^2+z^2}}{\partial \varphi} & \frac{\partial \sqrt{\rho^2+z^2}}{\partial z} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} & \frac{\partial \varphi}{\partial \varphi} & \frac{\partial \varphi}{\partial z} \\ \frac{\partial \arctan(\frac{\rho}{z})}{\partial \rho} & \frac{\partial \arctan(\frac{\rho}{z})}{\partial \varphi} & \frac{\partial \arctan(\frac{\rho}{z})}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2+z^2}} & 0 & \frac{z}{\sqrt{\rho^2+z^2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{z}{\rho^2+z^2} & 0 & \frac{-\rho}{\rho^2+z^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

por lo tanto en esféricas

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -2 \operatorname{sen}(\theta) + 4 \operatorname{cos}(\theta) \\ 5 \\ -\frac{2 \operatorname{cos}(\theta)}{r} - \frac{4 \operatorname{sen}(\theta)}{r} \end{pmatrix} = (-2 \operatorname{sen}(\theta) + 4 \operatorname{cos}(\theta)) \hat{\mathbf{u}}_r + 5 \hat{\mathbf{u}}_\varphi - \left(\frac{2 \operatorname{cos}(\theta)}{r} + \frac{4 \operatorname{sen}(\theta)}{r} \right) \hat{\mathbf{u}}_\theta$$

La otra forma es expresar la base ortonormal cilíndrica en términos de la base ortonormal esférica. Otra vez, utilizamos la base cartesiana como intermediaria. Esto es:

$$\left. \begin{aligned} \hat{\mathbf{u}}_\rho &= \operatorname{cos}(\tilde{\varphi}) \mathbf{i} + \operatorname{sen}(\tilde{\varphi}) \mathbf{j}; \\ \hat{\mathbf{u}}_{\tilde{\varphi}} &= -\operatorname{sen}(\tilde{\varphi}) \mathbf{i} + \operatorname{cos}(\tilde{\varphi}) \mathbf{j} \\ \hat{\mathbf{u}}_z &= \mathbf{k} \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{i} = \operatorname{cos}(\tilde{\varphi}) \hat{\mathbf{u}}_\rho - \operatorname{sen}(\tilde{\varphi}) \hat{\mathbf{u}}_{\tilde{\varphi}} \\ \mathbf{j} = \operatorname{sen}(\tilde{\varphi}) \hat{\mathbf{u}}_\rho + \operatorname{cos}(\tilde{\varphi}) \hat{\mathbf{u}}_{\tilde{\varphi}} \\ \mathbf{k} = \hat{\mathbf{u}}_z \end{cases}$$

y parecido en esféricas, donde

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{u}}_r &= \operatorname{cos}(\varphi) \operatorname{sen}(\theta) \mathbf{i} + \operatorname{sen}(\varphi) \operatorname{sen}(\theta) \mathbf{j} + \operatorname{cos}(\theta) \hat{\mathbf{k}} \\ \hat{\mathbf{u}}_\varphi &= -\operatorname{sen}(\varphi) \mathbf{i} + \operatorname{cos}(\varphi) \mathbf{j} \\ \hat{\mathbf{u}}_\theta &= \operatorname{cos}(\varphi) \operatorname{cos}(\theta) \mathbf{i} + \operatorname{sen}(\varphi) \operatorname{cos}(\theta) \mathbf{j} - \operatorname{sen}(\theta) \mathbf{k} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \mathbf{i} &= \operatorname{cos}(\varphi) \operatorname{sen}(\theta) \hat{\mathbf{u}}_r + \operatorname{cos}(\varphi) \operatorname{cos}(\theta) \hat{\mathbf{u}}_\theta - \operatorname{sen}(\varphi) \hat{\mathbf{u}}_\varphi \\ \mathbf{j} &= \operatorname{sen}(\varphi) \operatorname{sen}(\theta) \hat{\mathbf{u}}_r + \operatorname{sen}(\varphi) \operatorname{cos}(\theta) \hat{\mathbf{u}}_\theta + \operatorname{cos}(\varphi) \hat{\mathbf{u}}_\varphi \\ \mathbf{k} &= \operatorname{cos}(\theta) \hat{\mathbf{u}}_r - \operatorname{sen}(\theta) \hat{\mathbf{u}}_\theta \end{aligned}$$

con lo cual

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{u}}_\rho &= \operatorname{cos}(\varphi) (\operatorname{cos}(\varphi) \operatorname{sen}(\theta) \hat{\mathbf{u}}_r + \operatorname{cos}(\varphi) \operatorname{cos}(\theta) \hat{\mathbf{u}}_\theta - \operatorname{sen}(\varphi) \hat{\mathbf{u}}_\varphi) \\ &+ \operatorname{sen}(\varphi) (\operatorname{sen}(\varphi) \operatorname{sen}(\theta) \hat{\mathbf{u}}_r + \operatorname{sen}(\varphi) \operatorname{cos}(\theta) \hat{\mathbf{u}}_\theta + \operatorname{cos}(\varphi) \hat{\mathbf{u}}_\varphi) \\ \hat{\mathbf{u}}_\rho &= \operatorname{sen}(\theta) \hat{\mathbf{u}}_r + \operatorname{cos}(\theta) \hat{\mathbf{u}}_\theta \\ \hat{\mathbf{u}}_\varphi &= \hat{\mathbf{u}}_\varphi \\ \hat{\mathbf{u}}_z &= \operatorname{cos}(\theta) \hat{\mathbf{u}}_r - \operatorname{sen}(\theta) \hat{\mathbf{u}}_\theta \end{aligned}$$

entonces

$$\mathbf{b} = -2 \hat{\mathbf{u}}_\rho + 5 \hat{\mathbf{u}}_\varphi + 4 \hat{\mathbf{u}}_z = -2 (\operatorname{sen}(\theta) \hat{\mathbf{u}}_r + \operatorname{cos}(\theta) \hat{\mathbf{u}}_\theta) + 5 (\hat{\mathbf{u}}_\varphi) + 4 (\operatorname{cos}(\theta) \hat{\mathbf{u}}_r - \operatorname{sen}(\theta) \hat{\mathbf{u}}_\theta)$$

Finalmente

$$\mathbf{b} = (-2 \operatorname{sen}(\theta) + 4 \operatorname{cos}(\theta)) \hat{\mathbf{u}}_r + 5 \hat{\mathbf{u}}_\varphi - (2 \operatorname{cos}(\theta) + 4 \operatorname{sen}(\theta)) \hat{\mathbf{u}}_\theta.$$

2) Encuentre la expresión para $A_{ij}a^ib^j$ en coordenadas esféricas.

Solución: La expresión para $a^iA_{ij}b^j = -\frac{87}{2}$ será la misma que el caso anterior porque $a^iA_{ij}b^j$ es un escalar bajo transformaciones de coordenadas, lo que significa que es invariante y valdrá lo mismo en todos los sistemas de coordenadas.

Recuerde que

$$\text{Cilíndricas : } \begin{cases} x = x(\rho, \varphi) = \rho \cos(\varphi) \\ y = y(\rho, \varphi) = \rho \sin(\varphi) \\ z = z \end{cases} \quad \text{Esféricas : } \begin{cases} x = x(r, \varphi, \theta) = r \cos(\varphi) \sin(\theta) \\ y = y(r, \varphi, \theta) = r \sin(\varphi) \sin(\theta) \\ z = z(r, \varphi, \theta) = r \cos(\theta) \end{cases}$$

El tensor métrico en coordenadas cilíndricas es

$$g_{11} = g_{\rho\rho} = 1; \quad g_{22} = g_{\varphi\varphi} = \rho^2; \quad g_{33} = g_{zz} = 1.$$

mientras que en coordenadas esféricas es

$$g_{11} = g_{rr} = 1; \quad g_{22} = g_{\varphi\varphi} = r^2 \sin^2(\theta); \quad g_{33} = g_{\theta\theta} = r^2.$$

3. Dado el sistema de coordenadas parabólicas

$$x = \xi\eta \cos(\varphi); \quad y = \xi\eta \sin(\varphi); \quad z = \frac{1}{2}(\eta^2 - \xi^2)$$

Expresé el diferencial de volumen $dv = dx dy dz$ en estas coordenadas.

Solución: Hay varias maneras de resolver este problema. La más intuitiva es que, dado que las coordenadas parabólicas son un sistema de coordenadas ortogonales entonces multiplicar largo, por ancho, por alto con las longitudes de arco en cada una de las direcciones ortogonales. Esto es

$$ds^2 = g_{nu}dq^n dq^u = g_{11}(dq^1)^2 + g_{22}(dq^2)^2 + g_{33}(dq^3)^2 \Rightarrow \begin{cases} ds_{\rightarrow 1}^2 = g_{11}(dq^1)^2 \\ ds_{\rightarrow 2}^2 = g_{22}(dq^2)^2 \\ ds_{\rightarrow 3}^2 = g_{33}(dq^3)^2 \end{cases}$$

por consiguiente

$$dv = (ds_{\rightarrow 1})(ds_{\rightarrow 2})(ds_{\rightarrow 3}) = \sqrt{g_{11}}dq^1 \sqrt{g_{22}}dq^2 \sqrt{g_{33}}dq^3 = h_1 h_2 h_3 dq^1 dq^2 dq^3$$

con

$$h_1 = \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^1} \right\| = \sqrt{g_{11}} = \sqrt{\left(\frac{\partial x(q^1, q^2, q^3)}{\partial q^1} \right)^2 + \left(\frac{\partial y(q^1, q^2, q^3)}{\partial q^1} \right)^2 + \left(\frac{\partial z(q^1, q^2, q^3)}{\partial q^1} \right)^2}$$

$$h_2 = \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^2} \right\| = \sqrt{g_{22}} = \sqrt{\left(\frac{\partial x(q^1, q^2, q^3)}{\partial q^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial y(q^1, q^2, q^3)}{\partial q^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial z(q^1, q^2, q^3)}{\partial q^2} \right)^2}$$

$$h_3 = \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^3} \right\| = \sqrt{g_{33}} = \sqrt{\left(\frac{\partial x(q^1, q^2, q^3)}{\partial q^3} \right)^2 + \left(\frac{\partial y(q^1, q^2, q^3)}{\partial q^3} \right)^2 + \left(\frac{\partial z(q^1, q^2, q^3)}{\partial q^3} \right)^2}$$

por lo cual, dado que $\mathbf{r} = x(\eta, \xi, \varphi) \mathbf{i} + y(\eta, \xi, \varphi) \mathbf{j} + z(\eta, \xi) \mathbf{k}$, entonces

$$\begin{aligned} h_1 &= \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^1} \right\| = \sqrt{g_{11}} = \sqrt{(\eta \cos(\varphi))^2 + (\eta \operatorname{sen}(\varphi))^2 + (\xi)^2} = \sqrt{(\eta^2 + \xi^2)} \\ h_2 &= \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^2} \right\| = \sqrt{g_{22}} = \sqrt{(\xi \cos \varphi)^2 + (\xi \operatorname{sen}(\varphi))^2 + (-\eta)^2} = \sqrt{(\eta^2 + \xi^2)} \\ h_3 &= \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^3} \right\| = \sqrt{g_{33}} = \sqrt{(-\xi \eta \operatorname{sen}(\varphi))^2 + (\xi \eta \cos(\varphi))^2 + (0)^2} = \xi \eta \end{aligned}$$

y finalmente

$$dv = h_1 h_2 h_3 d\xi d\eta d\varphi = \xi \eta (\eta^2 + \xi^2) d\xi d\eta d\varphi.$$

