

## Capítulo 7

# Series de Series

## 7.1. Series por todos lados

Las series o sucesiones se nos presentan casi por todos lados en Física. Cuando no sabemos resolver un problema analíticamente, lo más cercano serán las soluciones por series, por cuanto las series nos ayudarán a definir funciones y a estudiar su continuidad o derivabilidad.

Representaremos una serie como

$$S_i = \sum_{n=1}^i a_n \quad \begin{cases} i = N & \implies \text{la serie es finita con } N \text{ elementos} \\ i \rightarrow \infty & \implies \text{la serie es infinita} \end{cases}$$

Nos van a interesar las series infinitas, ellas contienen a las series finitas a las cuales llamaremos sumas parciales. Una serie infinita  $S_\infty$  la podremos separar en sumas parciales finitas  $S_i$ , y si la suma parcial converge a un número finito  $S$  cuando  $i \rightarrow \infty$  diremos que la serie *converge*. Si no, diremos que *diverge*. Se dirá que la serie *diverge* si el valor de la sumatoria aumenta indeteniblemente, pero también puede oscilar, con lo cual tampoco converge.

$$S_i = \sum_{n=1}^i (-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots + (-1)^i + \dots$$

Esto se puede formalizar un poco diciendo que la condición para la existencia de un límite  $S$  es que para cada  $\epsilon > 0$  existe un número  $N = N(\epsilon)$  tal que

$$\|S - S_i\| < \epsilon \quad \text{para } i > N \quad \implies \|S_j - S_i\| < \epsilon \quad \text{para, todo } i, j > N$$

Esta afirmación se denomina **criterio de Cauchy**<sup>1</sup> sobre la convergencia de las series parciales. Esto es, la condición necesaria y suficiente para que una suma parcial  $S_i$  converja y quiere decir que las sumas parciales convergen a medida que avanzamos en los términos de la serie.

### 7.1.1. La Suma de la Serie

De las series nos interesará conocer cuanto suman. Es decir, cuál es el valor de  $S_i$  para una serie finita cuando  $i = N$  Pero también estaremos interesados en conocer cuánto suma una serie infinita. Empecemos con las finitas.

#### Las Series de Siempre

De siempre hemos conocido algunas series emblemáticas

**Serie aritmética** Desde siempre hemos oído hablar de progresiones aritméticas. Ellas son, sencillamente

$$S_N = \sum_{n=0}^{N-1} (a + nd) = a + (a + d) + (a + 2d) + (a + 3d) + (a + 4d) + \dots + [a + (N - 1)d].$$

Es fácil comprobar que al desarrollar la serie en orden inverso y sumar ambas

$$\begin{array}{cccccccc} S_N = & a & & +(a + d) & & +(a + 2d) & & +(a + 3d) & & + \dots & + [a + (N - 1)d] \\ S_N = & [a + (N - 1)d] & + & [a + (N - 2)d] & + & [a + (N - 3)d] & + & [a + (N - 4)d] & + & \dots & + a \end{array}$$

<sup>1</sup>Augustin Louis Cauchy Paris, 1789 - 1857, matemático francés pionero en los estudios de análisis (real y complejo) y de la Teoría de los Grupos de Permutación. Cauchy hizo aportes importantes en los criterios de convergencia y divergencia de series infinitas, así como también, en ecuaciones diferenciales, determinantes, probabilidades y Física Matemática

Con lo cual

$$S_N = \frac{N}{2} [a + a + (N - 1)d] \rightarrow S_N = \frac{N}{a} [\text{Primer Término} + \text{Ultimo Término}]$$

obviamente, si  $N \rightarrow \infty$  la serie diverge.

**Serie Geométrica** De ésta también sabemos desde siempre....

$$S_N = a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^{N-1} = \sum_{i=0}^N ar^i$$

y si restamos

$$\begin{array}{r} S_N = a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^{N-1} \\ rS_N = ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \dots + ar^N \end{array}$$

también es inmediato comprobar que si  $\|r\| < 1$

$$S_N = \frac{a(1 - r^N)}{1 - r} \quad \text{con lo cual tendremos que la suma de la serie será } S = \lim_{N \rightarrow \infty} S_N = \frac{a}{1 - r}$$

y, divergerá (u oscilará) si  $\|r\| \geq 1$

**Series Aritmético-geométricas** Estas series, un poco más exóticas y como su nombre lo sugiere son una combinación de las anteriores. Estos es

$$S_N = a + (a + d)r + (a + 2d)r^2 + (a + 3d)r^3 + (a + 4d)r^4 + \dots + [a + (N - 1)d]r^N = \sum_{n=0}^{N-1} (a + nd)r^n$$

y con la misma estrategia de las geométricas se llega a encontrar el valor de su, nada intuitiva, suma

$$S_N = \frac{a - [a + (N - 1)d]r^N}{1 - r} + \frac{rd(1 - r^{N-1})}{(1 - r)^2}$$

Otra vez, si si  $\|r\| < 1$  entonces cuando  $N \rightarrow \infty$

$$S = \frac{a}{1 - r} + \frac{rd}{(1 - r)^2}$$

**Ejercicios** Algunos ejercicios (respectivos) de las situaciones anteriores lo constituyen

1. Encuentre la suma de los 100 primeros enteros
2. Encuentre la distancia total que recorre una pelota que rebota verticalmente y que en cada rebote pierde  $2/3$  de su energía cinética
3. Encuentre la suma de la serie  $S = 2 + \frac{5}{2} + \frac{8}{4} + \frac{11}{8} + \dots$

**Serie Armónica** Quizá no la conocíamos con este nombre (y menos por sus propiedades) pero seguro nos la hemos tropezado

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

Esta serie es engañosa, en apariencia parece converger, pero no es así. Si analizamos con más cuidado, veremos que hay sutilezas

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \underbrace{\frac{1}{2}}_{s_0} + \underbrace{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)}_{s_1} + \underbrace{\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right)}_{s_2} + \underbrace{\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \cdots + \frac{1}{16}\right)}_{s_3} + \cdots$$

y puede ser reescrita como

$$1 + \underbrace{\frac{1}{1+1}}_{s_0} + \underbrace{\frac{1}{2+1} + \frac{1}{2+2}}_{s_1} + \underbrace{\frac{1}{4+1} + \frac{1}{4+2} + \frac{1}{4+3} + \frac{1}{4+4}}_{s_2} + \underbrace{\frac{1}{8+1} + \frac{1}{8+2} + \cdots + \frac{1}{8+8}}_{s_3} + \cdots + \sum_{j=1}^{2^n} \frac{1}{2^n + j} + \cdots$$

con lo cual

$$s_0 = \frac{1}{2}; \quad s_1 = \frac{7}{12} > \frac{1}{2}; \quad s_2 = \frac{533}{840} > \frac{1}{2}; \quad s_3 = \frac{95549}{144144} > \frac{1}{2};$$

y claramente diverge ya que

$$1 + s_0 + s_1 + s_2 + s_3 + \cdots > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots$$

Esta prueba aparentemente se le debe a Nicole D'Oresme<sup>2</sup>. Una de las generalizaciones de la serie armónica es la función Zeta de Riemann<sup>3</sup>  $\zeta(p) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-p}$ , la cual analizaremos más adelante en la sección 7.1.3.

### El método de la diferencia

A veces para una serie  $S_N = \sum_{n=1}^N a_n$  uno encuentra que para el término n-ésimo  $a_n = f(n) - f(n-1)$  para alguna función. En ese caso es inmediato demostrar

$$S_N = \sum_{n=1}^N a_n = f(N) - f(0) \quad \Rightarrow \quad S_N = \sum_{n=1}^N a_n = \sum_{i=1}^m f(N-k+1) - \sum_{i=1}^m f(1-k) \quad (7.1)$$

más aún, se puede ir más allá. Si identificamos que el término n-ésimo tiene la forma de  $a_n = f(n) - f(n-m)$  es fácilmente demostrable que la suma de la serie se puede escribir como la segunda ecuación de (7.1). Hay que hacer notar que el argumento  $n-m$  puede ser positivo o negativo. Con lo cual el método de la diferencia resulta versátil y muy útil cuando se requiere encontrar la suma de series de variada dificultad

<sup>2</sup>Nicole D'Oresme (1323-1382) Matemático francés que inventó la geometría coordenada antes de Descartes. Más detalles en <http://www-history.mcs.st-and.ac.uk> y más detalles sobre la serie armónica en <http://mathworld.wolfram.com/HarmonicSeries.html>

<sup>3</sup>Georg Friedrich Bernhard Riemann 1826 Hanover, Alemania - 1866 Selasca, Italia, Matemático alemán cuyas ideas sobre las geometría del espacio han tenido un profundo impacto en el desarrollo de la Física Teórica. Igualmente clarificó la noción de integral al introducir el concepto de lo que hoy se conoce como *integral de Riemann*. Más detalles en <http://www-history.mcs.st-and.ac.uk>

- Así, la suma de la serie

$$S_N = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n(n+1)} \rightarrow a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \left( \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \right) \rightarrow f(n) = \frac{-1}{n+1}$$

se podrá expresar como

$$S_N = f(N) - f(0) = \frac{-1}{N+1} + 1 = \frac{N}{N+1}$$

- También siguiendo la estrategia de la expansión en fracciones simples se puede encontrar que

$$S_N = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n(n+2)} \rightarrow a_n = \frac{1}{n(n+2)} = - \left( \frac{1}{2(n+2)} - \frac{1}{2n} \right) \rightarrow f(n) = \frac{-1}{2(n+2)}$$

de forma y manera que

$$S_N = f(N) + f(N-1) - f(0) - f(-1) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{N+2} + \frac{1}{N+1} \right)$$

Con alguna frecuencia surgen las series de números naturales. La más simple es

$$S_N = 1 + 2 + 3 + \dots + N = \sum_{n=1}^N n = \frac{N(N+1)}{2} \quad \text{una serie aritmética de razón } d = 1$$

o también más interesante puede ser la serie de cuadrados de números enteros

$$S_N = 1 + 2^2 + 3^2 + \dots + N^2 = \sum_{n=1}^N n^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}$$

Este resultado, nada intuitivo, surge de la aplicación ingeniosa del método de la diferencia. Tal y como hemos dicho, se trata de encontrar que el elemento genérico de la serie  $a_n = f(n) - f(n-1) = n^2$  para alguna función. Suponga una función del tipo

$$f(n) = n(n+1)(2n+1) \Rightarrow f(n-1) = (n-1)n(2n-1) \Rightarrow f(n) - f(n-1) = 6n^2$$

con lo cual

$$a_n = n^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6} \Rightarrow S_N = \frac{f(N) - f(0)}{6} = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}$$

**Ejercicio** Muestre que  $S_N = 1 + 2^3 + 3^3 + \dots + N^3 = \sum_{n=1}^N n^3 = \left( \sum_{n=1}^N n \right)^2 = \frac{N^2(N+1)^2}{4}$

### Sumando por analogía

Como siempre, intentaremos proceder por analogía. La intención es expresar una serie complicada como sumas de series conocidas. Considere el siguiente ejemplo

$$S_N = \sum_{n=1}^N (n+1)(n+3) = \sum_{n=1}^N (n^2 + 4n + 3) = \left( \sum_{n=1}^N n^2 \right) + \left( \sum_{n=1}^N 4n \right) + \left( \sum_{n=1}^N 3 \right)$$

con lo cual

$$S_N = \left( \frac{N(N+1)(2N+1)}{6} \right) + \left( \frac{N(N+1)}{2} \right) + (3N) = \frac{N(2N^2 + 15N + 31)}{6}$$

### 7.1.2. Algebra Elemental de Series

Las series se suman, se igualan y se multiplican. Para ello es importante que tengamos cuidado con los índices y sus valores. Consideremos un par de series infinitas  $S_\infty = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$  y  $\tilde{S}_\infty = \sum_{n=0}^{\infty} b_n$  con lo cual la suma de esas series será

$$S_\infty + \tilde{S}_\infty = \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)$$

Los índices son mudos y se acomodan para ser sumados. Para sumar series es imperioso que los índices de cada serie comiencen con el mismo valor esto es

$$\left. \begin{array}{l} S_\infty = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \\ \tilde{S}_\infty = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \end{array} \right\} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{j=1}^{\infty} b_j = \sum_{n=1}^{\infty} (a_{n-1} + b_n) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$$

nótese que hemos hecho  $j = n$  y  $n = n - 1$ .

Algo parecido ocurre cuando las series se igualan

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} \iff \sum_{n=0}^{\infty} ((n+1) a_{n+1} + b_n) = 0$$

Para finalizar se puede comprobar que las series y también se pueden multiplicar

$$[S_\infty] [\tilde{S}_\infty] = \left[ \sum_{n=0}^{\infty} a_n \right] \left[ \sum_{n=0}^{\infty} b_n \right] = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \quad \text{donde} \quad c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_j b_{n-j} + \dots + a_{n-2} b_2 + a_{n-1} b_1 + a_n b_0$$

### 7.1.3. Criterios de Convergencia

Sólo podremos calcular la suma de algunas series, en la mayoría nos será imposible y nos tendremos que conformar con saber si convergen o no, o peor aún, si una suma parcial converge sin poder calcular el valor de esa suma. Los términos de una serie pueden ser positivos, negativos o números complejos y las series pueden converger (decrecer o crecer hacia un valor finito) diverger (incrementar o decrecer indefinidamente) u oscilar, Existen una serie de criterios y teoremas de aplicación general que expondremos a continuación.

#### Convergencia Absoluta o Condicional

Para estudiar la convergencia de una serie dada i.e.  $\sum_{n=1}^i a_i$  siempre podremos asociarle otra de la forma  $\sum_{n=1}^i \|a_i\|$ , es decir la serie de valores absolutos, con lo cual garantizamos la positividad (y que sean números reales) de los términos de la serie. Si la serie de los valores absolutos  $\sum_{n=1}^i \|a_i\|$  converge, entonces también convergerá la serie original  $\sum_{n=1}^i a_i$  y diremos que esa serie es *absolutamente convergente*. Sin embargo si la serie de valores absolutos diverge, no podremos decir que  $\sum_{n=1}^i a_i$  siempre converja. De hecho si converge diremos que es *condicionalmente convergente* y, con un rearrreglo de sus términos podrá converger, diverger u oscilar.

Para una serie de términos positivos el criterio de convergencia más intuitivo (necesario pero no suficiente) es que en límite cuando  $n \rightarrow \infty$  el término  $n$ ésimo tienda a cero, i.e.  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ . Con lo cual tenemos que si esta condición no se satisface, la serie diverge.

### Criterio de Comparación

En segundo lugar de simplicidad está el criterio de comparación entre un par de series de términos positivos. Si conocemos el comportamiento de una de ellas comparamos el de la otra. Esto es, suponga que consideremos dos serie, una de prueba  $S_\infty = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$  y una serie conocida y convergente (o divergente)  $\tilde{S}_\infty = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{a}_n$ , entonces

$$\text{Si } \tilde{S}_\infty = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{a}_n \text{ converge y } \forall n \text{ se tiene que } \tilde{a}_n \geq a_n \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{a}_n \geq \sum_{n=0}^{\infty} a_n \Rightarrow S_\infty \text{ converge}$$

Por otro lado

$$\text{Si } \tilde{S}_\infty = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{a}_n \text{ diverge y } \forall n \text{ se tiene que } 0 \leq \tilde{a}_n \leq a_n \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{a}_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} a_n \Rightarrow S_\infty \text{ diverge}$$

Para ilustrar esta estrategia consideremos las siguientes series

$$S_\infty = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{25} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n! + 1}$$

En ese caso compararmos con con una serie conocida

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots = 1 + 1 + \underbrace{\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots}_e = 1 + e$$

y es claro que la serie indicada no es otra cosa que  $e$ , con lo cual la serie claramente converge y su suma es  $1 + e$ .

### Criterio de la Raíz

Dada una serie de términos positivos  $S_\infty = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ , el criterio de la raíz (o también de la raíz de Cauchy) puede resumirse en el siguiente par de afirmaciones. Si

$$(a_n)^{\frac{1}{n}} \leq \rho < 1 \quad \text{para un valor de } n \text{ suficientemente grande y } \rho \text{ independiente de } n \Rightarrow \text{converge}$$

$$(a_n)^{\frac{1}{n}} > 1 \quad \text{para un valor de } n \text{ suficientemente grande y } \rho \text{ independiente de } n \Rightarrow \text{diverge}$$

$$(a_n)^{\frac{1}{n}} = 1 \quad \text{para un valor de } n \text{ suficientemente grande y } \rho \text{ independiente de } n \Rightarrow \text{diverge o converge}$$

Otra forma, más compacta de expresarlo sería

$$\text{Si } \rho = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^{\frac{1}{n}} \text{ entonces, si } \begin{cases} \rho < 1 \Rightarrow \text{converge} \\ \rho > 1 \Rightarrow \text{diverge} \\ \rho = 1 \Rightarrow \text{converge o diverge} \end{cases}$$

Es fácil ver que si utilizamos el criterio de comparación, entonces

$$(a_n)^{\frac{1}{n}} \leq \rho \Rightarrow a_n \leq \rho^n \Rightarrow \begin{cases} \text{cuando } \rho < 1 \text{ la serie converge} \\ \text{cuando } \rho \geq 1 \text{ la serie diverge} \end{cases}$$

### Criterio de D'Alembert

Dada una serie de términos positivos  $S_\infty = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ , el criterio de D'Alembert<sup>4</sup> o también llamado criterio del cociente, compara el valor relativo de un término de la serie con el que le precede. Este criterio se resume también fácilmente

$$\text{Si } \rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{a_{n+1}}{a_n} \right) \text{ entonces, si } \begin{cases} \rho < 1 \implies \text{converge} \\ \rho > 1 \implies \text{diverge} \\ \rho = 1 \implies \text{indeterminado} \end{cases}$$

Nótese que si

$$\rho < 1 \implies \rho < r < 1 \implies \frac{a_{n+1}}{a_n} < r \implies a_{n+1} = a_n r$$

Entonces para un  $N < n$  pero también suficientemente grande, tendremos que los términos de la serie a partir de ese  $N$  serán

$$a_N + a_{N+1} + a_{N+2} + a_{N+3} \cdots = a_N + r a_N + r^2 a_N + r^3 a_N \cdots = a_N (1 + r + r^2 + r^3 + r^4 \cdots)$$

y que no es otra cosa que una serie geométrica con razón  $r < 1$  y por consiguiente converge. Es claro que un argumento similar se puede utilizar para probar la divergencia.

Un ejemplo inmediato lo constituye la serie

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{3}{8} + \frac{1}{4} + \frac{5}{32} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} \implies \frac{\left(\frac{n+1}{2^{n+1}}\right)}{\left(\frac{n}{2^n}\right)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{n+1}{n} \implies \rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{n+1}{2^{n+1}}\right)}{\left(\frac{n}{2^n}\right)} = \frac{1}{2} < 1$$

con lo cual tiene converger.

### Criterio de la Integral de Maclaurin

El criterio de la Integral de Maclaurin<sup>5</sup> es otro criterio de comparación, pero esta vez se compara la serie con una integral. Así supondremos que existe una función  $f(x)$  continua y monótonamente decreciente para un valor de  $x \geq x_0$  y que, adicionalmente, se cumple que para algún valor entero  $x = n$  el valor de la función es igual a un término de la serie. Esto es  $f(n) = a_n$ . Entonces se tendrá que si el límite de  $\lim_{N \rightarrow \infty} \int_1^N dx f(x)$  existe y es finito, entonces  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  converge. Por el contrario si el límite no existe o es infinito, entonces diverge.

La idea de este criterio es comparar la integral de  $f(x)$  (es decir, el área bajo la curva) con la suma de rectángulos que representa la serie. Entoces, la suma parcial

$$s_i = \sum_{n=1}^i a_n \equiv \sum_{n=1}^i f(n) \text{ Pero, } \left\{ \begin{array}{l} s_i > \int_1^{i+1} dx f(x) \\ s_i - a_1 < \int_1^i dx f(x) \end{array} \right\} \implies \int_1^{i+1} dx f(x) \leq s_i \leq \int_1^i dx f(x) + a_1$$

<sup>4</sup>Jean Le Rond D'Alembert París, Francia 1717 - 1783 Matemático francés pionero en el estudio de las ecuaciones diferenciales y su utilización en la Física, en particular en el estudio de los fluidos

Más detalles en <http://www-history.mcs.st-and.ac.uk>

<sup>5</sup>Colin Maclaurin 1698, Argyllshire, Escocia - 1746 Edinburgo, Escocia. Matemático escocés quien escribió el *Tratado de las Fluxiones* el primer tratado que expuso de una manera sistemática y rigurosa el cálculo diferencial ideado por Newton. Este tratado fue como respuesta a la crítica de Berkeley sobre la falta de rigurosidad de los métodos Newton

con lo cual, al hacer  $i \rightarrow \infty$  tendremos que si el límite de la integral existe, entonces la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  converge.

$$\int_1^{\infty} dx f(x) \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \int_1^{\infty} dx f(x) + a_1$$

Un ejemplo inmediato podría ser determinar si la siguiente serie converge

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(n - \frac{3}{2}\right)^2} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{\left(x - \frac{3}{2}\right)^2} \Rightarrow \lim_{N \rightarrow \infty} \int^N dx \frac{1}{\left(x - \frac{3}{2}\right)^2} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \frac{-1}{N - \frac{3}{2}} \right) = 0$$

con lo cual claramente converge

Este criterio es muy útil para acotar (entre un ínfimo y un supremo) el residuo de una determinada serie. Vale decir

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^N a_n + \underbrace{\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n}_{\text{Residuo}} \Rightarrow \int_{N+1}^{\infty} dx f(x) \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n \leq \int_{N+1}^{\infty} dx f(x) + a_{N+1}$$

El otro ejemplo, más elaborado es comprobar que la función Zeta de Riemann,  $\zeta(p) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-p}$ , efectivamente converge. En este caso  $f(x) = x^{-p}$ , entonces

$$\zeta(p) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-p} \Rightarrow \int_1^{\infty} dx x^{-p} = \begin{cases} \frac{x^{-p+1}}{-p+1} \Big|_1^{\infty} & \text{Para } p \neq 1 \\ \ln x \Big|_1^{\infty} & \text{Para } p = 1 \end{cases}$$

y es claro que para  $p > 1$  el límite existe y es finito, por lo tanto, la función Zeta de Riemann,  $\zeta(p) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-p}$ , converge para  $p > 1$

### Series alternantes y convergencia condicional

Hasta ahora todos los criterios que analizamos eran para una serie de términos positivos  $S_{\infty} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$  por lo cual todos esos criterios nos llevaban al concepto de series absolutamente convergente. Esto es, si  $\sum_{n=0}^{\infty} \|a_n\|$  converge, entonces  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  también converge. Sin embargo, muchas veces nos tendremos que conformar con que una serie sea simplemente convergente y no requerir que sea absolutamente convergente. Este es el caso de las series alternantes. Series en las cuales se alternan términos positivos y negativos. Son series del tipo

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + \cdots + a_{2n-1} - a_{2n} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} (a_n) \quad \text{con } a_n \geq 0$$

Entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} (a_n) \text{ converge, si } \begin{cases} a_n \rightarrow 0 & \text{cuando } n \rightarrow \infty \\ \wedge \\ a_n > a_{n-1} & \forall n > N \end{cases}$$

De otro modo la serie oscilará

Estas condiciones son fáciles de ver si reorganizamos la serie de los primeros  $2m$  términos, a partir de un determinado  $N$  par y  $N > n$ , entonces

$$s_{2m} = (a_N - a_{N-1}) + (a_{N-2} - a_{N-3}) + \cdots + (a_{N+2m-2} - a_{N+2m-1})$$

donde todos los paréntesis son positivos, con lo cual  $s_{2m} > 0$  y se incrementa al incrementar  $m$ . Ahora bien, si rearreglamos la serie tendremos que

$$s_{2m} = a_N - (a_{N-1} - a_{N-2}) - (a_{N-3} - a_{N-4}) + \cdots - (a_{N+2m-1} - a_{N+2m-2}) - a_{N+2m-1}$$

y, otra vez los paréntesis son positivos y es inmediato comprobar que entonces  $s_{2m} < a_n$  para todo  $m$ . Como  $a_n \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$ , la serie alternante necesariamente converge.

## 7.2. Series de potencias

El siguiente paso en este estudio, será el ampliar la idea de serie al permitir que sus términos sean función de alguna variable (una o varias), esto es  $a_n = a_n(x)$ . Esta extensión del concepto de serie, trae como consecuencia que ahora las sumas parciales dependen de  $x$

$$s_n = s_n(x) = \sum_{k=1}^n a_k(x) = a_0(x) + a_1(x) + a_2(x) + \cdots \quad \text{con lo cual, si} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)$$

Entonces, el comportamiento de la serie también dependerá de la variable. Ahora la convergencia de la serie podrá ser posible para algunos valores de  $x$  y no para otros. El punto central con las en las series de funciones  $f(x)$  (complicadas) es la tratar de construir funciones como una serie de funciones,  $a_k(x)$ , más simples. Así, esas sumas parciales  $f_n(x)$  constituirán la función deseada

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^n a_k(x) \Rightarrow f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k(x)$$

Es decir estaremos interesados en aquellas funciones a las cuales converjan las sumas parciales de una serie.

Si bien más adelante abordaremos este concepto haciéndolo extensivo a cualquier función, para fijar conceptos, comenzaremos por las series de funciones más comunes: Las series de potencias. Esto es, asimilaremos una serie de potencias  $a_n = c_n x^n$  a un polinomio de grado infinito.

$$P(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad \text{o también} \quad P(x - x_0) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$$

Esta asociación tiene la ventaja de permitirnos intuir algunos comportamientos de la serie para algunos valores de  $x$ . Los coeficientes  $c_n$  son números independientes de  $x$ . Pero, más aún, estas series pueden ser series de potencias de número complejos. Vale decir,  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$  con  $z = x + iy$

### 7.2.1. Convergencia de una serie de potencias

Claramente, podremos utilizar todos los criterios que hemos desarrollado anteriormente. Así una serie de potencias  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$  converge en un punto  $x_0$  si el  $\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^m a_n (x - x_0)^n$  existe, para  $x = x_0$ ; para todo  $x$  o para algunos  $x$

Una serie de potencias  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$  convergerá absolutamente sí el

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^n \left\| c_j (x - x_0)^j \right\| = l$$

existe. También se cumplirá el criterio de convergencia absoluta. Esto era, si  $\sum_{n=0}^{\infty} \|c_n (x - x_0)^n\|$  converge  $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$  converge, pero el inverso no es siempre verdad.

Los criterios más populares para evaluar la convergencia, se seguirán cumpliendo. Así el criterio de Dálembert y el de la raíz de Cauchy se podrán reescribir como:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{c_{n+1} (x - x_0)^{n+1}}{c_n (x - x_0)^n} \right\| = l \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c_n (x - x_0)^n} = l(x) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} l(x) < 1 & \Rightarrow \text{converge} \\ l(x) > 1 & \Rightarrow \text{diverge} \end{cases}$$

Sólo que ahora es bueno enfatizar que  $l = l(x)$ , es decir que el límite dependerá de la variable. Llamaremos, de ahora en adelante a este límite el *radio o entorno de convergencia* y lo denotaremos por  $l \equiv \rho = \rho(x)$ . El cual delimitará los valores de  $x$  para que la serie de potencias converja. Vemos el siguiente ejemplo en el cual consideremos la siguiente serie

$$s_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}} \right\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{x}{n+1} \right\| = 0$$

es decir,  $\rho = \rho(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0$  con lo cual la serie converge para todo valor de  $x$ . Otro caso ocurre cuando consideramos la siguiente serie de potencias:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n (x - 2)^n \Rightarrow \rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{(-1)^{n+2} (n+1) (x - 2)^{n+1}}{(-1)^{n+1} n (x - 2)^n} \right\| = \|x - 2\| \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{n+1}{n} \right\|$$

$$\rho = \|x - 2\| \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{n+1}{n} \right\| = \|x - 2\| \Rightarrow \begin{cases} \text{converge si } \|x - 2\| < 1 \Rightarrow 1 < x < 3 \\ \text{diverge si } \|x - 2\| > 1 \end{cases}$$

Es decir, la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n (x - 2)^n$  convergerá únicamente para  $1 < x < 3$ . Para otros valores de  $x$ , diverge.

Para puntualizar

- Si una serie converge en  $x = x_1$ , convergerá absolutamente para  $\|x - x_0\| < \|x_1 - x_0\|$  y divergerá para  $\|x - x_0\| > \|x_1 - x_0\|$
- Se llama radio de convergencia,  $\rho = \rho(x)$  a aquella cantidad tal que la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$  converge para  $\|x - x_0\| < \rho$  y diverge para  $\|x - x_0\| > \rho$ . Una serie  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$  que converge únicamente para  $x = x_0$  tendrá un radio de convergencia  $\rho = 0$ , mientras que una que converja para todo  $x$  tendrá un radio de convergencia  $\rho = \infty$

### 7.2.2. Convergencia uniforme

En definitiva se puede rephrasing el criterio de convergencia de Cauchy que vimos al comenzar este capítulo 7.1. Para cualquier valor de  $\epsilon > 0$ , tan pequeño como uno quiera, siempre existirá un número  $N$  independiente de  $x$ , con  $a \leq x \leq b$  tal que

$$\text{Si } S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \quad \Rightarrow \quad \|S(x) - s_n(x)\| < \epsilon \quad \forall x \in [a, b] \wedge n \geq N.$$

Con ello es inmediato indentificar el error que se comete cuando se corta la serie en un  $N$  suficientemente grande

$$S(x) = \underbrace{\sum_{n=1}^N a_n(x)}_{s_n(x)} + \underbrace{\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n(x)}_{\approx \epsilon}$$

Para el caso de series de funciones, consideraremos existen un par de criterios que identifican la convergencia uniforme y tienen, también cierta popularidad. El criterio Mayorante de Weierstrass<sup>6</sup> y el criterio de Abel. A continuación los resumiremos.

Hay que resaltar el punto que la suma de funciones continuas  $a_n(x)$  no necesariamente habrá de ser continua, el concepto de convergencia uniforme busca garantizar que esa suma de funciones continuas también será continua. Así, recordamos la idea de continuidad de una función. Una función será continua si sus límites por la derecha y por izquierda coinciden

$$\lim_{t \rightarrow x^\pm} f(t) = f(x) \quad \Rightarrow \quad \lim_{t \rightarrow x^\pm} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \stackrel{?}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{t \rightarrow x^\pm} f_n(x)$$

Es decir, al suponer que la suma de términos continuos tiende a una función continua estamos suponiendo que podemos intercambiar los límites. pero eso no es simple cierto. Considere el caso (extremo)

$$f_n = n^2 x (1 - x^2)^n \text{ con } 0 \leq x \leq 1 \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad \left\{ \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n = 0 \Rightarrow \int_0^1 dx (\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)) = 0 \\ \int_0^1 dx f_n(x) = \frac{n^2}{2(n+1)} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 dx f_n \rightarrow \infty \end{array} \right.$$

Claramente no se pueden intercambiar los límites.

#### Criterio Mayorante de Weierstrass

Si encontramos una serie convergente de números positivos

$$\mathcal{M} = \sum_{j=1}^{\infty} M_j \quad \text{con } M_i \geq \|a_i(x)\| \quad \forall x \in [a, b] \quad \text{entonces la serie } \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \text{ es } \mathbf{uniformemente} \text{ convergente}$$

La demostración se obtiene a partir de la definición misma de convergencia. Si  $\sum_{j=1}^{\infty} M_j$  converge, entonces para  $n + 1 \geq N$  se tiene

$$\sum_{j=n+1}^{\infty} M_j < \epsilon \quad \text{y como } \|a_i(x)\| \leq M_i \quad \Rightarrow \quad \sum_{j=n+1}^{\infty} \|a_i(x)\| < \epsilon \quad \Rightarrow \quad \|S(x) - s_n(x)\| \equiv \sum_{j=n+1}^{\infty} \|a_i(x)\| < \epsilon$$

<sup>6</sup>Karl Theodor Wilhelm Weierstrass Westphalia 1815 - Berlin 1897 Matemático Alemán con importantes contribuciones al análisis complejo mediante la utilización de series

con la cual la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$  será uniformemente convergente para todo  $x \in [a, b]$ . Ahora bien, como consideramos los  $M_i \geq 0$ . La serie en cuestión también será absolutamente convergente. Otra vez, los criterios de convergencia absoluta y, en este caso, de convergencia uniforme, no son consecuencia uno del otro, ni están relacionados. Las series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x^2} \quad \text{para } -\infty < x < \infty \quad \wedge \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \quad \text{para } 0 \leq x \leq 1$$

convergen uniformemente pero NO absolutamente. Sin embargo, en el intervalo  $0 \leq x \leq 1$  la serie  $\sum_{j=0}^{\infty} (1-x)x^j$  converge absolutamente pero no uniformemente, por cuanto tiene una discontinuidad. Se puede demostrar que

$$\sum_{j=0}^{\infty} (1-x)x^j = \begin{cases} = 1 & 0 \leq x < 1 \\ = 0 & x = 1 \end{cases}$$

con lo cual se puede concluir que una serie arbitraria  $f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j(x)$  no podrá converger uniformemente en intervalos en los cuales la función  $f(x)$  sea discontinua.