La otra forma de resolverlo, también intuitiva es hacer el producto mixto de los tres vectores ortogonales base sin normalizar. Esto es

$$dv = \left\| \left(dq^1 \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^1} \right) \bullet \left(dq^2 \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^2} \times dq^3 \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^3} \right) \right\| = dq^1 dq^2 dq^3 \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^1} \bullet \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^2} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^3} \right) \right\|$$

entonces, en general

$$\begin{aligned} dv &= dq^1 dq^2 dq^3 \left[\det \begin{vmatrix} \frac{\partial x(q^1, q^2, q^3)}{\partial q^1} & \frac{\partial y(q^1, q^2, q^3)}{\partial q^1} & \frac{\partial z(q^1, q^2, q^3)}{\partial q^1} \\ \frac{\partial x(q^1, q^2, q^3)}{\partial q^2} & \frac{\partial y(q^1, q^2, q^3)}{\partial q^2} & \frac{\partial z(q^1, q^2, q^3)}{\partial q^2} \\ \frac{\partial x(q^1, q^2, q^3)}{\partial q^3} & \frac{\partial y(q^1, q^2, q^3)}{\partial q^3} & \frac{\partial z(q^1, q^2, q^3)}{\partial q^3} \end{vmatrix} \right] \\ &= dq^1 dq^2 dq^3 \det |J(x(q^1, q^2, q^3), y(q^1, q^2, q^3), z(q^1, q^2, q^3))| \end{aligned}$$

donde $J(x(q^1, q^2, q^3), y(q^1, q^2, q^3), z(q^1, q^2, q^3))$ es la matriz Jacobiana de la transformación.

Entonces

$$dv = d\xi d\eta d\varphi \left(\det \begin{vmatrix} \eta \cos(\varphi) & \eta \operatorname{sen}(\varphi) & \xi \\ \xi \cos(\varphi) & \xi \operatorname{sen}(\varphi) & -\eta \\ -\xi \eta \operatorname{sen}(\varphi) & \xi \eta \cos(\varphi) & 0 \end{vmatrix} \right) = \xi \eta (\eta^2 + \xi^2) d\xi d\eta d\varphi$$

En general, el diferencial del volumen viene expresado como un producto mixto de la base ortonormal $\{|q_1\rangle, |q_2\rangle, |q_3\rangle\}$

$$dv = \|(dq^1 |q_1\rangle) \bullet (dq^2 |q_2\rangle \times dq^3 |q_3\rangle)\| = dq^1 dq^2 dq^3 \| |q_1\rangle \bullet (|q_2\rangle \times |q_3\rangle) \|$$

$$dv = dq_n \langle q^n | (\epsilon^{123} dq_2 dq_3 |q_1\rangle) = g_{nu} dq^u g_{22} dq^2 g_{33} dq^3 \underbrace{\langle q^n | q_1 \rangle}_{\delta_1^n} = g_{11} dq^1 g_{22} dq^2 g_{33} dq^3$$

4. Dado un sistema genérico de coordenadas oblicuas

$$|\tilde{e}_1\rangle = a|i\rangle + b|j\rangle; \quad |\tilde{e}_2\rangle = c|i\rangle + d|j\rangle$$

a) Encuentre la expresión para la métrica g_{ij} en estas coordenadas.

Solución: Para una base genérica, $\{|x_j\rangle\}$ la métrica viene definida por

$$g_{ij} \equiv g_{ji} = \mathbf{g} [|x_i\rangle, |x_j\rangle] \equiv \langle x_i | x_j \rangle \equiv \langle x_j | x_i \rangle$$

$$\langle g_{ij} \rangle = \begin{pmatrix} \langle x_1 | x_1 \rangle & \langle x_1 | x_2 \rangle \\ \langle x_2 | x_1 \rangle & \langle x_2 | x_3 \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & ac + bd \\ ac + bd & c^2 + d^2 \end{pmatrix}$$

b) Encuentre la expresión para un vector genérico $|v\rangle = v_x |i\rangle + v_y |j\rangle$ en estas coordenadas.

Solución:

$$\left. \begin{aligned} |\tilde{e}_1\rangle &= a|i\rangle + b|j\rangle \\ |\tilde{e}_2\rangle &= c|i\rangle + d|j\rangle \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \begin{cases} |i\rangle = \frac{1}{\Delta} (d|\tilde{e}_1\rangle - b|\tilde{e}_2\rangle) \\ |j\rangle = \frac{1}{\Delta} (c|\tilde{e}_1\rangle - a|\tilde{e}_2\rangle) \end{cases}$$

con $\Delta = bc - ad$ por lo cual

$$|v\rangle = v_x |i\rangle + v_y |j\rangle = \frac{v_x}{\Delta} (d|\tilde{e}_1\rangle - b|\tilde{e}_2\rangle) + \frac{v_y}{\Delta} (c|\tilde{e}_1\rangle - a|\tilde{e}_2\rangle)$$

$$= \left(d \frac{v_x}{\Delta} + c \frac{v_y}{\Delta} \right) |\tilde{e}_1\rangle - \left(b \frac{v_x}{\Delta} + a \frac{v_y}{\Delta} \right) |\tilde{e}_2\rangle$$

c) Suponga ahora una base y un tensor concreto

$$|\tilde{e}_1\rangle = |i\rangle; \quad |\tilde{e}_2\rangle = \frac{\sqrt{2}}{2} |i\rangle + \frac{\sqrt{2}}{2} |j\rangle; \quad T_j^i = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Encuentre la expresión matricial para el tensor \tilde{T}_{ij} ⁸

Solución: En general,

$$\tilde{T}_{ij} = g_{ik} \tilde{T}_j^k = g_{ik} \frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^m} T_n^m \frac{\partial x^n}{\partial \tilde{x}^j}$$

Identificando

$$\tilde{v}_x = \tilde{v}^1 = \frac{\partial \tilde{x}^1}{\partial x^j} v^j = \frac{\partial \tilde{x}^1}{\partial x^1} v^1 + \frac{\partial \tilde{x}^1}{\partial x^2} v^2 = \underbrace{\frac{d}{\Delta}}_{\frac{\partial \tilde{x}^1}{\partial x^1}} v_x + \underbrace{\frac{c}{\Delta}}_{\frac{\partial \tilde{x}^1}{\partial x^2}} v_y$$

$$\tilde{v}_y = \tilde{v}^2 = \frac{\partial \tilde{x}^2}{\partial x^j} v^j = \frac{\partial \tilde{x}^2}{\partial x^1} v^1 + \frac{\partial \tilde{x}^2}{\partial x^2} v^2 = \underbrace{\frac{-b}{\Delta}}_{\frac{\partial \tilde{x}^2}{\partial x^1}} v_x + \underbrace{\frac{-a}{\Delta}}_{\frac{\partial \tilde{x}^2}{\partial x^2}} v_y$$

como

$$\left. \begin{aligned} a &= 1 \\ b &= 0 \\ c &= \frac{\sqrt{2}}{2} \\ d &= \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} g_{ik} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 \end{pmatrix}, & \frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^m} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \frac{\partial x^n}{\partial \tilde{x}^j} = \left(\frac{\partial \tilde{x}^n}{\partial x^j} \right)^{-1} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

⁸**Ayuda:** dada una matriz genérica $A_j^i = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, su inversa será $\begin{pmatrix} \frac{D}{AD-BC} & -\frac{B}{AD-BC} \\ -\frac{C}{AD-BC} & \frac{A}{AD-BC} \end{pmatrix}$.

Finalmente:

$$\tilde{T}_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 - \frac{1}{2}\sqrt{2} & -1 + \frac{3}{2}\sqrt{2} \\ \frac{5}{2}\sqrt{2} - 1 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} + 3 \end{pmatrix}.$$

5. Definimos una transformación ortogonal (una transformación de un sistema de coordenadas ortogonales a otro ortogonal también) si se cumple

$$\tilde{x}^i = \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^k} x^k + a^i; \quad x^i = \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^k} x^k + \tilde{a}^i; \quad \text{donde } \det \left(\frac{\partial x^k}{\partial \tilde{x}^l} \right) = \det \left(\frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^i} \right) = \pm 1$$

con

$$\frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^l} = \frac{\partial x^k}{\partial \tilde{x}^i} \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^l} = \delta_l^k$$

- a) Muestre que las transformaciones de Galileo en 2 dimensiones

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}^1 \\ \tilde{x}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} V_{oo}^1 t \\ V_{oo}^2 t \end{pmatrix}$$

son transformaciones ortogonales. Note que V_{oo}^1 , y V_{oo}^2 son las velocidades en la dirección 1 y 2, respectivamente, del observador \tilde{O} con coordenadas \tilde{x}^i respecto al observador O con coordenadas x^i , mientras t es el tiempo medido por ambos observadores.