### Criterio de Abel

El criterio de Abel se puede resumir de la siguiente forma: dada una serie de la forma

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i(x) \quad \wedge \quad a_i(x) = c_n f_i(x) \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n a_j(x) = S$$

y por lo tanto la serie converge uniformemente en  $[a, b]$ . Para que se cumpla el criterio de Abel,  $f_n(x)$  tiene que estar acotada,  $0 \leq f_n \leq M \forall n$ , tiene que ser monótonamente decreciente en el intervalo en el cual esté definida,  $f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$  con  $x \in [a, b]$

### 7.2.3. Algebra y convergencia de series de potencias

El álgebra elemental de series que mencionamos en la sección 7.1.2 se puede reconsiderar a la luz de las series de potencias. De esta forma recordamos que los índices en las series son mudos

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n n (x-x_0)^{n-1} = \sum_{j=1}^{\infty} a_j j (x-x_0)^{j-1} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1} (k+1) (x-x_0)^k$$

en la última sumatoria hemos hecho  $k = j - 1$ , por lo cual  $j = k + 1$ .

Las series se igualan

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-x_0)^n &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n n (x-x_0)^{n-1} \\ \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-x_0)^n &= \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1} (k+1) (x-x_0)^k = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} (n+1) (x-x_0)^n \end{aligned}$$

por lo cual

$$b_n = a_{n+1} (n+1)$$

si la igualdad hubiera sido

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n (x-x_0)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} (n+1) (x-x_0)^n \implies a_{n+1} = \frac{a_n}{(n+1)}$$

Las series se suman

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n + \sum_{k=2}^{\infty} b_k (x-x_0)^k = a_0 + a_1 (x-x_0) + \sum_{n=2}^{\infty} (a_n + b_n) (x-x_0)^n$$

o también

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n + \sum_{k=0}^{\infty} b_{k+2} (x-x_0)^{k+2} = a_0 + a_1 (x-x_0) + \sum_{n=2}^{\infty} (a_n + b_n) (x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + c_{n-2}) (x-x_0)^n$$

y en este último caso  $c_{-2} = c_{-1} = 0$  y  $c_i = b_{i+2}$ . Nótese como en los dos ejemplos anteriores hemos hecho coincidir los el comienzo de los dos índices de la sumatoria.

La series también se multiplican, esto es

$$\left[ \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \right] \left[ \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-x_0)^n \right] = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n$$

con

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \dots + a_j b_{n-j} + \dots + a_{n-2} b_2 + a_{n-1} b_1 + a_n b_0$$

Si alguna de las series de potencias es absolutamente convergente, entonces su multiplicación con otra, será absolutamente convergente.

Pero también las series de potencias se ¡ **invierten** ! y para ello utilizamos todo lo visto anteriormente veamos. Supongamos que se tiene una serie del tipo

$$y - y_0 = a_0 + a_1 (x-x_0) + a_2 (x-x_0)^2 + \dots + a_n (x-x_0)^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$$

Es decir tenemos  $y-y_0$  expresado en términos de una serie de potencias de  $(x-x_0)^n$  entonces, igual podremos plantearnos invertir el proceso, vale decir, expresar  $(x-x_0)$  en términos de potencias  $(y-y_0)^n$  Esto es

$$(x-x_0) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (y-y_0)^n \implies (x-x_0) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \left[ \sum_{j=0}^{\infty} a_j (x-x_0)^j \right]^k$$

y a lo bestia al igualar términos con la misma potencia, despejamos los coeficientes  $b_n$  en términos de los  $a_n$ , de forma que

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{1}{a_1} \\ b_2 &= -\frac{a_2}{(a_1)^3} \\ b_3 &= \frac{2(a_2)^2 - a_1 a_3}{(a_1)^5} \\ b_4 &= \frac{5a_1 a_2 a_3 - a_1^2 a_4 - 5a_2^3}{(a_1)^7} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Igualmente, si una serie  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$  converge para un entorno  $-R \leq x \leq R$  entonces por el criterio de Mayorante de Weierstrass, entonces convergerá absoluta y uniformemente para  $-S \leq x \leq S$  con  $0 \leq S \leq R$ . Más aún, el criterio de Abel nos garantiza las siguientes propiedades

- podemos extender la idea de continuidad de una serie, dado que todos los términos  $a_n(x) = c_n(x-x_0)^n$  son funciones continuas de  $x$  y  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$  converge uniformemente para un entorno  $-S \leq x \leq S$ , entonces la función  $f(x)$  es continua en el intervalo de convergencia.
- Si los términos  $a_n(x) = c_n(x-x_0)^n$  son funciones continuas de  $x$ , entonces la serie puede ser derivada término a término

$$\frac{d[\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n]}{dx} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n(x-x_0)^{n-1}$$

(nótese como cambia el comienzo de la serie) y convergerá a

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n n(x-x_0)^{n-1} \rightarrow \frac{df(x)}{dx} \quad a_n(x) \wedge \frac{da_n(x)}{dx} \quad \text{continuas} \wedge \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x) \quad \text{converge uniformemente en } [a, b]$$

- De igual manera las series pueden ser integradas término a término

$$\int_a^b dx f(x) = \int_a^b dx \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b dx c_n(x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} (x-x_0)^{n+1}$$

#### 7.2.4. Series de Taylor

Para los físicos el uso apropiado (y frecuente) de la serie Taylor facilita la vida y muchos cálculos. La idea detrás de este tipo de series es la de la aproximación de una determinada función por una serie de potencias en donde existe una forma sistemática de construir los coeficientes y, dependiendo de el número de términos que utilicemos en la serie, tendremos idea de cuan aproximada es la serie y cuanto es el error que cometemos al desarrollar la serie hasta un determinado término. Así supodremos que  $f = f(x)$  es una función continua y continuamente diferenciable. Con lo cual, si denotamos  $\frac{df(x)}{dx} = f'(x)$ , entonces supondremos que  $f'(x), f''(x), f'''(x), \dots, f^{(n)}(x)$  están definidas en el intervalo  $[a, b]$ . Entonces, conocemos desde siempre que

$$\int_a^{a+h} dx f'(x) = f(a+h) - f(a) \quad \Rightarrow \quad f(a+h) = f(a) + \int_a^{a+h} dx f'(x) \quad \Rightarrow \quad f(a+h) \approx f(a) + hf'(a)$$

donde hemos supuesto que en intervalo  $[a, a+h]$  la función  $f'(x)$  es constante y tiene como valor  $f'(a)$ . Ahora bien, esto vale todo  $x$  y para cualquier función, por lo tanto se cumple que

$$f(x) \approx f(a) + (x-a)f'(a)$$

$$f'(x) \approx f'(a) + (x-a)f''(a)$$

$$f''(x) \approx f''(a) + (x-a)f'''(a)$$

⋮

$$f^{(n-1)}(x) \approx f^{(n-1)}(a) + (x-a)f^{(n)}(a)$$

Con lo cual podemos construir

$$f(a+h) = f(a) + \int_a^{a+h} dx f'(x) \approx f(a) + \int_a^{a+h} dx [f'(a) + (x-a)f''(a)] \approx f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2}f''(a)$$

que no es otra cosa que una aproximación de segundo orden a  $f(a+h)$ . En general podemos construir

$$\begin{aligned} f(a+h) &= f(a) + \int_a^{a+h} dx f'(x) = f(a) + \int_a^{a+h} dx \left[ f'(a) + \int_a^{a+h} dx f''(x) \right] \\ &= f(a) + hf'(a) + \int_a^{a+h} dv \left[ \int_a^{a+h} dx f''(x) \right] \\ &= f(a) + hf'(a) + \int_a^{a+h} du \left( \int_a^{a+h} dv \left[ f''(a) + \int_a^{a+h} dx f'''(x) \right] \right) \\ &= f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2}f''(a) + \int_a^{a+h} du \left( \int_a^{a+h} dv \left[ \int_a^{a+h} dx f'''(x) \right] \right) \end{aligned}$$

y si repetimos ese procedimiento  $n$  veces, suponiendo que las derivadas de  $f(x)$  existan, tendremos la aproximación  $n-1$  a la función. Esto es

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2!}f''(a) + \frac{h^3}{3!}f'''(a) + \dots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{n-1}(a) + \mathcal{R}_n$$

y también es fácil convencerse por inspección que el residuo o el error que cometemos en la aproximación  $n-1$  viene dado por la integración enésima de la derivada enésima, vale decir

$$\mathcal{R}_n = \int_a^{a+h} du \int_a^{a+h} dv \underbrace{\dots}_{n \text{ veces}} \int_a^{a+h} dx f^{(n)}(x)$$

y por el Teorema del Valor medio

$$\int_a^{a+h} d\tau g(\tau) = hg(\xi) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{R}_n = \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(\xi) \quad \text{con } a \leq \xi \leq a+h$$

Ahora bien, una elección astuta del parámetro  $h = x - a$  nos lleva a la conocida expresión de la serie de Taylor para una función de una variable

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \frac{(x-a)^3}{3!}f'''(a) + \dots + \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{n-1}(a) + \mathcal{R}_n$$

y el error vendrá dado por

$$\mathcal{R}_n = \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(\xi) \quad \text{con } a \leq \xi \leq a+h$$

así la expansión de Taylor especifica el valor de una función en un punto  $x$  en términos de el valor de la función y sus derivadas en un punto de referencia  $a$ . La expansión se hace en términos de potencias de la diferencia,  $(x-a)$ , entre el punto que se evalúa y el punto de referencia.

Algunas otras formas de expresar la serie de Taylor, serían

$$f(x+h) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{n!} f^n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n \frac{d^n}{dx^n} f(x)}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n \mathbb{D}^n}{n!} f(x) = e^{h\mathbb{D}} f(x) \quad \text{donde, } \mathbb{D} \equiv \frac{d}{dx}$$

Si el punto de referencia es  $a = 0$  tendremos la serie de Maclaurin

$$f(x) = f(0) + xf'(a) + \frac{x^2}{2!} f''(a) + \frac{x^3}{3!} f'''(a) + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} f^{n-1}(a) + \mathcal{R}_n$$

### Algunas Series de Taylor

Un listado incompleto de las series de Taylor más utilizadas es

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots && \text{para } -\infty < x < \infty \\ \text{sen } x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots && \text{para } -\infty < x < \infty \\ \text{cos } x &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} + \cdots && \text{para } -\infty < x < \infty \\ \text{arctan } x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)} + \cdots && \text{para } -1 < x < 1 \\ \ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \cdots && \text{para } -1 < x < 1 \\ (1+x)^m &= 1 + mx + m(m-1) \frac{x^2}{2} + m(m-1)(m-2) \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{m!}{n!(m-n)!} x^n + \cdots && \text{para } -\infty < x < \infty \end{aligned}$$

### La expansión binomial

Por lo frecuente y su uso, consideremos el caso de la expansión binomial

$$(1+x)^m = 1 + mx + m(m-1) \frac{x^2}{2} + m(m-1)(m-2) \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m!}{n!(m-n)!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m}{n} x^n$$

donde el término  $\binom{m}{n}$  se denomina el coeficiente binomial y la serie termina cuando  $m = n$ . Ahora bien, escrito de la formas compactas de la derecha se sugiere que el exponente  $m$  tendría que ser entero y positivo. Pero no es así. La serie explícita de la izquierda no se restringe a valores enteros y positivos de  $m$ . Por ello la forma compacta pero exacta de la expansión binomial.

$$\left(1 + \frac{x}{a}\right)^m = 1 + m \left(\frac{x}{a}\right) + \frac{m(m-1)}{2} \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} \left(\frac{x}{a}\right)^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1+m)}{\Gamma(1+n)\Gamma(1+m-n)} \left(\frac{x}{a}\right)^n$$

Donde hemos utilizado la función  $\Gamma(x)$  como la generalización del factorial para valores que no se restringen a enteros positivos. Cuando  $m$  es un entero positivo tendremos  $\Gamma(1+m) = m!$ . Nótese también que si el exponente es negativo,  $\left(1 + \frac{x}{a}\right)^m$  tiene una singularidad o un polo en  $x = -a$

### Taylor en varias variables

Sólo por razones de completitud, y para reforzar los conceptos de que es un desarrollo en series para una función alrededor de un determinado punto, escribiremos el desarrollo en series de Taylor para una función de dos variables  $f = f(x, y)$ . Esta es

$$f(x, y) = f(a, b) + (x - a) f_x|_{ab} + (y - b) f_y|_{ab} + \frac{1}{2!} [(x - a)^2 f_{xx}|_{ab} + 2(x - a)(y - a) f_{xy}|_{ab} + (y - a)^2 f_{yy}|_{ab}] \\ + \frac{1}{3!} [(x - a)^3 f_{xxx}|_{ab} + 3(x - a)^2(y - a) f_{xxy}|_{ab} + 3(x - a)(y - a)^2 f_{xyy}|_{ab} + (y - a)^3 f_{yyy}|_{ab}] + \dots$$

O más compacto

$$f(x^j + x_0^j) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (x^k \partial_k)^n f(x^m) \Big|_{x^m=x_0^m} \Rightarrow f(\vec{r} + \vec{a}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\vec{r} \cdot \vec{\nabla})^n f(x^m) \Big|_{\vec{r}=\vec{a}}$$

Dónde hemos utilizado la siguiente convención

$$f_x = \frac{\partial}{\partial x} = \partial_x; \quad f_y = \frac{\partial}{\partial y} = \partial_y; \quad f_{xx} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \partial_{xx}; \quad f_{xy} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} = \partial_{xy}; \quad f_{yy} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \partial_{yy}; \quad \dots$$

## 7.3. Series y Espacios de Hilbert

Hemos dejado “suelos” algunos conceptos para los espacios de Hilbert *infinito*-dimensional. El primero de estos conceptos es que un vector  $|a\rangle \in E^\infty$  surge la combinación lineal de elementos de una base infinita  $\{|e_i\rangle\}$ , ( de una serie) que converge al vector  $|a\rangle$  para un espacio donde también la norma del vector converge a un valor finito  $\|a\|^2 = \langle a | a \rangle$ . El segundo concepto fue la posibilidad de expresar un determinado vector (una función ) como combinación lineal de una base (de dimensión infinita) de un espacio vectorial  $E^\infty$ . Efectivamente, esa combinación lineal (de dimensión infinita) habrá de converger a el valor de la función en ese punto. En su momento expresamos estos conceptos intuitivos y fácilmente demostrables para  $E^n$  (un espacio vectorial Euclideo de dimensión finita,  $n$ -dimensional) y sin mayores justificaciones hicimos el “salto ” a  $E^\infty$  (un espacio Euclideo *infinito*-dimensional). Ahora, equipados con los conceptos de convergencia uniforme estamos en capacidad de explorar esas razones que antes eludimos. Ambos conceptos tienen que ver con la palabra *completitud*, la cual, como veremos, no tiene el mismo significado en cada una de las situaciones antes mencionadas, pero será complementario. En el primer caso la completitud de  $E^\infty$  se logra al poder expresar un vector como una combinación lineal de una base infinita que converja al valor del vector. En el segundo caso diremos que la base  $\{|e_i\rangle\}$  para  $E^\infty$  será completa si expande la totalidad de los vectores de  $E^\infty$ .

### 7.3.1. Completitud de $E^\infty$

La primera idea de completitud de un Espacio de Hilbert  $E^\infty$  tiene que ver con el hecho que, en en ese espacio, donde la norma de un vector es finita  $\|a\|^2 = \langle a | a \rangle < \infty$ , la combinación lineal de los elementos de una base infinita,  $\{|e_i\rangle\}$ , converja al vector  $|a\rangle$ . Esto es  $a^i |e_i\rangle \xrightarrow{n \rightarrow \infty} |a\rangle$ .