Solución: Una vez más, identificando

$$\tilde{x}^i = \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^k} x^k + a^i \Rightarrow \begin{pmatrix} \tilde{x}^1 \\ \tilde{x}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{x}^1}{\partial x^2} & \frac{\partial \tilde{x}^1}{\partial x^1} \\ \frac{\partial \tilde{x}^2}{\partial x^2} & \frac{\partial \tilde{x}^2}{\partial x^1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \end{pmatrix}$$

con lo cual

$$\begin{matrix} \frac{\partial \tilde{x}^1}{\partial x^2} = \cos(\theta) & \frac{\partial \tilde{x}^1}{\partial x^1} = -\text{sen}(\theta) & a^1 = V_{oo}^1 t \\ \frac{\partial \tilde{x}^2}{\partial x^2} = \text{sen}(\theta) & \frac{\partial \tilde{x}^2}{\partial x^1} = \cos(\theta) & a^2 = V_{oo}^2 t \end{matrix} \quad \det \begin{vmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{vmatrix} = \cos^2 \theta + \text{sen}^2 \theta = 1$$

6. Las transformaciones de Galileo nos permiten relacionar las posiciones de una partícula respecto a dos observadores los cuales se encuentran en movimiento, uno respecto al otro. Considere entonces el movimiento de una partícula visto desde el sistema de coordenadas x^i tal que

$$x = V_{0x}t; \quad y = V_{0y}t - g \frac{t^2}{2}$$

Expresé el vector velocidad \mathbf{V} de esta partícula visto del sistema de coordenadas \tilde{x}^k .

Solución: Tendremos que

$$\left. \begin{matrix} x^1 = x = V_{0x}t \\ x^2 = y = V_{0y}t - g \frac{t^2}{2} \end{matrix} \right\} \Rightarrow \begin{matrix} V^1 = V_x = \frac{dx^1}{dt} = V_{0x} \\ V^2 = V_y = \frac{dx^2}{dt} = V_{0y} - gt \end{matrix}$$

por lo cual

$$\begin{pmatrix} \tilde{V}^1 \\ \tilde{V}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V^1 \\ V^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} V_{oo}^1 t \\ V_{oo}^2 t \end{pmatrix}$$

Finalmente

$$\mathbf{V} = \tilde{V}^1 \mathbf{i} + \tilde{V}^2 \mathbf{j} \quad \text{con} \quad \begin{cases} \tilde{V}^1 = V^1 \cos(\theta) - V^2 \sin(\theta) + V_{oo}^1 t \\ \tilde{V}^2 = V^1 \sin(\theta) + V^2 \cos(\theta) + V_{oo}^2 t \end{cases}$$

7. Consideremos el siguiente par de tensores provenientes de la teoría de elasticidad

$$u_{ik} = \frac{1}{2} (\partial_k u_i + \partial_i u_k) \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x^k} + \frac{\partial u_k}{\partial x^i} \right); \quad (u_k^i)^0 = u_k^i - \frac{1}{3} u_m^m \delta_k^i;$$

y construyamos el tensor de esfuerzos como

$$p_j^i = 2\lambda (u_j^i)^0 + K u_l^l \delta_j^i$$

Calcule la energía libre para el medio elástico, definida como $F = \frac{1}{2} p_j^i u_i^j$.

Solución: Tenemos que

$$p_j^i = 2\lambda (u_j^i)^0 + K u_l^l \delta_j^i = 2\lambda \left(u_j^i - \frac{1}{3} u_m^m \delta_j^i \right) + K u_l^l \delta_j^i = 2\lambda u_j^i + u_l^l \delta_j^i \left(K - \frac{2\lambda}{3} \right)$$

donde: $u_m^m = \frac{1}{2} (\partial^m u_m + \partial_m u^m) = \partial^m u_m$, con lo cual

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{2} p_j^i u_i^j = \frac{1}{2} \left(2\lambda u_j^i + u_l^l \delta_j^i \left(K - \frac{2\lambda}{3} \right) \right) u_i^j = \left(\lambda u_j^i u_i^j + u_l^l \delta_j^i u_i^j \left(\frac{1}{2} K - \frac{\lambda}{3} \right) \right) \\ &= \lambda (u_1^i u_i^1 + u_2^i u_i^2 + u_3^i u_i^3) + \left(\frac{1}{2} K - \frac{\lambda}{3} \right) (u_l^l)^2 \\ &= \lambda ((u_1^1 u_1^1 + u_1^2 u_2^1 + u_1^3 u_3^1) + (u_2^1 u_1^2 + u_2^2 u_2^2 + u_2^3 u_3^2) + (u_3^1 u_1^3 + u_3^2 u_2^3 + u_3^3 u_3^3)) + \left(\frac{1}{2} K - \frac{\lambda}{3} \right) (u_l^l)^2 \\ &= \lambda ((u_1^1)^2 + (u_2^2)^2 + (u_3^3)^2 + 2(u_2^1 u_1^2 + u_3^2 u_2^3 + u_1^3 u_3^1)) + \left(\frac{1}{2} K - \frac{\lambda}{3} \right) (u_l^l)^2 \\ &= \left(\frac{1}{2} K + \frac{2\lambda}{3} \right) (u_l^l)^2 + 2\lambda (u_2^1 u_1^2 + u_3^2 u_2^3 + u_1^3 u_3^1) \\ &= \left(\frac{1}{2} K + \frac{2\lambda}{3} \right) (\partial_x u_x + \partial_y u_y + \partial_z u_z)^2 + 2\lambda (\partial_x u_y \partial_y u_x + \partial_y u_z \partial_z u_y + \partial_z u_x \partial_x u_z). \end{aligned}$$

8. Considere ahora la siguiente transformación de coordenadas

$$\tilde{x}^\alpha = L_\beta^\alpha x^\beta + a^\alpha; \quad \text{con} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^k v_k}}; \quad \alpha, \beta = 0, 1, 2, 3; \quad i, j, k = 1, 2, 3$$

y

$$L_0^0 = \gamma, \quad L_0^i = L_i^0 = \gamma v^i, \quad L_j^i = L_i^j = \delta_j^i + v^i v_j \frac{(\gamma - 1)}{v^k v_k}$$

las L_β^α se denominan impulso (topboost) de Lorentz y donde las v^k son las componentes tridimensionales de la velocidad relativa entre los observadores \tilde{O} y O con coordenadas \tilde{x}^α y x^β , respectivamente. La coordenada x^0 representa el tiempo medido por el observador O mientras que las x^j representan las

coordenadas espaciales x, y, z para el mismo observador O con $i, j = 1, 2, 3$ respectivamente. Nótese que $0 \leq v^k v_k < 1$. Suponga, por facilidad, que el movimiento es en una dimensión: $\alpha, \beta = 0, 1$ y $i, j = 1$.

Esto implica

$$L_{\beta}^{\alpha} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} & \frac{v}{\sqrt{1-v^2}} \\ \frac{v}{\sqrt{1-v^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \tilde{x}^0 \\ \tilde{x}^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} & \frac{v}{\sqrt{1-v^2}} \\ \frac{v}{\sqrt{1-v^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{L}_{\beta}^{\alpha} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} & \frac{-v}{\sqrt{1-v^2}} \\ \frac{-v}{\sqrt{1-v^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} & \frac{-v}{\sqrt{1-v^2}} \\ \frac{-v}{\sqrt{1-v^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}^0 \\ \tilde{x}^1 \end{pmatrix}$$

a) Muestre que los tiempos se alargan cuando son medidos por observadores en movimiento.

Solución: Tenemos que $\Delta t = t_2 - t_1 = x_2^0 - x_1^0$ medido por el observador en reposo y equivalentemente $\Delta \tilde{t} = \tilde{t}_2 - \tilde{t}_1 = \tilde{x}_2^0 - \tilde{x}_1^0$ medido por el observador en movimiento.

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{t} = \tilde{t}_2 - \tilde{t}_1 = \tilde{x}_2^0 - \tilde{x}_1^0 &= (L_{\beta}^0 x_2^{\beta} + a^0) - (L_{\beta}^0 x_1^{\beta} + a^0) = L_{\beta}^0 x_2^{\beta} - L_{\beta}^0 x_1^{\beta} = L_{\beta}^0 (x_2^{\beta} - x_1^{\beta}) \\ &= L_0^0 (x_2^0 - x_1^0) + L_1^0 (x_2^1 - x_1^1) = \frac{(x_2^0 - x_1^0)}{\sqrt{1-v^2}} = \frac{\Delta t}{\sqrt{1-v^2}} \end{aligned}$$

Claramente

$$\lim_{v \rightarrow 1} \Delta \tilde{t} = \infty$$

Nótese que hemos supuesto que el reloj que marca el Δt y que está en reposo respecto al sistema x^{β} se encuentra en la misma posición espacial $x_2^0 = x_1^0$.

b) Muestre como las distancias se acortan cuando son medidas por observadores en movimiento.

Solución: Igualmente la distancia entre dos puntos espaciales será

$$l = x_2^1 - x_1^1 = (\tilde{L}_{\beta}^1 \tilde{x}_2^{\beta} + a^1) - (\tilde{L}_{\beta}^1 \tilde{x}_1^{\beta} + a^1) = \tilde{L}_{\beta}^1 (\tilde{x}_2^{\beta} - \tilde{x}_1^{\beta}) = \tilde{L}_0^1 (\tilde{x}_2^0 - \tilde{x}_1^0) + \tilde{L}_1^1 (\tilde{x}_2^1 - \tilde{x}_1^1)$$

Si suponemos ahora que la distancia en el sistema en movimiento \tilde{x}^{β} la medimos en el mismo tiempo, entonces $\tilde{x}_2^0 = \tilde{x}_1^0$ con lo cual

$$l = \tilde{L}_1^1 (\tilde{x}_2^1 - \tilde{x}_1^1) = \frac{(\tilde{x}_2^1 - \tilde{x}_1^1)}{\sqrt{1-v^2}} = \frac{\tilde{l}}{\sqrt{1-v^2}} \Rightarrow \tilde{l} = \sqrt{1-v^2} l \Rightarrow \lim_{v \rightarrow 1} \sqrt{1-v^2} l = 0$$

9. La fuerza de Lorentz $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$ para una partícula con carga q que se mueve con una velocidad \mathbf{v} en un campo eléctrico \mathbf{E} , y una inducción magnética \mathbf{B} . Muestre que

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{F} &= q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \\ \mathbf{E} &= -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{A} &= \mathbf{B} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \mathbf{F} = q \left[-\nabla\phi - \frac{d\mathbf{A}}{dt} + \nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}) \right]$$

Solución:

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) = q \left(-\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A}) \right)$$