Para el caso de  $E^n$  es inmediato que, dada una base (ortonormal, por ejemplo)

$$|a\rangle = a^i |e_i\rangle \Rightarrow \|a\|^2 = \langle a | a \rangle = a^i a_i < \infty \quad \text{con } i = 1, 2, 3, \dots, n$$

La norma es finita, por cuanto es la suma de términos finitos (las componentes del vector  $(a^1, a^2, a^3, \dots, a^n)$ ). Sin embargo, para el caso de  $E^\infty$  las componentes del vector serán función de las sumas parciales, esto es

hasta dónde desarrollemos la serie y debemos demostrar que si

$$|a_n\rangle \Leftrightarrow (a_n^1, a_n^2, a_n^3, a_n^4, \dots, a_n^n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} |a_\infty\rangle \Leftrightarrow (a_\infty^1, a_\infty^2, a_\infty^3, \dots, a_\infty^j, \dots) \Rightarrow \| |a_\infty\rangle - |a_n\rangle \| < \epsilon$$

Es decir que, efectivamente, componente a componente el vector  $|a_n\rangle$  converja al vector  $|a\rangle$ . El criterio de convergencia de Cauchy, en este caso significa que: dadas dos sumas parciales (desarrollos parciales en una determinada base infinita  $\{|e_i\rangle\}$ )  $|a_n\rangle = a^i |e_i\rangle$  con  $i = 1, 2, \dots, n$  y  $|a_m\rangle = a^j |e_j\rangle$  con  $j = 1, 2, \dots, m$  entonces

$$\| |a_m\rangle - |a_n\rangle \| = \| |a_m\rangle - |a\rangle - |a_n\rangle + |a\rangle \| \leq \| |a\rangle - |a_n\rangle \| + \| |a\rangle - |a_m\rangle \| < \epsilon' + \epsilon'' \equiv \epsilon$$

con lo cual las diferencias en las sumas parciales serán siempre menor que un  $0 < \epsilon < 1$ . Nótese que hemos utilizado la desigualdad triangular  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ , y esa misma desigualdad triangular nos garantiza que

$$|a_n^j - a_m^j|^2 \leq \sum_{j=1}^{\infty} |a_n^j - a_m^j|^2 \equiv \| |a_m\rangle - |a_n\rangle \|^2 < \epsilon$$

vale decir, hemos demostrado que el término  $j$ -ésimo (y con ello todas las componentes del vector) de una suma parcial, converge al término correspondiente de la serie límite. Esto es  $a_n^j \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a_m^j \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a^j$  por lo tanto que la combinación lineal converge al vector y nos queda por demostrar si su norma es finita, o lo que es lo mismo,  $\langle a | a \rangle = a^i a_i < \infty$  con  $i = 1, 2, 3, \dots, \infty$ . Es claro que

$$\sum_{j=1}^M |a_n^j - a_m^j|^2 \leq \sum_{j=1}^{\infty} |a_n^j - a_m^j|^2 \equiv \| |a_m\rangle - |a_n\rangle \|^2 < \epsilon$$

con lo cual si  $m \rightarrow \infty$  tendremos que  $\sum_{j=1}^M |a_n^j - a^j|^2 < \epsilon$  y si ahora hacemos

$$M \rightarrow \infty \Rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} |a_n^j - a^j|^2 < \epsilon \Rightarrow \langle a | a \rangle = \sum_{j=1}^{\infty} |a^j|^2 \equiv \sum_{j=1}^{\infty} |a^j + a_n^j - a_n^j|^2$$

Ahora bien, para  $\alpha$  y  $\beta$  complejos, se cumple que

$$(|\alpha| - |\beta|)^2 \equiv |\alpha|^2 + |\beta|^2 - 2|\alpha||\beta| \geq 0 \Rightarrow 2|\alpha||\beta| \leq |\alpha|^2 + |\beta|^2 \Rightarrow |\alpha + \beta|^2 \leq (|\alpha| + |\beta|)^2 = |\alpha|^2 + |\beta|^2 + 2|\alpha||\beta|$$

para que finalmente, tengamos que

$$(|\alpha| - |\beta|)^2 \leq 2(|\alpha|^2 + |\beta|^2)$$

Finalmente, podemos aplicarlo al caso que nos compete

$$\langle a | a \rangle \equiv \sum_{j=1}^{\infty} |a^j + a_n^j - a_n^j|^2 \leq 2 \left( \sum_{j=1}^{\infty} |a^j - a_n^j|^2 + \sum_{j=1}^{\infty} |a_n^j|^2 \right) < \infty$$

### 7.3.2. Conjunto completo de funciones

El segundo sentido de completitud con que el conjunto (funciones) de vectores base expandan la totalidad del espacio vectorial (de funciones). Esto es, si  $\{|\mathbf{u}_i\rangle\} \Leftrightarrow \{u_i(x)\}$  es una base ortonormal para  $E^\infty$

$$|\mathbf{a}\rangle = a^i |\mathbf{u}_i\rangle \Rightarrow \| |\mathbf{a}\rangle \|^2 = \langle \mathbf{a} | \mathbf{a} \rangle = a^i a_i = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 \quad \text{con } i = 1, 2, 3, \dots, \infty$$

Es, otra vez, la misma afirmación que consideramos en el caso de un espacio finito dimensional,  $E^n$  en el cual demostramos que una base  $\{|\mathbf{u}_i\rangle\}$  con  $i = 1, 2, 3, \dots, n$  expandía todo el espacio.

Si adicionalmente existe una función *cuadrado integrable*,  $\mathcal{L}_{[a,b]}^2$  definidas en el intervalo  $[a, b]$ , la cual pueda ser aproximada por la base

$$\|\mathbf{f}\|^2 \equiv \langle \mathbf{f} | \mathbf{f} \rangle < \infty \Rightarrow |\mathbf{f}\rangle = \sum_{i=0}^{\infty} c^i |\mathbf{u}_i\rangle \sim \sum_{i=0}^N c^i |\mathbf{u}_i\rangle \Leftrightarrow \|f(x)\|^2 \equiv \int_a^b dx |f(x)|^2 \Rightarrow f(x) \sim \sum_{j=0}^N c^j u_j(x)$$

Nótese que hemos supuesto la existencia de un producto interno y si las bases son ortonormales tendremos que

$$\langle \mathbf{g} | \mathbf{f} \rangle \equiv \int_a^b dx g^*(x) f(x) \Rightarrow \langle \mathbf{u}^k | \mathbf{u}_l \rangle \equiv \int_a^b dx u^{*k}(x) u_l(x) = \delta_l^k \Rightarrow \|f(x)\|^2 \equiv \int_a^b dx |f(x)|^2 = \sum_{j=0}^{\infty} |c^j|^2$$

donde

$$c^k = \int_a^b dx u^{*k}(x) f(x)$$

Para demostrar que  $E^\infty$  es completo, comenzamos por demostrar la llamada *Desigualdad de Bessel*. Esta es: dada una base ortonormal infinita,  $\{|\mathbf{u}_i\rangle\} \Leftrightarrow \{u_i(x)\}$  para un espacio vectorial de Hilbert,  $E^\infty$ , de funciones cuadrado integrable  $f(x) \in \mathcal{L}_{[a,b]}^2$ , con un producto interno definido por  $\langle \mathbf{g} | \mathbf{f} \rangle \equiv \int_a^b dx g^*(x) f(x)$ , entonces se cumple que

$$\|f(x)\|^2 \geq \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \quad \text{con } c^k = \langle \mathbf{u}^k | \mathbf{f} \rangle = \int_a^b dx u^{*k}(x) f(x) \quad \wedge \quad \langle \mathbf{g} | \mathbf{f} \rangle \equiv \int_a^b dx g^*(x) f(x)$$

Para demostrar la desigualdad de Bessel, partimos de una afirmación obvia en espacios finito dimensionales

$$0 \leq \|\mathbf{f}\rangle - c^i |\mathbf{u}_i\rangle\|^2 \equiv [\langle \mathbf{f} | - c_k^* \langle \mathbf{u}^k | ] [|\mathbf{f}\rangle - c^i |\mathbf{u}_i\rangle] = \|\mathbf{f}\|^2 - \underbrace{c_k^* \langle \mathbf{u}^k | \mathbf{f} \rangle}_{c^k} - \underbrace{c^i \langle \mathbf{f} | \mathbf{u}_i \rangle}_{c_i^*} + \underbrace{c_k^* c^i \langle \mathbf{u}^k | \mathbf{u}_i \rangle}_{\delta_i^k}$$

donde  $k, i = 1, 2, 3, \dots, n$  Entonces, queda demostrada la desigualdad de Bessel al tomar el límite  $n \rightarrow \infty$

$$0 \leq \|\mathbf{f}\|^2 - \sum_{k=1}^n |c_k|^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \|\mathbf{f}\|^2 \geq \sum_{k=1}^n |c_k|^2$$

Si definimos el error,  $M_n$ , que se comete al aproximar una función con su expansión hasta un término  $n$ -simo como  $M_n(b-a) \equiv \|\mathbf{f}\rangle - \alpha^i |\mathbf{u}_i\rangle\|^2$  demostraremos que  $M_n$  es mínima si  $\alpha^i = c^i = \langle \mathbf{u}^i | \mathbf{f} \rangle$  Para ello procedemos como es costumbre, partiendo de la definición que acabamos de hacer y nos concentramos en el caso finito dimensional

$$0 \leq M_n(b-a) \equiv \|\mathbf{f}\rangle - \alpha^i |\mathbf{u}_i\rangle\|^2 = \|\mathbf{f}\rangle - (\alpha^i - c^i) |\mathbf{u}_i\rangle - c^k |\mathbf{u}_k\rangle\|^2$$

Desarrollando

$$\begin{aligned} M_n(b-a) &= [\langle \mathbf{f} | - (\alpha_k^* - c_k^*) \langle \mathbf{u}^k | - c_k^* \langle \mathbf{u}^k | ] [|\mathbf{f}\rangle - (\alpha^i - c^i) |\mathbf{u}_i\rangle - c^i |\mathbf{u}_i\rangle] \\ &= \|\mathbf{f}\|^2 - c_i^* (\alpha^i - c^i) - 2c_i^* c^i - (\alpha_k^* - c_k^*) c^k + \sum_{j=1}^n \|\alpha^j - c^j\|^2 + (\alpha_k^* - c_k^*) c^k + c_i^* (\alpha^i - c^i) + c_i^* c^i \\ &= \left[ \|\mathbf{f}\|^2 - \sum_{i=1}^n \|c^i\|^2 \right] + \sum_{j=1}^n \|\alpha^j - c^j\|^2 \end{aligned}$$

Pero la desigualdad de Bessel garantiza que la cantidad entre corchetes es positiva, por lo tanto  $M_n$  es mínima (y la denotaremos  $\tilde{M}_n$ ) cuando seleccionamos  $\alpha^j = c^j$ . Más aún  $\tilde{M}_n$  decrece cuando  $n \rightarrow \infty$ , vale decir

$$\tilde{M}_n(b-a) = \|\mathbf{f}\|^2 - \sum_{i=1}^n \|c^i\|^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \tilde{M}_\infty(b-a) = \|\mathbf{f}\|^2 - \sum_{i=1}^{\infty} \|c^i\|^2$$

y si, adicionalmente tenemos que  $\tilde{M}_n \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$  entonces es claro que

$$\|\mathbf{f}\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \|c^i\|^2 \implies \{|\mathbf{u}_i\rangle\} \Leftrightarrow \{u_i(x)\} \quad \text{es completa}$$

Este noción de convergencia se denomina como *convergencia al promedio*

Si adicionalmente exigimos que la serie  $c^i |\mathbf{u}_i\rangle$  converja uniformemente para  $x \in [a, b]$  entonces es claro que

$$\int_a^b dx \|f(x) - c^i |\mathbf{u}_i\rangle\|^2 = 0 \implies |\mathbf{f}\rangle = c^i |\mathbf{u}_i\rangle \quad (\text{con } i = 1, 2, 3 \dots, \infty) \Leftrightarrow f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c^i u_i(x)$$

Con lo cual enumeraremos las condiciones para la cual exigiremos que una función pueda ser expresada en términos de una base completa de funciones.

- Que  $f(x)$  sea cuadrado integrable  $f(x) \in \mathcal{L}_{[a,b]}^2$
- Que la base sea completa,  $\{|\mathbf{u}_i\rangle\} \Leftrightarrow \{u_i(x)\}$  i.e.  $\|\mathbf{f}\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \|c^i\|^2$
- Que la serie  $c^i |\mathbf{u}_i\rangle \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{\infty} c^i u_i(x)$  converja uniformemente, para  $x \in [a, b]$

## 7.4. Series de Polinomios Ortogonales

Enunciaremos un teorema debido a Weierstrass el cual garantiza que una función continua en un intervalo  $[a, b]$  puede ser aproximada uniformemente por una serie de polinomios. Por lo tanto, cualquier función continua podrá ser aproximada por combinaciones lineales de potencias.

El Teorema de aproximación polinómica de Weierstrass queda enunciado como sigue. Cualquier función continua  $f(x)$  en un intervalo cerrado  $x \in [a, b]$  podrá ser aproximada uniformemente por polinomios en ese mismo intervalo si, para un  $n$  suficientemente grande y un  $\epsilon$  suficientemente pequeño siempre se tiene que

$$\|\mathcal{P}_n(x) - f(x)\| < \epsilon \quad \forall x \in [a, b]$$

Para la demostración de este teorema puede consultar [1, Cushing 1975]. Sin embargo la aceptación de este teorema nos permitirá desarrollar las secciones que siguientes...

### 7.4.1. Polinomios de Legendre

El primero de los ejemplos de una base ortonormal de polinomios en la cual podremos expresar cualquier función continua en el intervalo cerrado  $x \in [-1, 1]$  serán los *Polinomios de Legendre*. Estos vienen construidos a partir de la Fórmula de Rodrigues

$$P_n(x) = \frac{1}{n!2^n} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

con  $P_0(x) = 1$ .

Es decir

$$\begin{array}{ll} P_0(x) = 1 & P_1(x) = x \\ P_2(x) = 1 - 3x^2 & P_3(x) = x - \frac{5}{3}x^3 \\ P_4(x) = \frac{3}{8} + \frac{35}{8}x^4 - \frac{15}{4}x^2 & P_5(x) = \frac{63}{8}x^5 - \frac{35}{4}x^3 + \frac{15}{8}x \\ & \vdots \end{array}$$

### Generalidades de los Polinomios de Legendre

Es fácil comprobar que los polinomios de Legendre  $|\mathbf{P}_\alpha\rangle \leftrightarrow P_\alpha(x)$  son mutuamente ortogonales para un producto interno definido como

$$\langle \mathbf{P}_n | \mathbf{P}_m \rangle = \int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = \frac{2}{2n+1} \delta_{nm}$$

con norma definida por

$$\|\mathbf{P}_n\|^2 = \langle \mathbf{P}_n | \mathbf{P}_n \rangle = \int_{-1}^1 P_n^2(x) dx = \frac{2}{2n+1}$$

nótese que los polinomios de Legendre, calculados a partir de la Fórmula de Rodrigues no están normalizados.

Al ser los Polinomios de Legendre un conjunto completo de funciones, ellos expanden el espacio de funciones continuas en el intervalo cerrado  $x \in [-1, 1]$ . Por ello cualquier función en el intervalo  $[-1, 1]$  puede ser expresada en esa base.

$$f(x) = |\mathbf{F}\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} a_k |\mathbf{P}_k\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\langle \mathbf{P}_k | \mathbf{F} \rangle}{\langle \mathbf{P}_k | \mathbf{P}_k \rangle} |\mathbf{P}_k\rangle$$

Varios ejemplos ilustrarán esta aplicación

Si  $f(x)$  es un polinomio

$$f(x) = \sum_{n=0}^m b_n x^n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k |\mathbf{P}_k\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x)$$

no se requiere hacer ninguna integral por cuanto los coeficientes  $a_n$  se determinan a través de un sistema de ecuaciones algebraicas. Para el caso de  $f(x) = x^2$  tendremos

$$f(x) = x^2 = a_0 P_0(x) + a_1 P_1(x) + a_2 P_2(x)$$

$$f(x) = x^2 = a_0 + a_1 x + \frac{1}{2} a_2 (3x^2 - 1)$$

$$f(x) = x^2 = \frac{1}{3} P_0(x) + \frac{2}{3} P_2(x)$$

En el caso de una función mas complicada

$$f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\langle \mathbf{P}_k | \mathbf{F} \rangle}{\langle \mathbf{P}_k | \mathbf{P}_k \rangle} |\mathbf{P}_k\rangle$$

$$\langle \mathbf{P}_k | \mathbf{F} \rangle = \int_{-1}^1 f(x) P_k(x) dx = \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-x}{2}} P_k(x) dx$$

la expansión en series de Legendre quedaría cómo

$$\sqrt{\frac{1-x}{2}} = \frac{2}{3} P_0(x) - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_n(x)}{(2n-1)(2n+3)}$$

Antes de entrar en el detalle de las propiedades de estos polinomios, hay que enfatizar que los Polinomios de Legendre constituyen la única base ortogonal para un espacio de Hilbert con un producto interno definido como el producto simple de funciones en el intervalo cerrado. Al ortonormalizar mediante Gram Schmidt la base  $\{1, x, x^2, x^3, \dots, x^n, \dots\}$  del espacio de polinomios,  $\mathcal{P}^n$ , de grado  $n$  en el intervalo  $[-1, 1]$ , con el producto interno definido por  $\langle \mathbf{f} | \mathbf{g} \rangle = \int_{-1}^1 dx f(x) g(x)$ . se obtienen los polinomios de Legendre.

Los polinomios de Legendre surgen, originalmente, como soluciones a la ecuación diferencial ordinaria del tipo

$$(1-x^2) \frac{d^2 P_n(x)}{dx^2} - 2x \frac{dP_n(x)}{dx} + n(n+1) P_n(x) = 0$$

Vale decir

$n$	Ecuación de Legendre	Solución
0	$(1-x^2) \frac{d^2 P_0(x)}{dx^2} - 2x \frac{dP_0(x)}{dx} = 0$	$P_0(x) = 1$
1	$(1-x^2) \frac{d^2 P_1(x)}{dx^2} - 2x \frac{dP_1(x)}{dx} + 2 P_1(x) = 0$	$P_1(x) = x$
2	$(1-x^2) \frac{d^2 P_2(x)}{dx^2} - 2x \frac{dP_2(x)}{dx} + 6 P_2(x) = 0$	$P_2(x) = 1 - 3x^2$
3	$(1-x^2) \frac{d^2 P_3(x)}{dx^2} - 2x \frac{dP_3(x)}{dx} + 12 P_3(x) = 0$	$P_3(x) = x - \frac{5}{3}x^3$
4	$(1-x^2) \frac{d^2 P_4(x)}{dx^2} - 2x \frac{dP_4(x)}{dx} + 20 P_4(x) = 0$	$P_4(x) = 1 - 10x^2 + \frac{35}{3}x^4$

### Ortogonalidad de los Polinomios de Legendre

Como los polinomios de Legendre son soluciones de su ecuaciones

$$\begin{aligned} (1-x^2) P_\alpha(x)'' - 2x P_\alpha(x)' + \alpha(\alpha+1) P_\alpha(x) &= 0 \\ (1-x^2) P_\beta(x)'' - 2x P_\beta(x)' + \beta(\beta+1) P_\beta(x) &= 0 \end{aligned}$$

Nótese que hemos cambiado de notación del operador diferencial

$$P_\alpha(x)'' \leftrightarrow \frac{d^2 P_\alpha(x)}{dx^2} \quad P_\beta(x)' \leftrightarrow \frac{dP_\beta(x)}{dx}$$

Acomodando y restando ambas ecuaciones

$$(1-x^2) \{ P_\beta(x) P_\alpha(x)'' - P_\alpha(x) P_\beta(x)'' \} - 2x \{ P_\beta(x) P_\alpha(x)' - P_\alpha(x) P_\beta(x)' \} + \{ \alpha(\alpha+1) - \beta(\beta+1) \} P_\beta(x) P_\alpha(x) = 0$$

el primer término de la ecuación puede interpretarse una la derivada

$$[(1-x^2) \{ P_\beta(x) P_\alpha(x)' - P_\alpha(x) P_\beta(x)' \}]'$$

por lo tanto al integrar

$$(1 - x^2) \{ P_\beta(x)P_\alpha(x)' - P_\alpha(x)P_\beta(x)' \} \Big|_{-1}^1 + \{ \alpha(\alpha + 1) - \beta(\beta + 1) \} \int_{-1}^1 P_\alpha(x)P_\beta(x)dx = 0$$

El primer término de la ecuación se anula en los extremos y es fácil comprobar que los polinomios de Legendre  $|P_\alpha\rangle = P_\alpha(x)$  son mutuamente ortogonales con un producto interno definido como

$$\langle P_\alpha | P_\beta \rangle = \int_{-1}^1 P_\alpha(x)P_\beta(x)dx \propto \delta_{\alpha\beta}$$

### Relación de Recurrencia

Conocido esto se puede generar una relación de recurrencia. Supongamos que conocemos todos los polinomios de Legendre hasta  $P_n(x)$  y queremos generar el próximo. Obviamente el ese polinomio será de grado  $n + 1$  y nos plantemos generarlo a partir de  $xP_n(x)$  así como los estos polinomios son base del espacio de funciones, entonces

$$xP_n(x) = |xP_n\rangle = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{\langle P_k | xP_n \rangle}{\langle P_k | P_k \rangle} |P_k\rangle$$

en donde

$$\langle P_k | xP_n \rangle = \langle xP_k | P_n \rangle = \int_{-1}^1 P_n(x)xP_k(x)dx = 0$$

para  $k < n - 1$ . Sobreviven entonces tres términos

$$|xP_n\rangle = xP_n(x) = \frac{\langle P_{n-1} | xP_n \rangle}{\langle P_{n-1} | P_{n-1} \rangle} |P_{n-1}\rangle + \frac{\langle P_n | xP_n \rangle}{\langle P_n | P_n \rangle} |P_n\rangle + \frac{\langle P_{n+1} | xP_n \rangle}{\langle P_{n+1} | P_{n+1} \rangle} |P_{n+1}\rangle$$

y dado que

$$\langle P_n | xP_n \rangle = \int_{-1}^1 P_n(x)xP_n(x)dx = \int_{-1}^1 xP_n^2(x)dx \quad ,$$

es una función impar, entonces  $\langle P_n | xP_n \rangle = 0$ . Entonces

$$|xP_n\rangle = xP_n(x) = \frac{\langle P_{n-1} | xP_n \rangle}{\langle P_{n-1} | P_{n-1} \rangle} |P_{n-1}\rangle + \frac{\langle P_{n+1} | xP_n \rangle}{\langle P_{n+1} | P_{n+1} \rangle} |P_{n+1}\rangle$$

Es decir

$$xP_n(x) = AP_{n+1}(x) + BP_{n-1}(x)$$

desarrollando con la fórmula de Rodríguez el coeficiente de orden  $k$  del lado izquierdo es

$$\frac{1}{2^k k!} 2k(2k - 1) \cdots [2k - (k - 1)] = \frac{(2k)!}{2^k (k!)^2}$$

mientras que el primer término del lado izquierdo, hasta orden  $k - 2$  queda como

$$\frac{(2k - 2)!}{2^k (k - 2)!(k - 1)}$$

por lo cual

$$A = \frac{n + 1}{2n + 1}$$

De igual forma se determina  $B$  igualando coeficientes a orden  $n - 1$  y queda la relación de recurrencia:

$$(n + 1)P_{n+1}(x) = (2n + 1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x)$$

### Norma de los Polinomios de Legendre

Conociendo que la ortogonalidad de los polinomios de Legendre y la relación de recurrencia, procedemos encontrar el valor de su norma

$$\|\mathbf{P}_n\|^2 = \langle \mathbf{P}_n | \mathbf{P}_n \rangle = \int_{-1}^1 P_n^2(x) dx \doteq \frac{2}{2n+1}$$

De la relación de recurrencia

$$\begin{aligned} (2n+1)P_n(x)nP_n(x) &= (2n+1)P_n(x)[(2n-1)xP_{n-1}(x) - (n-1)P_{n-2}(x)] \\ (2n-1)P_{n-1}(x)(n+1)P_{n+1}(x) &= (2n-1)P_{n-1}(x)[(2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x)] \end{aligned}$$

restando miembro a miembro obtenemos:

$$\begin{aligned} (2n+1)P_n(x)nP_n(x) + (2n+1)(n-1)P_n(x)P_{n-2}(x) - \\ - (n+1)(2n-1)P_{n-1}(x)P_{n+1}(x) - (2n-1)nP_{n-1}^2(x) = 0 \end{aligned}$$

integrando y considerando la ortogonalidad

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 P_n^2(x) dx &= \frac{2n-1}{2n+1} \int_{-1}^1 P_{n-1}^2(x) dx \\ \int_{-1}^1 P_n^2(x) dx &= \left(\frac{2n-1}{2n+1}\right) \left(\frac{2n-3}{2n-1}\right) \int_{-1}^1 P_{n-2}^2(x) dx \\ \int_{-1}^1 P_n^2(x) dx &= \left(\frac{2n-1}{2n+1}\right) \left(\frac{2n-3}{2n-1}\right) \left(\frac{2n-5}{2n-3}\right) \int_{-1}^1 P_{n-3}^2(x) dx \\ &\vdots = \vdots \\ \int_{-1}^1 P_n^2(x) dx &\doteq \frac{3}{2n+1} \int_{-1}^1 P_1^2(x) dx \\ \int_{-1}^1 P_n^2(x) dx &\doteq \frac{2}{2n+1} \end{aligned}$$

### Función Generatriz de los Polinomios de Legendre

Se puede encontrar una función generatriz  $\mathcal{P}(t, x)$  de los polinomios de Legendre:

$$\mathcal{P}(t, x) = \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = P_0(x) + P_1(x)t + P_2(x)t^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n$$

para la cual los  $P_n(x)$  son los coeficientes de su desarrollo en series de potencias. Esta serie converge para  $\|2xt+t^2\| < 1$ . Para demostrar que el desarrollo en serie de la función  $\mathcal{G}(t, x)$  tiene como coeficientes a los  $P_n(x)$  partimos de que:

$$\mathcal{P}(t, x) = \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{P}(t, x)}{\partial t} = \frac{t-x}{(1-2xt+t^2)^{3/2}}$$

por lo cual

$$(t-x)\mathcal{P}(t, x) + (1-2xt+t^2) \frac{\partial \mathcal{P}(t, x)}{\partial t} = 0$$

y, consecuentemente

$$(t-x) \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n + (1-2xt+t^2) \sum_{n=1}^{\infty} n P_n(x) t^{n-1} = 0.$$

Multiplicando y acomodando queda

$$-x P_0(x) + P_0(x) t + \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) P_{n+1}(x) t^n - \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) x P_n(x) t^n - \sum_{n=2}^{\infty} n P_{n-1}(x) t^n = 0$$

por lo tanto

$$\left[ \underbrace{P_1(x) - x P_0(x)}_{=0} \right] + \left[ \underbrace{2P_2(x) - 3xP_1(x) + P_0(x)}_{=0} \right] t + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \underbrace{(n+1) P_{n+1}(x) - (2n+1) x P_n(x) + n P_{n-1}(x)}_{=0} \right] t^n = 0$$

El primero de los términos se cumple siempre por cuanto  $P_0(x) = 1$  y  $P_1(x) = x$ . El tercer término conforma la relación de recurrencia para los polinomios de Legendre. Con esto queda demostrado que el desarrollo en series de potencias de la función generatriz, tiene como coeficientes a los polinomios de Legendre.

La función generatriz muestra su utilidad en la expansión

$$f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\langle \mathbf{P}_k | \mathbf{F} \rangle}{\langle \mathbf{P}_k | \mathbf{P}_k \rangle} | \mathbf{P}_k \rangle$$

Así, al considerar la definición del producto interno

$$\langle \mathbf{P}_k | \mathbf{F} \rangle = \int_{-1}^1 f(x) P_k(x) dx = \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-x}{2}} P_k(x) dx$$

e integrando

$$\int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-x}{2}} \left[ \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} \right] dx = \sum_{n=0}^{\infty} t^n \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-x}{2}} P_n(x) dx$$

$$\frac{1}{2t} \left[ 1 + t - \frac{(1-t)^2}{2\sqrt{t}} \ln \left( \frac{1+\sqrt{t}}{1-\sqrt{t}} \right) \right] = \sum_{n=0}^{\infty} t^n \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-x}{2}} P_n(x) dx$$

Expandiendo el lado izquierdo en series de potencias de  $t$

$$\frac{4}{3} - 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{(4n^2-1)(2n+3)} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-x}{2}} P_n(x) dx$$

lo cual nos conduce, al igualar coeficientes a

$$\frac{4}{3} = \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-x}{2}} P_0(x) dx$$

$$\frac{-4}{(4n^2-1)(2n+3)} = \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-x}{2}} P_n(x) dx$$

y finalmente a la forma de la expansión en series

$$\sqrt{\frac{1-x}{2}} = \frac{2}{3} P_0(x) - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_n(x)}{(2n-1)(2n+3)}$$

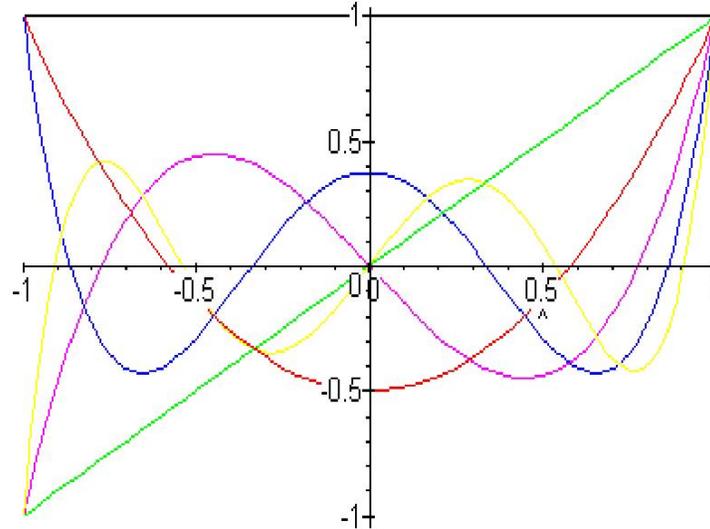


Figura 7.1: Polinomios de Legendre

### Otras propiedades de los polinomios de Legendre

- $P_n(1) = 1$  y  $P_n(-1) = (-1)^n$  para todo  $n$ .
- $P_n(x)$  tiene  $n$  raíces en el intervalo  $(-1, 1)$  Esta propiedad puede apreciarse para los primeros 5 polinomios en la figura 7.1
- Tienen una representación integral de la forma

$$P_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi [x + \sqrt{x^2 - 1} \cos \varphi]^n d\varphi$$

- Cambios de variables inmediatos conllevan a ecuaciones diferenciales equivalentes

- Forma autoadjunta

$$[(1 - x^2) y']' + \lambda(\lambda + 1) y = 0$$

- En coordenadas esféricas con  $u = P_n(\cos \theta)$

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{du}{d\theta} \right) + \lambda(\lambda + 1) u = 0$$

- En coordenadas esféricas con  $u = \sqrt{\sin \theta} P_n(\cos \theta)$

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + \left[ \left( \lambda + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{4 \sin^2 \theta} \right] u = 0$$

**Resumen de Propiedades Polinomios Legendre**

<b>Polinomios de Legendre</b>	
Definición	$P_n(x) = \frac{1}{n!2^n} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$
Ejemplos	$P_{-1} \equiv 0; \quad P_0 \equiv 1; \quad P_1 = x$ $P_2 = \frac{1}{2}(3x^2 - 1); \quad P_3 = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$
Relación de Recurrencia	$(n + 1) P_{n+1}(x) = (2n + 1) x P_n(x) - n P_{n-1}(x)$
Ecuaciones Diferenciales	$(1 - x^2) y'' - 2x y' + \lambda(\lambda + 1) y = 0$ $\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{du}{d\theta} \right) + n(n + 1)u = 0; \quad u = P_n(\cos \theta)$
Función Generatriz	$\mathcal{P}(t, x) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2xt + t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n$
Representación Integral	$P_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi [x + \sqrt{x^2 - 1} \cos \varphi]^n d\varphi$
Ortogonalidad	$\langle \mathbf{P}_\alpha   \mathbf{P}_\beta \rangle = \int_{-1}^1 P_\alpha(x) P_\beta(x) dx = \delta_{\alpha\beta} \frac{2}{2\alpha + 1}$

**Potencial Electrostático de un Dipolo Eléctrico**

En Física el ejemplo claro es el cálculo del potencial electrostático producido por dos cargas  $q_1 = +q$  y  $q_2 = -q$  separadas por una distancia  $2d$  en un punto  $P$  cualquiera de un plano  $(x, y)$ . El potencial en ese punto genérico viene dado por

$$V = q \left( \frac{1}{R'} - \frac{1}{R} \right)$$

Tal y como puede apreciarse de la figura 7.4.1

$$(R')^2 = r^2 + d^2 - 2r d \cos \theta$$

$$R^2 = r^2 + d^2 - 2r d \cos (\pi - \theta)$$

por lo cual

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{r} \left[ 1 - \left( 2 \frac{d}{r} \cos \theta - \left\{ \frac{d}{r} \right\}^2 \right) \right]^{-1/2}$$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r} \left[ 1 - \left( 2 \frac{d}{r} \cos (\pi - \theta) - \left\{ \frac{d}{r} \right\}^2 \right) \right]^{-1/2}$$

y consecuentemente

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \theta) \left\{ \frac{d}{r} \right\}^n$$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos (\pi - \theta)) \left\{ \frac{d}{r} \right\}^n = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(-\cos \theta) \left\{ \frac{d}{r} \right\}^n$$

El potencial será

$$V = \frac{q}{r} \left( \sum_{n=0}^{\infty} [P_n(\cos \theta) - P_n(-\cos \theta)] \left\{ \frac{d}{r} \right\}^n \right)$$

## Potencial Electroestático

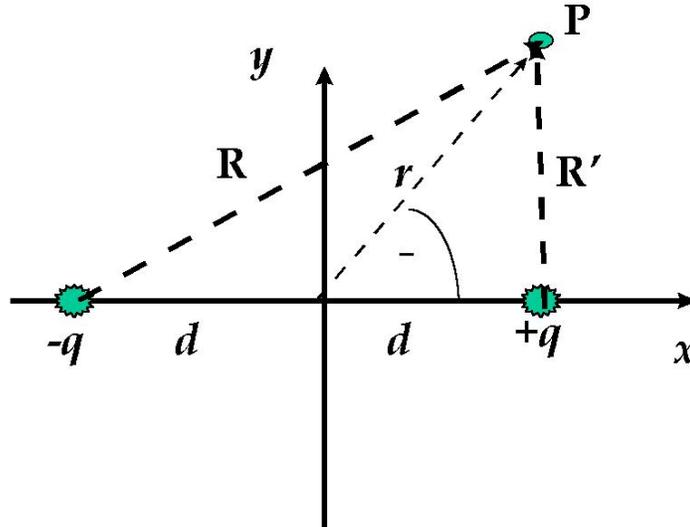


Figura 7.2: Potencial Electroestático de un Dipolo Eléctrico

donde todos los términos pares de  $P_n(\cos \theta)$  se anula y finalmente tendremos la expresión del potencial para cualquier punto del plano

$$V = \frac{2q}{r} \left( \sum_{n=0}^{\infty} P_{2n+1}(\cos \theta) \left\{ \frac{d}{r} \right\}^{2n+1} \right)$$