Veamos

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A}) &= \epsilon_{jkl} v^k \epsilon^{lmn} \partial_m A_n \mathbf{e}^j = \epsilon_{jkl} \epsilon^{mnl} v^k \partial_m A_n \mathbf{e}^j = (\delta_j^m \delta_k^n - \delta_k^m \delta_j^n) v^k \partial_m A_n \mathbf{e}^j \\ &= (v^k \partial_j A_k - v^k \partial_k A_j) \mathbf{e}^j \end{aligned}$$

con lo cual

$$\begin{aligned} F^j &= q \left(-\partial^j \phi - \frac{\partial A^j}{\partial t} + v^k \partial^j A_k - v^k \partial_k A^j \right) = q \left(-\partial^j \phi - \frac{\partial A^j}{\partial t} - v^k \partial_k A^j + \partial^j (v^k A_k) - A_k (\partial^j v^k) \right) \\ F^j &= q \left(-\partial^j \phi - \frac{\partial A^j}{\partial t} - v^k \partial_k A^j + \partial^j (v^k A_k) \right) = q \left[-\nabla\phi - \frac{d\mathbf{A}}{dt} + \nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}) \right] \end{aligned}$$

ya que

$$\frac{dA^j}{dt} = \frac{\partial A^j}{\partial x^i} \frac{dx^i}{dt} + \frac{\partial A^j}{\partial t} = v^i \partial_i A^j + \frac{\partial A^j}{\partial t}; \quad \partial^j v^k = \frac{\partial v^k}{\partial x^j} = 0 \quad \text{y} \quad v^k = v^k(t).$$

10. Las fuerzas de mareas corresponden a la atracción de la luna sobre las partículas (el agua) en la superficie de la tierra ¿Cuál es el potencial que corresponde a las fuerzas de marea? Recuerde que la fuerza gravitacional que produce las mareas es

$$\mathbf{F} = G \frac{Mm}{r_{Mm}^3} \mathbf{r}$$

donde r_{Mm} es la distancia (fija) entre los centros Luna y Tierra, y \mathbf{r} es el radio vector del centro de la Luna a la partícula que se ve afectada.

Solución: Colocando la Tierra en el centro de coordenadas y la Luna en el eje z tendremos:

$$\mathbf{F} = G \frac{Mm}{r_{Mm}^3} \mathbf{r} = G \frac{Mm}{r_{Mm}^3} (-x\mathbf{i} - y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}) = -\nabla\phi$$

donde:

$$-G \frac{Mm}{r_{Mm}^3} x = -\frac{\partial\phi}{\partial x}, \quad -G \frac{Mm}{r_{Mm}^3} y = -\frac{\partial\phi}{\partial y}, \quad G \frac{Mm}{r_{Mm}^3} 2z = -\frac{\partial\phi}{\partial z}$$

integrando nos queda

$$\phi = G \frac{Mm}{r_{Mm}^3} \frac{x^2}{2} + \mathcal{G}(y, z) \Rightarrow -\frac{\partial\phi}{\partial y} = -\frac{\partial\mathcal{G}(y, z)}{\partial y} = -G \frac{Mm}{r_{Mm}^3} y \Rightarrow \mathcal{G}(y, z) = G \frac{Mm}{r_{Mm}^3} \frac{y^2}{2} + \mathcal{K}(z)$$

$$\phi = G \frac{Mm}{r_{Mm}^3} \frac{x^2}{2} + G \frac{Mm}{r_{Mm}^3} \frac{y^2}{2} + \mathcal{K}(z) \Rightarrow -\frac{\partial\phi}{\partial z} = \frac{\partial\mathcal{K}(z)}{\partial z} = G \frac{Mm}{r_{Mm}^3} 2z \Rightarrow \mathcal{K}(z) = -G \frac{Mm}{r_{Mm}^3} z^2$$

Por lo tanto:

$$\phi = G \frac{Mm}{r_{Mm}^3} \left[\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} - z^2 \right].$$

11. La Ley de Ampere se puede derivar de la ecuación de Maxwell $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$ donde \mathbf{H} es el campo magnético y \mathbf{J} la densidad de corriente. Si el campo eléctrico es nulo ($\mathbf{E} = 0$) muestre que

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = I$$

con I la corriente neta que atraviesa la circulación del campo magnético.

Solución:

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = I$$

12. Considere el siguiente campo de fuerza:

$$\mathbf{F} = (x^2 + y^2 + z^2)^n (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) .$$

- a) Calcule en trabajo $\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ a lo largo de un arco de circunferencia unitaria, colocado en el plano xy : primero girando en sentido antihorario de $0 \rightarrow \pi$ y luego en sentido horario $0 \rightarrow -\pi$ ¿Qué puede concluir del campo de fuerzas?

Solución: Se puede resolver de varias maneras.

- La forma elegante es expresando el campo de fuerza \mathbf{F} en coordenadas esféricas. Esto es

$$\mathbf{F} = (x^2 + y^2 + z^2)^n (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) \equiv r^{2n} \mathbf{r} \equiv r^{2n+1} \hat{\mathbf{u}}_r$$

luego recordamos que $d\mathbf{r}$ es siempre es tangente a la trayectoria, y en este caso la trayectoria es una circunferencia unitaria ubicada en el plano xy , entonces

$$d\mathbf{r} \propto \hat{\mathbf{u}}_\phi \Rightarrow \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0 \quad \text{en todo punto}$$

con lo cual esta fuerza es conservativa porque

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0 \quad \forall (x, y) \Rightarrow \oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0 .$$

- La otra forma es con la fuerza bruta, cartesiana

$$\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int (x^2 + y^2 + z^2)^n (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) \cdot (dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k})$$

como la trayectoria es una circunferencia unitaria ubicada en el plano xy , entonces $y = \sqrt{1 - x^2}$, $z = 0$, con x variando entre 1 y -1 , tanto en el caso de circular en sentido antihorario de $0 \rightarrow \pi$ o en sentido horario $0 \rightarrow -\pi$.

$$\begin{aligned} \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_1^{-1} (x^2 + y^2)^n x \, dx + \int_0^0 (x^2 + y^2)^n y \, dy \\ &= \int_1^{-1} (x^2 + (1 - x^2))^n x \, dx = \int_1^{-1} x \, dx = 0 \end{aligned}$$

No es suficiente, pero podemos sospechar que la fuerza es conservativa, por cuanto dos circunferencias distintas nos dieron el mismo valor de la integral.

b) ¿Este campo vectorial tendrá un potencial $\varphi(x, y, z)$ asociado, tal que $\mathbf{F} = -\nabla\varphi(x, y, z)$? Justifique su respuesta.

Si existe el potencial, encuéntrelo y determine el valor del exponente n de tal forma que la función potencial diverge simultáneamente en el origen y en infinito.

Solución: Otra vez, planteamos la ecuación $\mathbf{F} = -\nabla\varphi(x, y, z)$ en esféricas. Esto es

$$\mathbf{F} = r^{2n+1}\hat{\mathbf{u}}_r = -\left(\frac{\partial\varphi(r, \theta, \phi)}{\partial r}\hat{\mathbf{u}}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi(r, \theta, \phi)}{\partial\theta}\hat{\mathbf{u}}_\theta + \frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial\varphi(r, \theta, \phi)}{\partial\phi}\hat{\mathbf{u}}_\phi\right)$$

con lo cual tienen que cumplirse las siguientes ecuaciones

$$r^{2n+1} = \frac{\partial\varphi(r, \theta, \phi)}{\partial r}; \quad 0 = \frac{\partial\varphi(r, \theta, \phi)}{\partial\theta}; \quad 0 = \frac{\partial\varphi(r, \theta, \phi)}{\partial\phi}$$

Las dos últimas ecuaciones, válidas para $r \neq 0$, implican que φ no depende ni de θ , ni de ϕ . La primera puede ser integrada y nos queda como

$$r^{2n+1} = \frac{d\varphi(r)}{dr} \Rightarrow \int r^{2n+1} dr = \varphi(r) \Rightarrow \varphi(r) = \frac{r^{2n+2}}{2n+2} + C$$

resultado que claramente diverge para $n = -1$, tanto cuando $r \rightarrow 0$ como cuando $r \rightarrow \infty$. Obviamente, válida también al hacerlo en cartesianas

$$\mathbf{F} = (x^2 + y^2 + z^2)^n (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) = -\left(\frac{\partial\varphi(x, y, z)}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\varphi(x, y, z)}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\varphi(x, y, z)}{\partial z}\mathbf{k}\right)$$

con lo cual

$$\begin{aligned} (x^2 + y^2 + z^2)^n x &= -\frac{\partial\varphi(x, y, z)}{\partial x}, & (x^2 + y^2 + z^2)^n y &= -\frac{\partial\varphi(x, y, z)}{\partial y} \\ (x^2 + y^2 + z^2)^n z &= -\frac{\partial\varphi(x, y, z)}{\partial z} \end{aligned}$$

Integrando la primera de esas ecuaciones

$$\varphi(x, y, z) = -\int (x^2 + y^2 + z^2)^n x dx = -\frac{1}{2} \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^{n+1}}{n+1} + \mathcal{C}(y, z)$$

Donde $\mathcal{C}(y, z)$ es una función que tendremos que ir descubriendo poco a poco. Ahora bien, sustituyendo esa forma de $\varphi(x, y, z)$ en la segunda ecuación, tendremos que

$$(x^2 + y^2 + z^2)^n y = -\frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{1}{2} \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^{n+1}}{n+1} + \mathcal{C}(y, z) \right) = (x^2 + y^2 + z^2)^n y - \frac{\partial\mathcal{C}(y, z)}{\partial y}$$

con lo cual concluimos que \mathcal{C} es independiente de y .

$$0 = \frac{\partial(\mathcal{C}(y, z))}{\partial y} \Rightarrow \mathcal{C} = \mathcal{C}(z) \Rightarrow \varphi(x, y, z) = -\frac{1}{2} \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^{n+1}}{n+1} + \mathcal{C}(z)$$

y ahora se sustituye esta nueva forma de la función $\varphi(x, y, z)$ en la tercera ecuación

$$(x^2 + y^2 + z^2)^n z = -\frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{1}{2} \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^{n+1}}{n+1} + C(z) \right) = (x^2 + y^2 + z^2)^n z - \frac{\partial C(z)}{\partial z}$$

entonces C también es independiente de z . Finalmente se determina que

$$\varphi(x, y, z) = -\frac{1}{2} \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^{n+1}}{n+1}$$

Obviamente es el mismo resultado cuando recordamos que: $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ y tiene el mismo comportamiento para $n = -1$.