Entonces nos quedamos con el primer término de la serie, si

$$\frac{d}{r} \ll 1 \quad \Rightarrow \quad V \approx \frac{q}{r^2} 2d \cos \theta$$

### 7.4.2. Polinomios de Hermite

Los polinomios de Hermite a diferencia de los de Legendre (y Tchevychev), vienen definidos en toda la recta real, vale decir,  $x \in (-\infty, \infty)$ , por lo cual la función peso  $w(x)$  en el producto interno deberá decrecer más rápido que  $|x|^n$ , para garantizar que la norma de los vectores en este espacio vectorial sea finita. La función más simple que cumple estos requisitos es  $w(x) = e^{-x^2}$  (también algunos autores utilizan  $w(x) = e^{-x^2/2}$ ) Esto es, el producto interno entre los polinomios de Hermite vendrá definido como

$$\langle \mathbf{f} | \mathbf{g} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx w(x) f(x) g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} f(x) g(x)$$

Otra vez, para este producto interno, si ortogonalizamos con Gram-Schmidt se obtienen los polinomios de Hermite. Al igual que el resto de los polinomios ortogonales, existe una fórmula de Rodrigues para los polinomios de Hermite

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$$

con lo cual se obtienen

$$\begin{aligned} H_0(x) &= 1, & H_1(x) &= 2x \\ H_2(x) &= 4x^2 - 2, & H_3(x) &= 8x^3 - 12x, \\ H_4(x) &= 16x^4 - 48x^2 + 12, & H_5(x) &= 32x^5 - 160x^3 + 120x. \\ & \vdots & & \vdots \end{aligned}$$

### Generalidades de los Polinomios de Hermite

Los polinomios de Hermite serán ortogonales, pero no normales

$$\langle \mathbf{H}_\alpha | \mathbf{H}_\beta \rangle = 2^\alpha \alpha! \sqrt{\pi} \delta_{\alpha\beta} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_\beta(x) H_\alpha(x) dx \Leftrightarrow \langle \mathbf{H}_\alpha | \mathbf{H}_\alpha \rangle = \|\mathbf{H}_\alpha\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_\alpha^2(x) dx = 2^\alpha \alpha! \sqrt{\pi}$$

Donde la función delta de Kronecker es  $\delta_{\alpha\beta} = 0$  si  $\alpha \neq \beta$ ; y  $\delta_{\beta\beta} = 1$ .

Antes de desarrollar funciones en términos de los polinomios de Hermite, expondremos un par de teoremas sin demostración.

#### Teorema 1

Sean  $|\mathbf{f}\rangle$  y  $|\mathbf{g}\rangle$  dos funciones arbitrarias, cuando menos continuas a trozos en  $(-\infty, \infty)$  y que cumplen con

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f^2(x) dx < \infty \quad \wedge \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} g^2(x) dx < \infty$$

Entonces el conjunto de estas funciones forman un espacio vectorial Euclideo  $\mathcal{I}_2^w$  con un producto interno definido por

$$\langle \mathbf{g} | \mathbf{f} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x)g(x) dx$$

Las funciones  $f(x)$  y  $g(x)$  se denominan cuadrado-integrables respecto al peso  $w$ . Es por ello que denotamos el espacio de funciones como  $\mathcal{I}_2^w$

#### Teorema 2

Si  $f(x)$  es una función continua arbitraria en  $\mathcal{I}_2^w$  entonces puede ser aproximada por un polinomio en ese mismo espacio. Es decir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f(x) - p_n(x)\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} [f(x) - p_n(x)]^2 dx \right)^{1/2} = 0$$

Así, la expresión de una función arbitraria en la base de los polinomios de Hermite se reduce a

$$f(x) = |\mathbf{f}\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} a_k |\mathbf{H}_k\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\langle \mathbf{H}_k | \mathbf{f} \rangle}{\langle \mathbf{H}_k | \mathbf{H}_k \rangle} |\mathbf{H}_k\rangle$$

donde

$$a_k = \frac{\langle \mathbf{H}_k | \mathbf{f} \rangle}{\langle \mathbf{H}_k | \mathbf{H}_k \rangle} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x) H_k(x) dx}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_k^2(x) dx} = \frac{1}{2^k k! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x) H_k(x) dx$$

Si  $f(x) = x^{2p}$  con  $p = 1, 2, 3, \dots$

$$f(x) = x^{2p} = \sum_{k=0}^p a_{2k} H_{2k}(x)$$

entonces

$$\begin{aligned} a_{2k} &= \frac{1}{2^{2k}(2k)!\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} x^{2p} H_{2k}(x) dx \\ &= \frac{1}{2^{2k}(2k)!\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^{2p} \frac{d^{2k}}{dx^{2k}} e^{-x^2} dx \end{aligned} \quad (7.2)$$

Una integración por partes estratégica muestra que:

$$a_{2k} = \frac{1}{2^{2k}(2k)!\sqrt{\pi}} \left\{ x^{2p} \frac{d^{2k-1}}{dx^{2k-1}} e^{-x^2} \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} 2px^{2p-1} \frac{d^{2k-1}}{dx^{2k-1}} e^{-x^2} dx \right\}$$

El primer término de la resta se anula siempre debido a la deficiencia de los polinomios de Hermite

$$x^{2p} \frac{d^{2k-1}}{dx^{2k-1}} e^{-x^2} \Big|_{-\infty}^{\infty} = x^{2p} (-1)^{2k-1} e^{-x^2} H_{2k-1}(x) \Big|_{-\infty}^{\infty}$$

Repetiendo el proceso  $2k$  veces, tendremos

$$a_{2k} = \frac{1}{2^{2k}(2k)!\sqrt{\pi}} \frac{(2p)!}{(2p-2k)!} \int_{-\infty}^{\infty} x^{2p-2k} e^{-x^2} dx$$

ahora si en la integral hacemos  $x = \sqrt{t}$  obtenemos

$$\begin{aligned} a_{2k} &= \frac{1}{2^{2k}(2k)!\sqrt{\pi}} \frac{(2p)!}{(2p-2k)!} \int_{-\infty}^{\infty} t^{p-k} e^{-t} \frac{dt}{2\sqrt{t}} \\ &= \frac{1}{2^{2k+1}(2k)!\sqrt{\pi}} \frac{(2p)!}{(2p-2k)!} \int_{-\infty}^{\infty} t^{p-k-\frac{1}{2}} e^{-t} dt \end{aligned}$$

y utilizando la definición  $\Gamma(z) \equiv \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \equiv (z-1)!$ , queda como

$$a_{2k} = \frac{1}{2^{2k+1}(2k)!\sqrt{\pi}} \frac{(2p)!}{(2p-2k)!} \Gamma\left(p-k+\frac{1}{2}\right)$$

Ahora, recurrimos a la propiedad de “duplicación” de la Función Gamma, i.e.

$$2^{2z-1} \Gamma(z) \Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \Gamma(2z)$$

tenemos que

$$2^{2p-2k} \Gamma\left(p-k+\frac{1}{2}\right) (p-k)! = \sqrt{\pi} (2p-2k)!$$

quedan entonces los coeficientes determinados como

$$a_{2k} = \frac{(2p)!}{2^{2p+1}(2k)!(p-k)!}$$

y, por lo tanto el desarrollo en la base de los polinomios de Hermite

$$f(x) = x^{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p+1}} \sum_{k=0}^p \frac{H_{2k}(x)}{(2k)!(p-k)!} \quad -\infty < x < \infty$$

Muestre que del mismo modo se puede encontrar

$$f(x) = x^{2p+1} = \frac{(2p-1)!}{2^{2p-1}} \sum_{k=0}^p \frac{H_{2k+1}(x)}{(2k+1)!(p-k)!} \quad -\infty < x < \infty$$

Si  $f(x) = e^{-a^2 x^2}$  con  $\operatorname{Re} a^2 > -1$ . Otra vez

$$f(x) = e^{-a^2 x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} H_{2k}(x)$$

entonces

$$a_{2k} = \frac{1}{2^{2k}(2k)!\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(a^2+1)x^2} H_{2k}(x) dx$$

Sustituyendo  $H_{2k}(x)$  por su expresión integral tendremos

$$\begin{aligned} a_{2k} &= \frac{1}{2^{2k}(2k)!\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(a^2+1)x^2} \left[ \frac{2^{2k+1}(-1)^k e^{x^2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-t^2} t^{2k} \cos 2xt dt \right] dx \\ &= \frac{2(-1)^k}{\pi(2k)!} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2 x^2} \left[ \int_0^{\infty} e^{-t^2} t^{2k} \cos 2xt dt \right] dx \\ &\equiv \frac{2(-1)^k}{\pi(2k)!} \int_0^{\infty} e^{-t^2} t^{2k} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2 x^2} \cos 2xt dx \right] dt \\ &= \frac{2(-1)^k}{\pi(2k)!} \int_0^{\infty} e^{-t^2} t^{2k} \left[ \sqrt{\frac{\pi}{a^2}} e^{-t^2/a^2} \right] dt = \\ &= \frac{2(-1)^k}{\sqrt{\pi}(2k)!a} \int_0^{\infty} e^{-t^2(1+a^{-2})} t^{2k} dt \\ &= \frac{(-1)^k}{\sqrt{\pi}(2k)!} \frac{a^{2k}}{(1+a^2)^{k+1/2}} \int_0^{\infty} e^{-s} s^{k-\frac{1}{2}} ds \quad \leftarrow t^2(1+a^{-2}) = s \\ &= \frac{(-1)^k}{\sqrt{\pi}(2k)!} \frac{a^{2k}}{(1+a^2)^{k+1/2}} \Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

y ahora usando, otra vez la propiedad de “duplicación” de la función gamma,

$$2^{2k} \Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right) k! = \sqrt{\pi} (2k)!$$

obtenemos

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k a^{2k}}{2^{2k} k! (1+a^2)^{k+1/2}}$$

por lo tanto

$$f(x) = e^{-a^2 x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k a^{2k}}{2^{2k} k! (1+a^2)^{k+1/2}} H_{2k}(x)$$

Al igual que los polinomios de Legendre, los de Hermite, surgen también en sus orígenes como soluciones a la ecuación diferencial ordinaria del tipo

$$\frac{d^2 H_n(x)}{dx^2} - 2x \frac{dH_n(x)}{dx} + nH_n(x) = 0$$

Vale decir

$n$	Ecuación de Hermite	Solución
0	$\frac{d^2 H_0(x)}{dx^2} - 2x \frac{dH_0(x)}{dx} = 0$	$H_0(x) = 1$
1	$\frac{d^2 H_1(x)}{dx^2} - 2x \frac{dH_1(x)}{dx} + 2H_1(x) = 0$	$H_1(x) = 2x$
2	$\frac{d^2 H_2(x)}{dx^2} - 2x \frac{dH_2(x)}{dx} + 4H_2(x) = 0$	$H_2(x) = 4x^2 - 2$
3	$\frac{d^2 H_3(x)}{dx^2} - 2x \frac{dH_3(x)}{dx} + 6H_3(x) = 0$	$H_3(x) = 8x^3 - 12x$
4	$\frac{d^2 H_4(x)}{dx^2} - 2x \frac{dH_4(x)}{dx} + 8H_4(x) = 0$	$H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12$

**Función Generatriz de los Polinomios de Hermite**

Se puede encontrar una función generatriz  $\mathcal{H}(t, x)$  de los polinomios de Hermite:

$$\mathcal{H}(t, x) = e^{2xt-t^2} = H_0(x) + H_1(x)t + \frac{H_2(x)}{2}t^2 + \frac{H_3(x)}{3!}t^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n$$

para la cual los  $H_n(x)$  son los coeficientes de su desarrollo en series de potencias. Es fácil darse cuenta que esta expresión proviene del desarrollo en Serie de Taylor

$$\mathcal{H}(t, x) = e^{2xt-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[ \frac{\partial^n \mathcal{H}(t, x)}{\partial t^n} \right]_{t=0} t^n \quad \|t\| < \infty$$

para lo cual

$$\left[ \frac{\partial^n \mathcal{H}(t, x)}{\partial t^n} \right]_{t=0} = e^{x^2} \left[ \frac{\partial^n}{\partial t^n} e^{-(x-t)^2} \right]_{t=0} = (-1)^n e^{x^2} \left[ \frac{d^n}{du^n} e^{-(u)^2} \right]_{u=x} = H_n(x)$$

**Relación de Recurrencia**

A partir de la función generatriz se puede construir la siguiente identidad

$$\frac{\partial \mathcal{H}(t, x)}{\partial t} = (2x - 2t) \mathcal{H}$$

y utilizando el desarrollo en series de potencias en  $t$  tendremos,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} n t^{n-1} - 2x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^{n+1} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[ \underbrace{H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x)}_{=0} \right] t^n = 0$$

Así la relación de recurrencia será

$$H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0$$

De igual modo, podemos partir de otra identidad

$$\frac{\partial \mathcal{H}(t, x)}{\partial x} = 2t \mathcal{H} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H'_n(x)}{n!} t^n - 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^{n+1}$$

y encontrar una relación para generar las derivadas de los polinomios de Hermite en término de ellos mismos:

$$H'_n(x) = 2n H_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Finalmente, utilizando la ecuación anterior en la relación de recurrencia y derivando esa expresión una vez más, queda como:

$$\begin{aligned} H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + H'_n(x) &= 0 \\ H''_n(x) - 2xH'_n(x) + 2n H_n(x) &= 0 \end{aligned}$$

con lo cual queda demostrado que los polinomios de Hermite son una solución particular de esa ecuación diferencial.

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0,$$

Donde hemos hecho  $y = H_n(x)$  Adicionalmente, haciendo un cambio cosmático podremos demostrar que  $y = e^{-x^2/2} H_n(x)$  es solución de la ecuación diferencial autoadjunta

$$y'' + (2n + 1 - x^2) y = 0$$

### Ortogonalidad y Norma de los Polinomios de Hermite

En general estos polinomios cumplen con

$$\langle \mathbf{H}_\alpha | \mathbf{H}_\beta \rangle = 2^\alpha \alpha! \sqrt{\pi} \delta_{\alpha\beta} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_\beta(x) H_\alpha(x) dx$$

Donde la función delta de Kronecker es  $\delta_{\alpha\beta} = 0$  si  $\alpha \neq \beta$ ; y  $\delta_{\beta\beta} = 1$ .

Para demostrar el caso  $\alpha \neq \beta$  partimos de

$$\begin{aligned} u_\beta [u''_\alpha + (2\alpha + 1 - x^2) u_\alpha] &= 0 \\ u_\alpha [u''_\beta + (2\beta + 1 - x^2) u_\beta] &= 0 \end{aligned}$$

restando miembro a miembro e integrando se tiene que:

$$\begin{aligned} [u'_\alpha u_\beta - u'_\beta u_\alpha]' + 2(\alpha - \beta) u_\alpha u_\beta &= 0 \\ (\alpha - \beta) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_\beta(x) H_\alpha(x) dx &= 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_\beta(x) H_\alpha(x) dx &= 0 \quad \alpha \neq \beta; \end{aligned}$$

ya que

$$e^{-x^2/2} (2\alpha H_{\alpha-1}(x) H_\beta(x) - 2\beta H_{\beta-1}(x) H_\alpha(x)) \Big|_{-\infty}^{\infty} = 0$$

Para encontrar el valor de la norma, procedemos a partir de la relación de recurrencia

$$\begin{aligned} H_n(x) (H_n(x) - 2xH_{n-1}(x) + 2(n-1)H_{n-2}(x)) &= 0 \\ H_{n-1}(x) (H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x)) &= 0 \end{aligned}$$

restando miembro a miembro, multiplicando por  $e^{-x^2}$  e integrando entre  $(-\infty, \infty)$  se obtiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_{\alpha}^2(x) dx = 2\alpha \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_{\alpha-1}^2(x) dx$$

repetiendo la operación y recordando que al final queda

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} x^2 dx = 2\sqrt{\pi}$$

Obtenemos

$$\langle \mathbf{H}_{\alpha} | \mathbf{H}_{\alpha} \rangle = \|\mathbf{H}_{\alpha}\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_{\alpha}^2(x) dx = 2^n n! \sqrt{\pi}$$

### Representación Integral de los Polinomios de Hermite

Los polinomios de Hermite pueden ser representados como

$$H_n(x) = \frac{2^n (-i)^n e^{x^2}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2 + 2itx} t^n dt$$

que puede ser separada como

$$H_{2n}(x) = \frac{2^{2n+1} (-1)^n e^{x^2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-t^2} t^{2n} \cos 2xt dt \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

y para los términos impares

$$H_{2n+1}(x) = \frac{2^{2n+2} (-1)^n e^{x^2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-t^2} t^{2n+1} \sin 2xt dt \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

La forma de llegar a cualquiera de estas últimas fórmulas se parte de las conocidas integrales desarrolladas en el plano complejo

$$e^{-x^2} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} \cos 2xt dt$$

se deriva  $2n$  veces a ambos miembros se utiliza la definición de los polinomios de Hermite.

Resumen de Propiedades Polinomios Hermite

Polinomios de Hermite	
Definición	$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$ $H_n(x) = \sum_{k=0}^{n/2} \frac{(-1)^k n!}{k! (n-2k)!} (2x)^{n-2k}$
Ejemplos	$H_0(x) = 1; \quad H_1(x) = 2x; \quad H_2(x) = 4x^2 - 2;$ $H_3(x) = 8x^3 - 12x \quad H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12$
Relaciones de Recurrencia	$H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0$ $H'_n(x) = 2n H_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, 3, \dots$
Ecuaciones Diferenciales	$y'' - 2xy' + 2ny = 0$ $u'' + (2n + 1 - x^2)u = 0; \quad u(x) = e^{-x^2/2} H_n(x)$
Función Generatriz	$\mathcal{H}(t, x) = e^{2xt-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n$
Representación Integral	$H_{2n}(x) = \frac{2^{2n+1} (-1)^n e^{x^2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-t^2} t^{2n} \cos 2xt \, dt$ $H_{2n+1}(x) = \frac{2^{2n+2} (-1)^n e^{x^2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-t^2} t^{2n+1} \sin 2xt \, dt$
Ortogonalidad	$\langle \mathbf{H}_\alpha   \mathbf{H}_\beta \rangle = 2^\alpha \alpha! \sqrt{\pi} \delta_{\alpha\beta} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_\beta(x) H_\alpha(x) dx$

El Oscilador armónico, independiente del Tiempo, en Mecánica Cuántica.

La Ecuación de Schrödinger independiente del tiempo y en una dimensión es

$$\frac{d^2}{dx^2} \psi(x) + \frac{2\mu}{\hbar^2} [E - \mathcal{U}(x)] \psi(x) = 0$$

con  $\mu$  la “masa” de la partícula;  $E$  los niveles de energía y  $\mathcal{U}(x)$  el potencial al cual está sometida la partícula. En el caso que estudiemos un potencial  $\mathcal{U}(x) = \frac{1}{2}\mu\omega^2 x^2$  en el cual la frecuencia angular del oscilador viene representada por  $\omega$ . La ecuación de Schrödinger se convierte en

$$\frac{d^2}{dx^2} \psi(x) + \frac{2\mu}{\hbar^2} \left[ E - \frac{1}{2}\mu\omega^2 x^2 \right] \psi(x) = 0$$

haciendo un cambio de variable  $\xi = x\sqrt{\mu\omega/\hbar}$  para adimensionalizar la ecuación, se obtiene

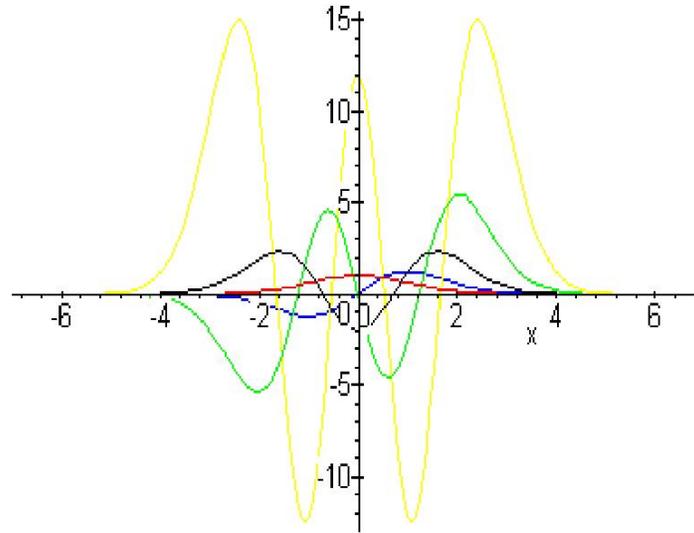
$$\psi''(\xi) + \left[ \frac{2E}{\hbar\omega} - \xi^2 \right] \psi(\xi) = 0$$

la cual corresponde a la forma autoadjunta de la Ecuación de Hermite y por lo tanto identificamos

$$\frac{2E}{\hbar\omega} = 2n + 1 \quad \Rightarrow \quad E = \left( n + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega$$

con lo cual comprobamos la forma como viene cuantizada la energía en este sistema y la energía del estado fundamental. Por su parte, la función de onda se podrá expresar en la base de soluciones de esa ecuación

$$\psi(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \psi_n(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{-\xi^2/2} H_n(\xi)$$



y se mantenemos la normalización

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^2(\xi) d\xi = 1 \quad \text{con } c_n = \left(\frac{\mu\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}}$$

### 7.4.3. MAPLE y los polinomios ortogonales

MapleV (9.5 y superiores) tiene predefinidos, como funciones., la mayor parte de los polinomios ortogonales, Vale decir.

- Legendre y sus asociados tanto de primera : `LegendreP(n, x)`, `LegendreQ(n, x)`, como de segunda especie `LegendreP(n, u, x)`, `LegendreQ(n, u, x)`;
- Hermite `HermiteH(n, x)`
- Thebyshev de primera y segunda especie `ChebyshevT(n, x)` y `ChebyshevU(n, x)`, respectivamente.
- Laguerre: `LaguerreL(n, a, x)`
- Jacobi: `JacobiP(n, a, b, x)`

donde **n** indica el orden del polinomio y **x** la variable con la cual se expresa. También existen varias bibliotecas o paquetes que presentan facilidades para manipular polinomios ortogonales. Entre ellas podemos mencionar

- `OrthogonalSeries` Paquete que permite manipular series de polinomios ortogonales. Permite expresar una función polinómica como serie de polinomios ortogonales, multiplicar, sumar, derivar, cambiar de base de polinomios, entre otras

```
> restart;with(OrthogonalSeries) :
> poli := 1+2*x+3*x^3 +4*x^5;
> S1 := ChangeBasis(poli,ChebyshevT(n,x)) ;
> S2 := ChangeBasis(poli,HermiteH(n,x)) ;
> S3 := ChangeBasis(S1,HermiteH(n,x));
```

Incorpora la biblioteca `OrthogonalSeries`; define un polinomio  $poli = 4x^5 + 3x^3 + 2x + 1$  lo expresa en serie de potencias en base de los polinomios de Tchebyshev ( $S1$ ); o lo expresa como serie en la base de polinomios de Hermite ( $S2$ ); Toma la serie  $S1$ , expresada en la base de polinomios de Tchebishev y las transforma a la base de polinomios de Hermite.

- `numapprox` Paquete de subrutinas para aproximar funciones en término de series de algunos polinomios ortogonales.

```
with(numapprox):
chebyshev(cos(x), x);
```

Expandirá la función  $\cos x$  en series de polinomios de Tchebychev.

- `orthopoly`. Un paquete casi obsoleto que habrá de ser eliminado tras la incorporación de los polinomios ortogonales como funciones nativas de Maple

#### 7.4.4. Planteamiento General para Polinomios Ortogonales

Hemos considerado un par de ejemplos de Polinomios Ortogonales. En ambos podemos identificar algunas características comunes. En base a estas características comunes definiremos otras familias de polinomios ortogonales.

Nomenclatura	Nombre	$a$	$b$	$w(x)$	$N_n$	$N_0$
$P_n(x)$	Legendre	-1	1	1	$\frac{2}{2n+1}$	
$T_n(x)$	Tchebychev 1E	-1	1	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$
$U_n(x)$	Tchebychev 2E	-1	1	$\sqrt{1-x^2}$	$\frac{\pi}{2}$	
$H_n(x)$	Hermite	$-\infty$	$\infty$	$e^{-x^2}$	$2^n n! \sqrt{\pi}$	
$L_n(x)$	Laguerre	0	$\infty$	$e^{-x}$	1	
$L_n^\alpha(x)$	Laguerre G	0	$\infty$	$x^\alpha e^{-x}$ con $\alpha > -1$	$\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!}$	
$P_n^{\alpha\beta}(x)$	Jacobi	-1	1	$(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$	ver leyenda	

Cuadro 7.1: Propiedades genéricas de los Polinomios Ortogonales,  $N_n$  indica la norma del polinomio de grado  $n$ . En el caso de los polinomios de Jacobi, la norma es  $N_n = \frac{2^{\alpha+\beta+1}}{2n+\alpha+\beta+1} \frac{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{n!\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}$  con  $\alpha > -1$  y  $\beta > -1$

**Producto interno genérico, Norma y ortogonalidad**

Los polinomios ortogonales se definen como un conjunto de polinomios  $\{p_n(x)\}$  de orden  $n$  definidos en un determinado intervalo  $a \leq x \leq b$ , los cuales son ortogonales respecto a una definición de producto interno

$$\langle \mathbf{p}_m | \mathbf{p}_n \rangle = \int_a^b w(x)p_m(x)p_n(x)dx = h_n\delta_{nm} \quad \text{con } w(x) > 0 \text{ una función peso en } a \leq x \leq b$$

que garantiza que la norma sea finita en ese intervalo. Dado que el Teorema de Weierstrass garantiza que el conjunto de polinomios  $\{1, x, x^2, \dots, x^n, \dots\}$  es una base completa para un espacio vectorial  $\mathbb{E}^\infty$ , se procede a ortogonalizar esa base con la definición de producto interno y el intervalo que corresponda. Para cada caso tendremos una base ortogonal de polinomios.

Polinomio	$\mu_n$	$w(x)$	$q(x)$
$P_n$	$(-1)^n 2^n n!$	1	$1 - x^2$
$T_n$	$\frac{(-1)^n}{\sqrt{\pi}} 2^{n+1} \Gamma(n + \frac{1}{2})$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$1 - x^2$
$U_n$	$\frac{(-1)^n}{(n+1)\sqrt{\pi}} 2^{n+1} \Gamma(n + \frac{3}{2})$	$\sqrt{1-x^2}$	$1 - x^2$
$H_n$	$(-1)^n$	$e^{-x^2}$	1
$L_n$	$n!$	$e^{-x}$	$x$
$L_n^\alpha$	$n!$	$x^\alpha e^{-x}$	$x$

Cuadro 7.2: Funciones para determinar la Fórmula de Rodrigues generalizada

Haremos ahora un catálogo de las propiedades más resaltantes de estos polinomios. En el cuadro 7.1 resumimos las propiedades más resaltantes, con lo son: la función peso en el producto interno, el intervalo en el cual están definidas estas funciones y su norma.

**Fórmula de Rodrigues generalizada**

En general todos los polinomios ortogonales  $\{p_n(x)\}$  vienen definidos por la fórmula de Rodrigues generalizada

$$p_n(x) = \frac{1}{w(x)\mu_n} \frac{d^n}{dx^n} (w(x)q(x)^n)$$

donde  $w(x), q(x)$  y  $\mu_n$  vienen especificados en el cuadro 7.2 para cada conjunto de polinomios ortogonales

**Ejemplos de Polinomios Ortogonales**

Utilizando la fórmula de Rodrigues generalizada, podemos construir algunos polinomios generalizados. El cuadro 7.3 muestra algunos de ejemplos de estos polinomios ortogonales

**Relaciones de Recurrencia**

También se pueden formular, de manera genérica las relaciones de recurrencia. Obviamente, las relaciones de recurrencia también constituyen una forma alternativa de ir construyendo los polinomios ortogonales. Así, un polinomio ortogonal genérico,  $p_n(x)$ , cumplirá

$$p_{n+1}(x) = (a_n + xb_n)p_n(x) - c_n p_{n-1}(x)$$

El cuadro 7.4 contiene las expresiones de los coeficientes para construir las relaciones de recurrencia generalizadas para cada uno de los polinomios

Polinomio	$n = 0$	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$
$P_n$	1	$x$	$\frac{1}{2}(3x^2 - 1)$	$\frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$	$\frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$
$T_n$	1	$x$	$2x^2 - 1$	$4x^3 - 3x$	$8x^4 - 8x^2 + 1$
$U_n$	1	$2x$	$4x^2 - 1$	$8x^3 - 4x$	$16x^4 - 12x^2 + 1$
$H_n$	1	$2x$	$4x^2 - 2$	$8x^3 - 12x$	$16x^4 - 48x^2 + 12$
$L_n$	1	$1 - x$	$\frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$	$\frac{-1}{6}(x^3 - 9x^2 + 18x - 6)$	$\frac{1}{24}(x^4 - 16x^3 + 72x^2 - 96x + 24)$

Cuadro 7.3: Ejemplos de Polinomios Ortogonales

Polinomio	$a_n$	$b_n$	$c_n$
$P_n$	0	$\frac{2n+1}{n+1}$	$\frac{n}{n+1}$
$T_n$	0	2	1
$U_n$	0	2	1
$H_n$	0	2	$2n$
$L_n$	$\frac{2n+1}{n+1}$	$-\frac{1}{n+1}$	$\frac{n}{n+1}$
$L_n^\alpha$	$\frac{2n+1+\alpha}{n+1}$	$-\frac{1}{n+1}$	$\frac{n+\alpha}{n+1}$

Cuadro 7.4: Funciones para determinar la Relación de Recurrencia Generalizada

### Función generatriz generalizada

Para todos los polinomios ortogonales podemos definir una función generatriz  $\mathcal{G}(x, t)$ , de tal manera que cada uno de los polinomios ortogonales  $\{p_n(x)\}$  será proporcional al coeficiente de  $t^n$  del desarrollo en series de Taylor, en potencias de  $t$  alrededor del punto  $x = 0$ . Esta función generatriz que constituye una forma alternativa de definir los polinomios ortogonales viene expresada por la serie

$$\mathcal{G}(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n p_n(x) t^n \quad \text{con } a_n \text{ constante}$$

Las funciones generatrices no son exclusivas de los polinomios ortogonales. Como veremos más adelante, existen funciones generatrices para las funciones de Bessel.