13. Dado el siguiente campo vectorial

$$\mathbf{F} = \frac{2A \cos(\theta)}{r^3} \hat{\mathbf{u}}_r + \frac{A \sin(\theta)}{r^3} \hat{\mathbf{u}}_\theta$$

con $A =$ constante y $\{\hat{\mathbf{u}}_r, \hat{\mathbf{u}}_\theta\}$ vectores unitarios base en coordenadas esféricas.

a) Calcule el rotor $\nabla \times \mathbf{F}$

Solución: El rotor en coordenadas esféricas viene dado por

$$\nabla \times \mathbf{F} = \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{u}}_r & r \hat{\mathbf{u}}_\theta & r \sin(\theta) \hat{\mathbf{u}}_\phi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \phi} \\ \frac{2A \cos(\theta)}{r^3} & r \frac{A \sin(\theta)}{r^3} & 0 \end{pmatrix} = \frac{\hat{\mathbf{u}}_\phi}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{A \sin(\theta)}{r^2} \right] - \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{2A \cos(\theta)}{r^3} \right] \right] = 0$$

b) Calcule en trabajo $\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ a lo largo de una circunferencia unitaria en el plano $\theta = \frac{\pi}{2}$ ¿Qué puede concluir del campo de fuerzas?

Solución: Por el teorema de Stokes el trabajo en un circuito cerrado se anula

$$\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

Se pueda además concluir que la fuerza es conservativa.

c) ¿Ese campo vectorial tendrá un potencial asociado tal que $\mathbf{F} = -\nabla\varphi$? Justifique su respuesta y de ser posible, encuentre la expresión para ese potencial.

Solución: Una vez más

$$\frac{2A \cos(\theta)}{r^3} \hat{\mathbf{u}}_r + \frac{A \sin(\theta)}{r^3} \hat{\mathbf{u}}_\theta = - \left(\frac{\partial \varphi(r, \theta, \phi)}{\partial r} \hat{\mathbf{u}}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi(r, \theta, \phi)}{\partial \theta} \hat{\mathbf{u}}_\theta + \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial \varphi(r, \theta, \phi)}{\partial \phi} \hat{\mathbf{u}}_\phi \right)$$

con lo cual, también una vez más

$$\frac{2A \cos(\theta)}{r^3} = -\frac{\partial \varphi(r, \theta, \phi)}{\partial r}, \quad \frac{A \sin(\theta)}{r^3} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi(r, \theta, \phi)}{\partial \theta}, \quad 0 = \frac{\partial \varphi(r, \theta, \phi)}{\partial \phi}$$

La última ecuación indica que φ no depende de ϕ . Ahora bien, integrando la primera de estas ecuaciones, tendremos

$$\frac{2A \cos(\theta)}{r^3} = -\frac{\partial \varphi(r, \theta, \phi)}{\partial r} \Rightarrow \varphi(r, \theta) = -\int \frac{2A \cos(\theta)}{r^3} dr + C(\theta) = A \frac{\cos(\theta)}{r^2} + C(\theta)$$

al sustituir la forma del potencial en la segunda ecuación tendremos

$$\frac{A \sin(\theta)}{r^2} = -\frac{\partial}{\partial \theta} \left(A \frac{\cos(\theta)}{r^2} + C(\theta) \right) \Rightarrow \frac{\partial C(\theta)}{\partial \theta} = 0$$

De esta forma

$$\varphi(r, \theta) = A \frac{\cos(\theta)}{r^2}.$$

14. Si $\mathbf{F} = \frac{1}{r^2} \hat{\mathbf{u}}_r$. Encuentre algún posible campo vectorial \mathbf{A} tal que $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{F}$

Solución: Tenemos

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{u}}_r & r \hat{\mathbf{u}}_\theta & r \sin(\theta) \hat{\mathbf{u}}_\phi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \phi} \\ A_r(r, \theta, \phi) & r A_\theta(r, \theta, \phi) & r \sin(\theta) A_\phi(r, \theta, \phi) \end{vmatrix} = -\frac{1}{r^2} \hat{\mathbf{u}}_r$$

con lo cual

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \left(\frac{\partial (r \sin(\theta) A_\phi(r, \theta, \phi))}{\partial \theta} - \frac{\partial (r A_\theta(r, \theta, \phi))}{\partial \phi} \right)$$

$$0 = \left(\frac{\partial (r \sin(\theta) A_\phi(r, \theta, \phi))}{\partial r} - \frac{\partial A_r(r, \theta, \phi)}{\partial \phi} \right), \quad 0 = \left(\frac{\partial (r A_\theta(r, \theta, \phi))}{\partial r} - \frac{\partial A_r(r, \theta, \phi)}{\partial \theta} \right)$$

Ahora hay que hacer algún tipo de suposición para que podamos encontrar, fácilmente algún potencial vectorial. Supongamos pues que

$$\left. \begin{array}{l} A_r(r, \theta, \phi) = \text{cte} \\ A_\phi(r, \theta, \phi) \\ A_\theta(r, \theta, \phi) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \sin(\theta) = \frac{\partial (r \sin(\theta) A_\phi(r, \theta, \phi))}{\partial \theta} \\ 0 = \frac{\partial A_r(r, \theta, \phi)}{\partial \phi} \\ 0 = A_\theta(r, \theta, \phi) + r \frac{\partial A_\theta(r, \theta, \phi)}{\partial r} - \frac{\partial A_r(r, \theta, \phi)}{\partial \theta} \end{cases}$$

Integrando la primera obtendremos

$$\sin(\theta) = \frac{\partial (r \sin(\theta) A_\phi(r, \theta, \phi))}{\partial \theta} \Rightarrow A_\phi(r, \theta, \phi) = -\frac{\cos(\theta)}{r \sin(\theta)} + C_1(r, \theta)$$

de la segunda concluimos que $A_r = A_r(r, \theta)$, es decir, A_r es independiente de ϕ . Finalmente, de la tercera ecuación concluimos que podemos hacer adicionalmente $A_r = A_r(r)$ y $C_1(r, \theta) = 0$. Resumiendo

$$\mathbf{F} = -\frac{1}{r^2} \hat{\mathbf{u}}_r \quad \wedge \quad \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{F} \Rightarrow \mathbf{A} = A_r(r) \hat{\mathbf{u}}_r - \frac{\cos(\theta)}{r \sin(\theta)} \hat{\mathbf{u}}_\phi.$$

15. Para

$$\mathbf{F} = (x^2 \hat{i} + y^2 \hat{j} + z^2 \hat{k})$$

evalúe las siguientes integrales:

a) $\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ a lo largo de una circunferencia unitaria.

Solución: Por el Teorema de Stokes

$$\oint_c \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S}$$

con lo cual

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \oint_c \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$$

b) $\oint \oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ a lo largo de una esfera unitaria.

Solución: Por el Teorema de la divergencia

$$\oint \oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V (\nabla \cdot \mathbf{F}) dV$$

por consiguiente

$$\begin{aligned} \iiint_V (\nabla \cdot \mathbf{F}) dV &= \iiint_V \left(\mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (x^2 \mathbf{i} + y^2 \mathbf{j} + z^2 \mathbf{k}) dx dy dz \\ &= \iiint_V (2x + 2y + 2z) dx dy dz \end{aligned}$$

Si ahora transformamos a coordenadas esféricas tendremos que

$$x = r \sin(\theta) \cos(\varphi); \quad y = r \sin(\theta) \sin(\varphi); \quad z = r \cos(\theta); \quad \text{con } dV = r^2 \sin(\theta) dr d\theta d\varphi$$

con lo cual

$$\begin{aligned} \iiint_V (2x + 2y + 2z) dx dy dz &= \iiint_V (2r \sin(\theta) \cos(\varphi) + 2r \sin(\theta) \sin(\varphi) + 2r \cos(\theta)) r^2 \sin(\theta) dr d\theta d\varphi \\ \iiint_V (\nabla \cdot \mathbf{F}) dV &= -\frac{1}{4}\pi. \end{aligned}$$

16. En coordenadas cilíndricas un vector tiene por componentes $(0, \sin(\varphi), z)$. Calcular:

a) La divergencia en coordenadas esféricas.

Solución: Una vez más $(\tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \tilde{x}^3) \Rightarrow (r, \theta, \varphi)$ y $(x^1, x^2, x^3) \Rightarrow (\rho, \varphi, z)$

$$\tilde{a}^1 = \frac{\partial \tilde{x}^1(x^m)}{\partial x^k} a^k; \quad \tilde{a}^2 = \frac{\partial \tilde{x}^2(x^m)}{\partial x^k} a^k; \quad \tilde{a}^3 = \frac{\partial \tilde{x}^3(x^m)}{\partial x^k} a^k$$

con

$$r = \sqrt{z^2 + \rho^2}; \quad \theta = \arctan\left(\frac{\rho}{z}\right); \quad \varphi = \varphi \iff \rho = r \operatorname{sen}(\theta); \quad \varphi = \varphi; \quad z = r \cos(\theta)$$

con lo cual

$$\tilde{a}^1 = \frac{\partial \tilde{x}^1(x^m)}{\partial x^k} a^k = \frac{\partial \sqrt{z^2 + \rho^2}}{\partial z} z = \frac{z^2}{\sqrt{(z^2 + \rho^2)}} = \frac{(r \cos(\theta))^2}{\sqrt{(r \cos(\theta))^2 + (r \operatorname{sen}(\theta))^2}} = r \cos^2 \theta$$

$$\tilde{a}^2 = \frac{\partial \arctan\left(\frac{\rho}{z}\right)}{\partial z} z =: \frac{-\rho z}{z^2 + \rho^2} = \frac{-r^2 \operatorname{sen}(\theta) \cos(\theta)}{(r \cos(\theta))^2 + (r \operatorname{sen}(\theta))^2} = -\operatorname{sen}(\theta) \cos(\theta)$$

$$\tilde{a}^3 = \operatorname{sen}(\varphi)$$

de modo que el campo vectorial, en esféricas es

$$(0, \operatorname{sen}(\varphi), z) \iff (r \cos^2 \theta, -\operatorname{sen}(\theta) \cos(\theta), \operatorname{sen}(\varphi))$$

y la divergencia

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}(\theta)} \left(\frac{\partial (r^2 \operatorname{sen}(\theta) r \cos^2(\theta))}{\partial r} + \frac{\partial (r \operatorname{sen}(\theta) (-\operatorname{sen}(\theta) \cos(\theta)))}{\partial \theta} + \frac{\partial (r \operatorname{sen}(\varphi))}{\partial \varphi} \right)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{3r \operatorname{sen}(\theta) \cos^2(\theta) - 3 \operatorname{sen}(\theta) \cos^2(\theta) + \operatorname{sen}(\theta) + \cos(\varphi)}{r \operatorname{sen}(\theta)}.$$

b) El rotor en coordenadas cartesianas.

Solución: Ahora $(\tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \tilde{x}^3) \iff (x, y, z)$ y $(x^1, x^2, x^3) \iff (\rho, \varphi, z)$

con

$$x = \rho \cos(\varphi); \quad y = \rho \operatorname{sen}(\varphi); \quad z = z \iff \rho = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad \varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right); \quad z = z$$

de allí se siguen para las componentes cilíndricas $\mathbf{A} \iff (0, \operatorname{sen}(\varphi), z)$

$$\tilde{a}_x = \frac{\partial (\rho \cos(\varphi))}{\partial \varphi} \operatorname{sen}(\varphi) = -\rho (1 + \cos^2(\varphi)) = -\sqrt{x^2 + y^2} \left[1 + \cos^2\left(\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right) \right] = -\frac{2x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\tilde{a}_y = \frac{\partial \rho \operatorname{sen}(\varphi)}{\partial \varphi} \operatorname{sen}(\varphi) = \rho \cos(\varphi) \operatorname{sen}(\varphi) = \sqrt{x^2 + y^2} \cos\left(\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right) \operatorname{sen}\left(\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\tilde{a}_z = z.$$

Y el rotor

$$\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{i} \left(\frac{\partial \tilde{a}_z}{\partial y} - \frac{\partial \tilde{a}_y}{\partial z} \right) + \mathbf{j} \left(\frac{\partial \tilde{a}_x}{\partial z} - \frac{\partial \tilde{a}_z}{\partial x} \right) + \mathbf{k} \left(\frac{\partial \tilde{a}_y}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{a}_x}{\partial y} \right)$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{k} \left(\frac{\partial \left(\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \right)}{\partial x} - \frac{\partial \left(-\frac{2x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \right)}{\partial y} \right) = \frac{2y^3 \mathbf{k}}{(\sqrt{x^2+y^2})^3}$$

17. Muestre la relación

$$\Delta \mathbf{a} \equiv (\nabla \cdot \nabla) \mathbf{a} = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{a}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{a})$$

y a partir de ella encuentre las componentes del Laplaciano $\Delta \mathbf{a}$ en coordenadas cilíndricas.

Solución: En coordenadas cartesianas tendremos que

$$\begin{aligned} (\nabla \cdot \nabla) \mathbf{a} &= \partial^i (\partial^j a_j) \mathbf{e}_i - \varepsilon^{ijk} [\partial_j (\varepsilon_{klm} \partial^l a^m)] \mathbf{e}_i = \left[\partial^i (\partial^j a_j) - (\delta_l^i \delta_m^j - \delta_l^j \delta_m^i) \partial_j (\partial^l a^m) \right] \mathbf{e}_i \\ &= [\partial^i (\partial^j a_j) - \partial_j (\partial^i a^j) + \partial_j (\partial^j a^i)] \mathbf{e}_i = [\partial_j \partial^j a^i] \mathbf{e}_i. \end{aligned}$$

Para encontrar la expresión del Laplaciano de un vector en coordenadas cilíndricas tenemos que

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{a} &= \Delta a_x \mathbf{i} + \Delta a_y \mathbf{j} + \Delta a_z \mathbf{k} = \Delta a_x (\cos(\varphi) \tilde{\mathbf{e}}_r - \sin(\varphi) \tilde{\mathbf{e}}_\varphi) + \Delta a_y (\sin(\varphi) \tilde{\mathbf{e}}_r + \cos(\varphi) \tilde{\mathbf{e}}_\varphi) + \Delta a_z \tilde{\mathbf{e}}_z \\ &= (\Delta a_x \cos(\varphi) + \Delta a_y \sin(\varphi)) \tilde{\mathbf{e}}_r + (\Delta a_y \cos(\varphi) - \Delta a_x \sin(\varphi)) \tilde{\mathbf{e}}_\varphi + \Delta a_z \tilde{\mathbf{e}}_z \end{aligned}$$

ya que

$$\mathbf{i} = \cos(\varphi) \tilde{\mathbf{e}}_r - \sin(\varphi) \tilde{\mathbf{e}}_\varphi, \mathbf{j} = \sin(\varphi) \tilde{\mathbf{e}}_r + \cos(\varphi) \tilde{\mathbf{e}}_\varphi, \mathbf{k} = \tilde{\mathbf{e}}_z; \quad x = r \cos(\varphi), \quad y = r \sin(\varphi), \quad z = z$$

Nótese que

$$\Delta a_x = \partial_j \partial^j a_x = \frac{\partial^2 a_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_x}{\partial z^2}, \quad \Delta a_y = \partial_j \partial^j a_y = \frac{\partial^2 a_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_y}{\partial z^2},$$

$$\Delta a_z = \partial_j \partial^j a_z = \frac{\partial^2 a_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_z}{\partial z^2}$$

son las componentes **cartesianas**.

18. Muestre que

$$\nabla (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{b} + (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{a} + \mathbf{a} \times (\nabla \times \mathbf{b}) + \mathbf{b} \times (\nabla \times \mathbf{a})$$

Solución: El resultado es un gradiente porque $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$ es una función escalar. El lado izquierdo de la expresión será

$$(\nabla (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}))^i = \partial^i (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \partial^i (a_j b^j) = (\partial^i a_j) b^j + (\partial^i b_j) a^j$$

mientras que el lado derecho

$$\begin{aligned}
 (\nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}))^i &= (a_j \partial^j) b^i + (b_j \partial^j) a^i + \varepsilon^{ijk} a_j (\nabla \times \mathbf{b})_k + \varepsilon^{ijk} b_j (\nabla \times \mathbf{a})_k \\
 &= (a_j \partial^j) b^i + (b_j \partial^j) a^i + \varepsilon^{ijk} a_j \varepsilon_{kmn} \partial^m b^n + \varepsilon^{ijk} b_j \varepsilon_{kmn} \partial^m a^n \\
 &= (a_j \partial^j) b^i + (b_j \partial^j) a^i + \varepsilon^{ijk} \varepsilon_{mnk} a_j \partial^m b^n + \varepsilon^{ijk} \varepsilon_{mnk} b_j \partial^m a^n \\
 &= (a_j \partial^j) b^i + (b_j \partial^j) a^i + (\delta_m^i \delta_n^j - \delta_m^j \delta_n^i) a_j \partial^m b^n + \\
 &\quad + (\delta_m^i \delta_n^j - \delta_m^j \delta_n^i) b_j \partial^m a^n \\
 &= a_j \partial^j b^i + b_j \partial^j a^i + \delta_m^i \delta_n^j a_j \partial^m b^n - \delta_m^j \delta_n^i a_j \partial^m b^n + \\
 &\quad + \delta_m^i \delta_n^j b_j \partial^m a^n - \delta_m^j \delta_n^i b_j \partial^m a^n \\
 &= a_j \partial^j b^i + b_j \partial^j a^i + a_n \partial^i b^n - a_m \partial^m b^i + b_n \partial^i a^n - b_m \partial^m a^i \\
 &= \underbrace{a_j \partial^j b^i - a_m \partial^m b^i}_{=0} + \underbrace{b_j \partial^j a^i - b_m \partial^m a^i}_{=0} + a_n \partial^i b^n + b_n \partial^i a^n \\
 &= a_n \partial^i b^n + b_n \partial^i a^n = \partial^i (a_j b^j) = \partial^i (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) .
 \end{aligned}$$

19. Dado el siguiente campo vectorial $\mathbf{a} = 4xy \mathbf{i} - y^2 \mathbf{j} + z \mathbf{k}$.

a) Encuentre el flujo del campo a través de un cubo unitario: $x = 0, x = 1, y = 0, y = 1, z = 0, z = 1$.

Solución: Tenemos que el flujo del campo vectorial es

$$\int_S \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S} = \int (\nabla \cdot \mathbf{a}) dV = \int (2y + 1) dV = \int_0^1 dx \int_0^1 dz \int_0^1 (2y + 1) dy = 2$$

b) Encuentre el flujo del rotor de ese campo a través de una semi esfera: $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ con $z \geq 0$.

Solución: El flujo del rotor será

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{a}) \cdot d\mathbf{S} = \oint \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = \oint (4xy \mathbf{i} - y^2 \mathbf{j} + z \mathbf{k}) \cdot (dx \mathbf{i} + dy \mathbf{j}) = \int 4xy dx - \int y^2 dy$$

como el circuito será una circunferencia de radio $r = 4$ en el plano $z = 0$ entonces al pasar a polares nos queda

$$x = 4 \cos(\theta) \Rightarrow dx = -4 \sin(\theta) d\theta; \quad y = 4 \sin(\theta) \Rightarrow dy = 4 \cos(\theta) d\theta .$$

con lo cual

$$\oint \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = -5 \int_0^{2\pi} 4^2 \cos(\theta) \sin^2(\theta) d\theta = 0$$

c) Considere ahora un cilindro $x^2 + y^2 = 16$ con $-1 \leq z \leq 1$

- Encuentre el flujo del campo a través de esa superficie.

Solución: Como siempre, para encontrar el flujo del campo podemos hacerlo directamente

$\int_S \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S}$, o a través de su divergencia, $\int (\nabla \cdot \mathbf{a}) dV$

El flujo de este campo a través de la superficie que encierra el cilindro sería

$$\int_S \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S} = \int_{S_+} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S} + \int_{S_c} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S} + \int_{S_-} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S}$$

Con $d\mathbf{S}_\pm$ las dos tapas del cilindro ($z = 1$ y $z = -1$), mientras que $d\mathbf{S}_c$ representa la superficie del cilindro. Una forma de resolverlo sería: se transforma el campo a cilíndricas, ya que $d\vec{S} = dS_c \hat{\mathbf{u}}_r + dS_\pm \hat{\mathbf{u}}_z$.

Esto es:

$$\mathbf{a} = 4(4 \cos(\theta))(4 \sin(\theta))(\cos(\theta) \hat{\mathbf{u}}_r - \sin(\theta) \hat{\mathbf{u}}_\theta) + (4 \sin(\theta))^2(\sin(\theta) \hat{\mathbf{u}}_r + \cos(\theta) \hat{\mathbf{u}}_\theta) + z \hat{\mathbf{k}}$$

y acomodando

$$\mathbf{a} = 16 \sin(\theta) (\cos(2\theta) \hat{\mathbf{u}}_r - \sin(2\theta) \hat{\mathbf{u}}_\theta) + z \hat{\mathbf{k}}$$

Entonces, el flujo en las “tapas” es

$$\int_{S_+} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S} = \int_{S_-} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S} = 16\pi$$

mientras que en la superficie cilíndrica será:

$$\int_{S_c} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S} = \int_{S_d} 4d\theta dz (16 \sin(\theta) \cos(2\theta)) = 64 \int_{-1}^1 dz \int_0^{2\pi} d\theta (\sin(\theta) \cos(2\theta)) = 0$$

Finalmente

$$\int_S \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S} = 32\pi$$

Hubiera sido inmediato si hubiéramos utilizado el teorema de la divergencia y reutilizado los resultados del volumen anterior. Así

$$\int (\nabla \cdot \mathbf{a}) dV = \int (2y + 1) dV = \int (2(\rho \sin(\theta)) + 1) \rho d\theta d\rho dz$$

con $y = \rho \sin(\theta)$ y el diferencial de volumen $dV = \rho d\theta d\rho dz$.

Entonces, finalmente,

$$\int (\nabla \cdot \mathbf{a}) dV = \int_{-1}^1 dz \int_0^4 d\rho 2\rho^2 \int_0^{2\pi} d\theta \sin(\theta) + \int_{-1}^1 dz \int_0^4 d\rho 2\rho^2 \int_0^{2\pi} d\theta$$

para que, otra vez

$$\int_S \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S} = 32\pi$$

porque el primer término de la suma se anula.

- Encuentre el flujo del rotor de ese campo para el caso $z \geq 0$.

Solución: El flujo del rotor será exactamente el mismo que en caso de la semiesfera. Esto es

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{a}) \cdot d\mathbf{S} = \oint \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = 0$$

d) Encuentre alguna de las componentes longitudinales y transversales del campo.

Solución: Todo campo vectorial \mathbf{a} se puede separar en una componente longitudinal \mathbf{a}^l , y otra transversal \mathbf{a}^t . Esto es:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}^l + \mathbf{a}^t \quad \text{con} \quad \left\{ \begin{array}{l} \nabla \times \mathbf{a}^l = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{a}^t = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \nabla \times \mathbf{a}^l = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{a}^l = \nabla \cdot \mathbf{a} = 2y + 1 \end{array} \right.$$

con lo cual tenemos

$$\partial_y a_z^l - \partial_z a_y^l = 0, \quad \partial_z a_x^l - \partial_x a_z^l = 0, \quad \partial_x a_y^l - \partial_y a_x^l = 0$$

y

$$\partial_x a_x^l + \partial_y a_y^l + \partial_z a_z^l = 2y + 1$$

Para empezar a acotar la solución, supongamos que $a_z^l = a_z^l(x, y, z) = 0$

$$\partial_z a_y^l = 0 \quad \text{y} \quad \partial_z a_x^l = 0 \Rightarrow a_x^l = a_x^l(x, y) \quad \text{y} \quad a_y^l = a_y^l(x, y)$$

$$\partial_x a_y^l - \partial_y a_x^l = 0 \quad \text{y} \quad \partial_x a_x^l + \partial_y a_y^l = 2y + 1$$

Otro par de suposiciones salvadoras son: $a_x^l = a_x^l(x, y) = f(x)$ y $a_y^l = a_y^l(x, y) = g(y)$. Estas nos garantizan que se cumple la ecuación $\partial_x a_y^l - \partial_y a_x^l = 0$. Es claro entonces que podemos encontrar una solución de la forma $a_x^l = f(x) = x$ y $a_y^l = g(y) = y^2$, que satisfaga $\partial_x a_x^l + \partial_y a_y^l = 2y + 1$. Con lo cual

$$\mathbf{a}^l = x \mathbf{i} + y^2 \mathbf{j} \Rightarrow \mathbf{a}^t = \mathbf{a} - \mathbf{a}^l = x(4y - 1) \mathbf{i} - 2y^2 \mathbf{j} + z \mathbf{k}$$

Claramente, las suposiciones

$$a_z^l = a_z^l(x, y, z) = 0, \quad a_x^l = a_x^l(x, y) = f(x) \quad \text{y} \quad a_y^l = a_y^l(x, y) = g(y)$$

son arbitrarias y otras suposiciones pueden ser hechas y, tendremos resultados distintos.

- e) Encuentre los potenciales escalar y vectorial asociados con este campo vectorial \mathbf{a} , a través de las componentes longitudinal \mathbf{a}^l y transversal \mathbf{a}^t .

Solución: El potencial escalar, $\phi = \phi(x, y, z)$, está asociado a la componente longitudinal, \mathbf{a}^l , del campo. Esto es

$$\nabla \times \mathbf{a}^l = 0 \Rightarrow \mathbf{a}^l = -\nabla \phi \Rightarrow \begin{cases} x = -\partial_x \phi(x, y, z) \Rightarrow \phi(x, y, z) = -\frac{x}{2} + \chi(y, z) \\ y^2 = -\partial_y \phi(x, y, z) \Rightarrow y^2 = -\partial_y \chi(y, z) \end{cases}$$

Con lo cual

$$\phi(x, y, z) = \frac{x}{2} + \frac{y^3}{3} + \varphi(z)$$

El potencial vectorial para un campo vectorial, $\Psi = \Psi(x, y, z)$, está asociado a la componente transversa \mathbf{a}^t del campo. Esto es

$$\nabla \cdot \mathbf{a}^t = 0 \Rightarrow \mathbf{a}^t = \nabla \times \Psi \Rightarrow \begin{cases} x(4y - 1) = \partial_y \Psi_z - \partial_z \Psi_y \\ -2y^2 = \partial_z \Psi_x - \partial_x \Psi_z \\ z = \partial_x \Psi_y - \partial_y \Psi_x \end{cases}$$

Una vez más, y de forma arbitraria, suponemos $\Psi_z = 0$. Entonces las ecuaciones anteriores se convierten en

$$x(4y - 1) = -\partial_z \Psi_y; \quad -2y^2 = \partial_z \Psi_x; \quad \text{y} \quad z = \partial_x \Psi_y - \partial_y \Psi_x$$

con lo cual

$$\begin{aligned} x(4y - 1) = -\partial_z \Psi_y &\Rightarrow \Psi_y = -x(4y - 1)z + f(x, y) \\ -2y^2 = \partial_z \Psi_x &\Rightarrow \Psi_x = -2y^2 z + g(x, y) \end{aligned}$$

y con estos resultados debemos satisfacer

$$z = \partial_x \Psi_y - \partial_y \Psi_x \Rightarrow z = -(4y - 1)z + \partial_x f(x, y) + 4yz - \partial_y g(x, y)$$

con lo cual es inmediato que una posible solución surge de $f(x, y) = g(x, y) = 0$, para que finalmente el potencial vectorial lo podamos expresar como

$$\Psi = -x(4y - 1)z \mathbf{i} - 2y^2 z \mathbf{j}.$$

20. Muestre que

- Si un campo de velocidades es potencial, el campo de aceleraciones también lo será.
Esto es: Si

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}(t), t) = \nabla \varphi \quad \text{entonces} \quad \mathbf{a}(\mathbf{r}(t), t) = \nabla \Phi$$

con

$$\mathbf{a}(\mathbf{r}(t), t) = \frac{d\mathbf{v}(\mathbf{r}(t), t)}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{r}(t), t)}{\partial t} + (\mathbf{v}(\mathbf{r}(t), t) \cdot \nabla) \mathbf{v}(\mathbf{r}(t), t)$$

Solución: Adaptando la relación vectorial del primer problema obtenemos

$$\nabla(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) = (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) + \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) \Rightarrow \nabla(v^2) = 2(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$$

con lo cual

$$\mathbf{a} = \frac{\partial}{\partial t} \nabla \varphi + \frac{1}{2} \nabla ((\nabla \varphi)^2) = \nabla \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 \right) \Rightarrow \mathbf{a} = \nabla \Phi$$

- Encuentre la forma del potencial del campo de aceleraciones en términos del campo de velocidades y su potencial.

Solución: Arriba notamos claramente que

$$\Phi = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} v^2 \equiv \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2.$$

5.15. Ejercicios propuestos

1. Muestre que

a) Considerando: $\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial(\circ)}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial(\circ)}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial(\circ)}{\partial z}$

1) $\nabla [\nabla \varphi(x, y, z) \times \nabla \phi(x, y, z)] = 0$

2) $\nabla \times [\varphi(x, y, z) \nabla \phi(x, y, z)] = 0$

b) Si $x = r \cos(\theta)$, $y = r \sin(\theta)$, $z = r \cos(\theta)$. Encuentre, en este nuevo sistema de coordenadas (r, θ, ϕ) , las expresiones para: ∇f ; $\Delta = \nabla \cdot \nabla f$ y $\nabla \times \mathbf{v}$

2. En coordenadas cilíndricas un vector tiene por componentes $(0, \sin \theta, z)$. Calcular:

a) La divergencia en coordenadas esféricas

b) El rotor en coordenadas cartesianas

3. Muestre que se cumple la siguiente la relación

$$\Delta \mathbf{a} \equiv (\nabla \cdot \nabla) \mathbf{a} = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{a}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{a})$$

y a partir de ella encuentre las componentes del laplaciano $\Delta \mathbf{a}$ en coordenadas cilíndricas

4. Encuentre el vector normal a la superficie

$$z = \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt[3]{x^2 + y^2}$$

en un punto cualquiera $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$, luego encuentre la expresión para el ángulo que forma este vector con el eje. Encuentre el límite al cual tiende este ángulo cuando $(x, y, z) \rightarrow (0, 0, 0)$.

5. La ecuación de equilibrio hidrostático en simetría esférica es

$$\nabla P(r) + \rho(r) \nabla \varphi(r) = 0$$

donde $P(r)$ es la presión, $\rho(r)$ la densidad y $\varphi(r)$ el potencial gravitacional. Muestre que las normales a las superficies isóbaras y las normales a las superficies equipotenciales, son paralelas.

6. Dado $\mathbf{r} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}$ con $\|\mathbf{r}\| = r = \text{cte}$, $f(r)$ un campo escalar bien comportado y \mathbf{a} y \mathbf{c} vectores constantes, muestre que

a) $\nabla r = \hat{\mathbf{u}}_r \equiv \frac{\mathbf{r}}{r}$; $\nabla (\mathbf{a} \cdot \mathbf{r} f(r)) = \mathbf{a} f(r) + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}) f'(r) \hat{\mathbf{u}}_r$

b) $\nabla \cdot (\mathbf{r} f(r)) = 3f(r) + r f'(r)$; $\nabla \cdot ((\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{r}) = 4(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})$
 $\nabla \cdot ((\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{c}) = \nabla \cdot ((\mathbf{c} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{a}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})$; $\nabla \cdot ((\mathbf{r} \times \mathbf{a}) \times \mathbf{c}) = -2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})$

c) Encuentre los enteros n tales que $\nabla \cdot (r^n \mathbf{r}) = 0$

d) $\nabla \times \mathbf{r} = \nabla \times (f(r) \mathbf{r}) = 0$; $\nabla \times (\mathbf{c} \times \mathbf{r}) = 2\mathbf{c}$; $\nabla \times (\mathbf{c} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})) = \mathbf{a} \times \mathbf{c}$
 $\nabla \times ((\mathbf{c} \times \mathbf{r}) \mathbf{a}) = \mathbf{a} \times \mathbf{c}$

e) $(\mathbf{r} \times \nabla) \cdot (\mathbf{r} \times \nabla) f(r) = r^2 \Delta f(r) - r^2 \frac{\partial^2 f(r)}{\partial r^2} - 2r \frac{\partial f(r)}{\partial r}$ con $\Delta f(r) \equiv (\nabla \cdot \nabla) f(r)$

7. Encuentre la expresión para la divergencia y el rotor de la velocidad \mathbf{v} y la aceleración \mathbf{a} de un cuerpo rígido alrededor de un punto (x, y, z)

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad \mathbf{a} = \boldsymbol{\epsilon} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$$

donde $\boldsymbol{\omega}$ es la velocidad angular y $\boldsymbol{\epsilon}$ es un vector constante.

8. Pruebe que el campo de velocidades $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ de un disco que rota alrededor de su centro con una velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ cumple con la relación $\nabla \times \mathbf{v} = 2\boldsymbol{\omega}$
9. Encuentre la circulación alrededor de una circunferencia de radio unidad centrada en el origen para los siguientes campos.

- a) $\mathbf{a} = \frac{1}{2}(-y \mathbf{i} + x \mathbf{j})$
 b) $\mathbf{a} = (xy + 1) \mathbf{i} + (\frac{1}{2}x^2 + x + 2) \mathbf{j}$

10. Encuentre el rotor y el flujo para el campo vectorial

$$\mathbf{a} = (x^2 + y - 4) \mathbf{i} + 3xy \mathbf{j} + (2xz + z^2) \mathbf{k}$$

a través del hemisferio $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ con $z > 0$.

11. Muestre la relación

$$\Delta \mathbf{a} \equiv (\nabla \cdot \nabla) \mathbf{a} = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{a}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{a})$$

y a partir de ella encuentre las componentes del Laplaciano $\Delta \mathbf{a}$ en coordenadas cilíndricas

12. Muestre que el vector $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ es solución a la ecuación

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{a}) - k^2 \mathbf{a} = 0 \Rightarrow (\nabla + k^2) \mathbf{a} = 0$$

con la condición solenoidal $\nabla \cdot \mathbf{a} = 0$. La ecuación $(\nabla + k^2) \mathbf{a} = 0$ se conoce como la ecuación de Helmholtz.

13. Dado el campo de fuerzas $\mathbf{F} = r^n \mathbf{r}$. Verifique si existe una función escalar $\varphi(x, y, z)$ tal que $\mathbf{F} = -\nabla \varphi(x, y, z)$. En el caso de que sea posible, encuentre esa función $\varphi(x, y, z)$.

14. En mecánica clásica la cantidad de movimiento viene definida como $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$. Para pasar a mecánica cuántica se asocia \mathbf{r} y \mathbf{p} con los operadores posición y cantidad de movimiento los cuales, al operar sobre la función de onda nos proveen

$$\langle r | X | \psi \rangle = x \langle r | \psi \rangle = x \psi(\mathbf{r}) \quad \langle r | P_x | \psi \rangle = \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right) \langle r | \psi \rangle = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \psi(\mathbf{r})$$

$$\langle r | Y | \psi \rangle = y \langle r | \psi \rangle = y \psi(\mathbf{r}) \quad \langle r | P_y | \psi \rangle = \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial y} \right) \langle r | \psi \rangle = -i\hbar \frac{\partial}{\partial y} \psi(\mathbf{r})$$

$$\langle r | Z | \psi \rangle = z \langle r | \psi \rangle = z \psi(\mathbf{r}) \quad \langle r | P_z | \psi \rangle = \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial z} \right) \langle r | \psi \rangle = -i\hbar \frac{\partial}{\partial z} \psi(\mathbf{r})$$

En definitiva, en coordenadas cartesianas en la representación de coordenadas $\{|r\rangle\}$ tendremos que

$$\langle r | R | \psi \rangle = \mathbf{r} \psi(\mathbf{r}) \quad \text{y} \quad \langle r | P_x | \psi \rangle = -i\hbar \nabla \psi(\mathbf{r})$$

- a) Muestre que en Mecánica cuántica las componentes cartesianas del operador cantidad de movimiento angular son

$$\langle r | L_x | \psi \rangle = -i\hbar \left(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right) \psi(\mathbf{r}); \quad \langle r | L_y | \psi \rangle = -i\hbar \left(z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right) \psi(\mathbf{r})$$

$$\langle r | L_z | \psi \rangle = -i\hbar \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) \psi(\mathbf{r})$$

- b) Utilizando las definiciones anteriores muestre que el conmutador de las componentes cartesianas de la cantidad de movimiento angular cumple con

$$[L_x, L_y] = i\hbar L_z \quad \text{y en general } \varepsilon_{ijk} L^i L^j = i\hbar L_k \Rightarrow \mathbf{L} \times \mathbf{L} = i\mathbf{L}$$

con $L^1 = L_1 = L_x$; $L^2 = L_2 = L_y$; $L^3 = L_3 = L_z$ y $\mathbf{L} = L_x \mathbf{i} + L_y \mathbf{j} + L_z \mathbf{k}$

- c) Dados dos Operadores Vectoriales \mathbb{A} y \mathbb{B} que conmutan entre ellos y con \mathbb{L} tales que

$$[\mathbb{A}, \mathbb{B}] = [\mathbb{A}, \mathbb{L}] = [\mathbb{L}, \mathbb{B}] = 0$$

demuestre entonces que

$$[\mathbb{A} \cdot \mathbb{L}, \mathbb{B} \cdot \mathbb{L}] = i(\mathbb{A} \times \mathbb{B}) \cdot \mathbb{L}$$

15. El campo magnético generado por una corriente I es

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\frac{-y}{x^2 + y^2} \mathbf{i} + \frac{x}{x^2 + y^2} \mathbf{j} \right)$$

Encuentre un vector potencial magnético, \mathbf{A} , tal que $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$.

16. Si un campo vectorial tiene la forma $\mathbf{B} = \nabla \phi \times \nabla \varphi$, entonces \mathbf{B} es solenoidal y su potencial vectorial es: $\mathbf{A} = \frac{1}{2} (\phi \nabla \varphi - \varphi \nabla \phi)$.

17. Dados el potencial vectorial $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ del momento magnético dipolar \mathbf{m} y la fuerza $\mathbf{F} = \nabla \times (\mathbf{B} \times \mathbf{m})$ que registra un momento magnético dipolar \mathbf{m} , sometido a un campo magnético externo, \mathbf{B} . Muestre que la fuerza ejercida por un dipolo magnético sobre otro viene dada por:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{A}_{\mathbf{m}}(\mathbf{r}) &= \left(\frac{\mu_0}{4\pi r^3} \right) \mathbf{m} \times \mathbf{r} \\ \mathbf{F}_{\mathbf{m}}(\mathbf{r}) &= \nabla \times (\mathbf{B} \times \mathbf{m}) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \mathbf{F}_{m_1 \rightarrow m_2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \left(\frac{2m_{1r} m_{2r} - m_{1\varphi} m_{2\varphi} - m_{1z} m_{2z}}{r^3} \right)$$

con $\mathbf{m} = m_r \hat{\mathbf{u}}_r + m_\varphi \hat{\mathbf{u}}_\varphi + m_z \hat{\mathbf{u}}_z$.

18. Desarrolle el Teorema de Gauss para el caso bidimensional. Esto es, suponga una línea de carga orientada en la dirección del eje z genera un potencial

$$\varphi(\rho) = -q \frac{\ln(\rho)}{2\pi\epsilon_0}; \quad \mathbf{E} = -\nabla \varphi \quad \text{con } \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

19. Pruebe la generalización del Teorema de Green

$$\iiint_V \{ \zeta(\mathbf{r}) \mathbb{L} \xi(\mathbf{r}) - \xi(\mathbf{r}) \mathbb{L} \zeta(\mathbf{r}) \} dV = p(\mathbf{r}) \iint_S \{ \zeta(\mathbf{r}) \nabla \xi(\mathbf{r}) - \xi(\mathbf{r}) \nabla \zeta(\mathbf{r}) \} \cdot d\mathbf{S}$$

donde \mathbb{L} es el operador autoadjunto definido por $\mathbb{L} \Rightarrow \nabla \cdot (p(\mathbf{r}) \nabla) + q(\mathbf{r})$.

20. Considere una esfera de radio $r = a$ y carga Q . Grafique su potencial electrostático para $0 < r < \infty$.

21. Considere una esfera de densidad uniforme ρ_0 , radio $r = a$ y masa M .

a) Muestre que la fuerza gravitacional por unidad de masa es $\mathbf{F} = -\left(\frac{4\pi G \rho_0}{3r}\right) \hat{\mathbf{u}}_r$ para $0 < r \leq a$.

b) Encuentre el potencial gravitacional asociado a esta fuerza

c) Imagine un tunel que atraviesa la esfera pasado por su centro. Encuentre la ecuación de movimiento y la expresión del período para una partícula de masa m , que se deja caer por ese túnel.

22. Dado un vector potencial magnético \mathbf{A} tal que $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$. Muestre que

$$\iint_s \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} \quad \text{es invariante de calibre: } \mathbf{A}(\mathbf{r}) \rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{r}) + \nabla\chi(\mathbf{r})$$

23. La fuerza de Lorentz para una partícula con carga q que se mueve con una velocidad \mathbf{v} en un campo eléctrico \mathbf{E} y magnético \mathbf{B} es: $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$. Muestre que

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \\ \mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B} \end{array} \right\} \Rightarrow \mathbf{F} = \left[-\nabla\phi - \frac{d\mathbf{A}}{dt} + \nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}) \right]$$

Borrador Preliminar