### Ecuación diferencial para los Polinomios Ortogonales

Cada uno de los polinomios ortogonales habrá de ser solución de una ecuación diferencial ordinaria de la forma

$$g_2(x) \frac{d^2 p_n(x)}{dx^2} + g_1(x) \frac{dp_n(x)}{dx} + \alpha_n p_n(x) = 0$$

En el cuadro 7.6 mostramos las expresiones para los coeficientes de las ecuaciones correspondientes a las ecuaciones diferenciales para las cuales cada uno de los polinomios ortogonales es solución

Polinomio	$C_n$	$\mathcal{G}(x, t)$
$P_n$	1	$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}$
$T_n$	2	$\frac{1-t^2}{1-2xt+t^2} + 1$
$U_n$	1	$\frac{1}{1-2xt+t^2}$
$H_n$	$\frac{1}{n!}$	$e^{2xt-x^2}$
$H_{2n}$	$\frac{1}{(2n)!}$	$\cos(2xt)e^{t^2}$
$H_{2n+1}$	$\frac{1}{(2n+1)!}$	$\text{sen}(2xt)e^{t^2}$
$L_n$	1	$\frac{1}{1-t} e^{-\frac{xt}{1-t}}$
$L_n^\alpha$	1	$\frac{1}{(1-t)^\alpha} e^{-\frac{xt}{1-t}}$

Cuadro 7.5: Funciones para determinar la función generatriz generalizada

Polinomio	$g_2(x)$	$g_1(x)$	$\alpha_n$
$P_n$	$1-x^2$	$-2x$	$n(n+1)$
$T_n$	$1-x^2$	$-x$	$n^2$
$U_n$	$1-x^2$	$-2x$	$n(n+1)$
$H_n$	1	$-2x$	$2n$
$L_n$	$x$	$1-x$	$n$
$L_n^\alpha$	$x$	$1-x+\alpha$	$n$
$P_n^{\alpha\beta}$	$1-x^2$	$\beta-\alpha-x(2+\alpha+\beta)$	$n(n+\alpha+\beta+1)$

Cuadro 7.6: Funciones para determinar la ecuación diferencial para la cual son solución los polinomios ortogonales

### 7.4.5. Un par de aplicaciones de ejemplos

#### Interpolación polinomial de puntos experimentales

Muchas veces nos encontramos con la situación en la cual tenemos un conjunto de (digamos  $n$ ) medidas o puntos experimentales  $\{(x_1, y_1 = f(x_1)), (x_2, y_2 = f(x_2)), \dots, (x_n, y_n = f(x_n))\}$  y para modelar ese experimento quisiéramos una función que ajuste estos puntos. El tener una función nos provee la gran ventaja de poder intuir o aproximar los puntos que no hemos medido. La función candidata más inmediata es un polinomio y debemos definir el grado del polinomio y la estrategia que aproxime esos puntos. Si queremos aproximar esos puntos por una recta el Método de Mínimos Cuadrados es el más utilizado<sup>7</sup>. Puede ser que no sea lineal el polinomio y queramos ajustar esos puntos a un polinomio tal que éste pase por los puntos experimentales. Queda entonces por decidir la estrategia. Esto es si ajustamos la función como “trozos” de polinomios que ajusten a subconjuntos  $\{(x_1, y_1 = f(x_1)), (x_2, y_2 = f(x_2)), \dots, (x_m, y_m = f(x_m))\}$  con  $m < n$ . de los puntos experimentales En este caso tendremos una función de ajuste, para cada conjunto de

<sup>7</sup>Para detalles pueden consultar Luis A. Núñez **Formulario de Métodos Matemáticos 1. Grupos, SubEspacios, Independencia Lineal y Bases para un Espacio Vectorial Lineal** <http://webdelprofesor.ula.ve/ciencias/nunez/cursos/MetodosMatematicos1/B2005/Met1ClsEspVect105A.pdf>

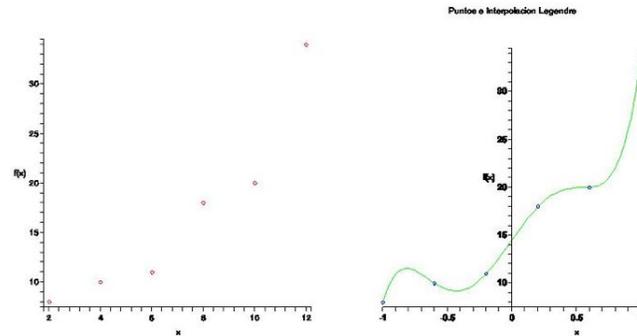


Figura 7.3: En el lado izquierdo se muestran los puntos experimentales son  $\{(2, 8), (4, 10), (6, 11), (8, 18), (10, 20), (12, 34)\}$  y a la derecha la función polinómica que los interpola

puntos. También podemos ajustar la función a todo el conjunto de puntos experimentales y, en ese caso el máximo grado del polinomio que los ajuste será de grado  $n - 1$ . Para encontrar este polinomio lo expresamos como una combinación lineal de Polinomios de Legendre. Esto es

$$\mathcal{P}(x) = f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} C_k P_k(x) \Rightarrow \begin{cases} y_1 = f(x_1) = C_0 P_0(x_1) + C_1 P_1(x_1) + \cdots + C_{n-1} P_{n-1}(x_1) \\ y_2 = f(x_2) = C_0 P_0(x_2) + C_1 P_1(x_2) + \cdots + C_{n-1} P_{n-1}(x_2) \\ \vdots \\ y_n = f(x_n) = C_0 P_0(x_n) + C_1 P_1(x_n) + \cdots + C_{n-1} P_{n-1}(x_n) \end{cases}$$

que no es otra cosa que un sistema de  $n$  ecuaciones con  $n$  incógnitas: los coeficientes  $\{C_0, C_1, \dots, C_{n-1}\}$ . Al resolver el sistema de ecuaciones y obtener los coeficientes, podremos obtener la función polinómica que interpola esos puntos. Una expansión equivalente se pudo haber logrado con cualquier otro conjunto de polinomios ortogonales, que ellos son base del espacio de funciones. Es importante hacer notar que debido a que los polinomios de Legendre está definido en el intervalo  $[-1, 1]$  los puntos experimentales deberán re-escalarse al ese intervalo para poder encontrar el polinomio de interpolación como combinación lineal de los Polinomios de Legendre.

Consideremos los puntos experimentales representado en la figura 7.3. Al construir el sistema de ecuaciones

ciones obtendremos

$$\begin{aligned} -8 + C_0 - C_1 + C_2 - C_3 + C_4 - C_5 &= 0 \\ -10 + C_0 - \frac{3}{5} C_1 + \frac{1}{25} C_2 + \frac{9}{25} C_3 - \frac{51}{125} C_4 + \frac{477}{3125} C_5 &= 0 \\ -11 + C_0 - \frac{1}{5} C_1 - \frac{11}{25} C_2 + \frac{7}{25} C_3 + \frac{29}{125} C_4 - \frac{961}{3125} C_5 &= 0 \\ -18 + C_0 + \frac{1}{5} C_1 - \frac{11}{25} C_2 - \frac{7}{25} C_3 + \frac{29}{125} C_4 + \frac{961}{3125} C_5 &= 0 \\ -20 + C_0 + \frac{3}{5} C_1 + \frac{1}{25} C_2 - \frac{9}{25} C_3 - \frac{51}{125} C_4 - \frac{477}{3125} C_5 &= 0 \\ -34 + C_0 + C_1 + C_2 + C_3 + C_4 + C_5 &= 0 \end{aligned}$$

y al resolver el sistema obtendremos que

$$C_0 = \frac{2249}{144}, \quad C_1 = \frac{3043}{336}, \quad C_2 = \frac{1775}{504}, \quad C_3 = -\frac{175}{216}, \quad C_4 = \frac{625}{336}, \quad C_5 = \frac{14375}{3024}$$

con lo cual

$$\mathcal{P}(x) = f(x) = \frac{2249}{144} + \frac{3043}{336} x + \frac{1775}{504} P(2, x) - \frac{175}{216} P(3, x) + \frac{625}{336} P(4, x) + \frac{14375}{3024} P(5, x)$$

la interpolación queda representada en al figura 7.3.

Es importante señalar que mientras más puntos experimentales se incluyan para la interpolación, el polinomio resultante será de mayor grado y, por lo tanto incluirá oscilaciones que distorcionarán una aproximación más razonable. Por ello, la estrategia de hacer la interpolación a trozos, digamos de tres puntos en tres puntos, generará un mejor ajuste, pero será una función (un polinomio) continuo a trozos.

### Cuadratura de Gauss-Legendre

Una de los usos más comunes de los polinomios ortogonales es para aproximar funciones, en particular integrales que requieren ser resueltas numéricamente. La idea es aproximar una integral, para una función  $f(x)$ , definida en el intervalo  $[a, b]$  y suficientemente bien comportada, por una suma finita de términos  $c_k f(x_k)$  y estimar el error que cometemos en esta aproximación. Esto es

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{k=1}^N c_k f(x_k) + E_N$$

Nótese que la intención es utilizar la función a integrar evaluada en un conjunto de puntos estratégicos para los cuales están definidos unos coeficientes, también inteligentemente seleccionados. Es decir se requieren  $2N$  números ( $c_k$  y los  $x_k$  con  $k = 1, 2, \dots, N$ ). Más aún, esas  $2N$  cantidades pueden ser seleccionadas de forma tal que la aproximación es exacta  $E_N = 0$  cuando  $f(x)$  es un polinomio de grado  $\leq 2N - 1$

Supongamos, para empezar que la función  $f(x)$  está definida para  $x \in [-1, 1]$ <sup>8</sup> y por lo tanto los polinomios ortogonales que seleccionaremos para aproximar la integral (y la función) serán los del Legendre (igual pudimos haber utilizado los polinomios de Tchebychev), con lo cual

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k P_k(x) \quad \text{donde, como siempre } a_k = \left(n + \frac{1}{2}\right) \int_{-1}^1 dx f(x) P_k(x) \text{ y } a_0 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 dx f(x)$$

<sup>8</sup>Ésta no es una limitación muy severa porque siempre podemos hacer un cambio de variable del tipo  $x = \left(\frac{b-a}{2}\right)t + \left(\frac{b+a}{2}\right)$  y convertir cualquier intervalo cerrado  $[a, b]$  en un intervalo cerrado  $[-1, 1]$

Con lo cual

$$\int_{-1}^1 f(x)dx \approx \sum_{k=1}^N c_k f(x_k) = \sum_{k=1}^N c_k \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x_k) \right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left( \sum_{k=1}^N c_k P_n(x_k) \right)$$

quedan todavía por determinar los pesos  $c_k$  y los puntos  $x_k$ . Para ello procedemos de la siguiente forma. Notamos que  $P_N(x)$  tiene  $N$  raíces,  $x = x_j$ , en el intervalo  $-1 \leq x \leq 1$ . Entonces, si seleccionamos esos puntos  $x = x_j$  para evaluar la función  $f(x_k)$  se anulan el coeficiente para el término  $a_N$  y, además podremos encontrar los pesos  $c_k$  resolviendo el sistema de  $N$  ecuaciones de la forma

$$\sum_{j=1}^N c_j P_0(x_j) = \sum_{j=1}^N c_j = 2 \quad \wedge \quad \sum_{j=1}^N c_j P_k(x_j) = 0 \quad \text{para } k = 1, 2, \dots, N-1$$

donde los  $P_k(x_j)$  son los distintos polinomios evaluados en las raíces del polinomio de grado  $N$ , i.e.  $P_N(x_j) = 0$ . Se puede demostrar que la solución de este sistema provee los pesos escritos de la forma

$$c_j = \frac{2}{(1-x_j^2) \left( \left. \frac{dP_N(x)}{dx} \right|_{x=x_j} \right)^2}$$

Más aún, podremos, de esta forma, escribir

$$\int_{-1}^1 f(x)dx \approx \sum_{k=1}^N c_k f(x_k) = 2a_0 + E_N \quad \text{con } E_N = \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n \left( \sum_{k=1}^N c_k P_n(x_k) \right)$$

pero como

$$a_0 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 dx f(x) \Rightarrow \int_{-1}^1 dx f(x) = \sum_{k=1}^N c_k f(x_k) - E_N$$

Es decir, demostramos que es posible aproximar la integral de la función con un promedio pesado de la función evaluada en unos puntos estratégicos. Los puntos estratégicos son los ceros del polinomio de Legendre de grado igual al número de puntos con los cuales se quiere aproximar la función y los pesos vienen de resolver las ecuaciones para los coeficientes de la expansión.

En el cuadro 7.7 se ilustran los valores de los puntos de interpolación y sus pesos correspondientes.

Es inmediato comprobar que si  $f(x)$  es un polinomio de grado  $\leq N-1$  la aproximación es exacta y el error es nulo. Pero lo que realmente hace útil a este tipo de aproximaciones es que también será exacta para polinomios de grado  $\leq 2N-1$ . Esto se puede ver si expresamos un polinomio de grado  $2N-1$  como la suma de dos polinomios

$$f(x) = P_N(x)Y_1(x) + Y_2(x)$$

donde  $Y_1$  y  $Y_2$  son polinomios de grado  $N-1$ . Entonces, al integrar miembro a miembro

$$\int_{-1}^1 dx f(x) = \underbrace{\int_{-1}^1 dx P_N(x)Y_1(x)}_{=0} + \int_{-1}^1 dx Y_2(x)$$

el primer término se anula por ser  $P_N(x)$  ortogonal a cualquier polinomio de grado inferior, y el segundo término no es más que el caso que analizamos anteriormente de un polinomio de grado  $\leq N-1$

$N$	$x_j = \text{fsolve}(P(N, x), x, \text{complex})$	$c_j = \frac{2}{(1 - x_j^2) \left( \frac{dP_N(x)}{dx} \Big _{x=x_j} \right)^2}$	$2N - 1$
2	$\pm 0,5773502692$	1,0	3
3	0,0 $\pm 0,7745966692$	0,88888889 0,55555555	5
4	$\pm 0,3399810436$ $\pm 0,8611363116$	0,65214515 0,34785485	7
5	0,0 $\pm 0,5384693101$ $\pm 0,9061798459$	0,56888889 0,47862867 0,23692689	9
6	$\pm 0,2386191861$ $\pm 0,6612093865$ $\pm 0,9324695142$	0,46791393 0,36076157 0,17132449	11
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Cuadro 7.7: Puntos y pesos para una cuadratura de Gauss-Legendre

### Estrategia General para cuadraturas de Gauss

Para el caso general. Vale decir la aproximación de una integral

$$\int_a^b dx w(x) f(x) \approx \sum_{k=1}^N c_k f(x_k)$$

donde las  $\{x_1, \dots, x_k, \dots, x_N\}$  son los ceros del polinomio ortogonal, de grado  $N$ ,  $p_N(x)$ , elegido para hacer esta aproximación. Los  $N$  pesos  $\{c_1, \dots, c_k, \dots, c_N\}$  surgen de resolver el sistema de ecuaciones

$$\sum_{j=1}^N c_j = \frac{h_0}{p_0^2} \quad \text{con } h_0 = \int_a^b w(x) p_0^2(x) dx \quad \wedge \quad \sum_{j=1}^N c_j P_k(x_j) = 0 \quad \text{para } k = 1, 2, \dots, N-1$$

Así para aproximar integrales con funciones pesos,  $w(x)$ , utilizaremos cuadraturas adaptadas a los polinomios ortogonales. Esto es

$$\int_0^\infty dx e^{-x} f(x) \Rightarrow \text{Laguerre} \quad \int_{-\infty}^\infty dx e^{-x^2} f(x) \Rightarrow \text{Hermite} \quad \int_{-1}^1 dx \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow \text{Tchebychev}$$

## 7.5. Series y transformadas de Fourier

### 7.5.1. Generalidades

Otro de los casos de expansión en una base completa de funciones lo constituyen la base de Fourier. En este caso la serie de Fourier la constituyen funciones continuas, reales de variable real y definidas en  $[0, 2\pi]$ ,  $\mathcal{C}_{[0, 2\pi]}^\infty$ , en término de funciones trigonométricas. Esto es el conjunto de funciones  $\{|\mathbf{u}_1\rangle, |\mathbf{u}_2\rangle, |\mathbf{u}_3\rangle, \dots, |\mathbf{u}_n\rangle, \dots\}$  representadas por

$$|\mathbf{u}_0\rangle = 1, \quad |\mathbf{u}_{2n}\rangle = \cos nx \quad \text{y} \quad |\mathbf{u}_{2n-1}\rangle = \text{sen } nx, \quad \text{con } n = 1, 2, 3, \dots$$

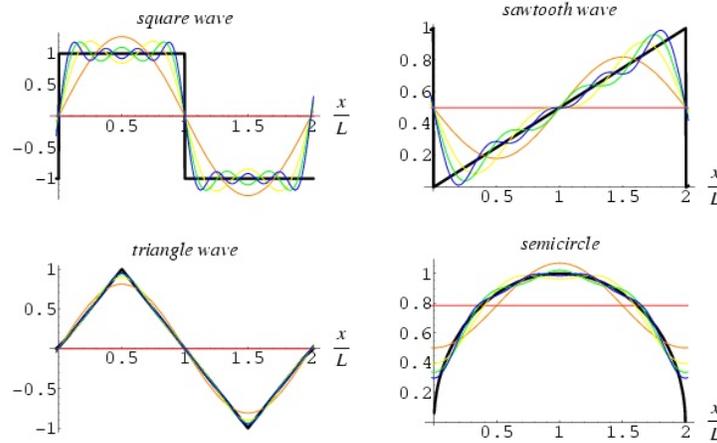


Figura 7.4: Expansiones de Varias funciones en sumas parciales de Series de Fourier. Tomado de Eric W. Weisstein. **Fourier Series**. *MathWorld—A Wolfram Web Resource*. <http://mathworld.wolfram.com/FourierSeries.html>

Es claro que  $\{|\mathbf{u}_1\rangle, |\mathbf{u}_2\rangle, |\mathbf{u}_3\rangle, \dots, |\mathbf{u}_n\rangle, \dots\}$  es un conjunto de funciones ortogonales por cuanto

$$\langle \mathbf{u}_n | \mathbf{u}_m \rangle = \delta_{nm} \|\mathbf{u}_n\|^2 \Rightarrow \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ \|\mathbf{u}_n\|^2 & \text{si } n = m \end{cases} \begin{cases} \int_0^{2\pi} dx \sin nx \sin mx = 0 \\ \int_0^{2\pi} dx \cos nx \sin mx = 0 \\ \int_0^{2\pi} dx \cos nx \cos mx = 0 \\ \int_0^{2\pi} dx = 2\pi \\ \int_0^{2\pi} dx \cos^2 nx = \pi \\ \int_0^{2\pi} dx \sin^2 nx = \pi \end{cases}$$

con  $l = 1, 2, 3, \dots$  también. Por lo tanto, podremos construir una base ortonormal de funciones  $\{|\mathbf{e}_1\rangle, |\mathbf{e}_2\rangle, |\mathbf{e}_3\rangle, \dots, |\mathbf{e}_n\rangle, \dots\}$  de la forma

$$|\mathbf{e}_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad |\mathbf{e}_{2n}\rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx \quad \text{y} \quad |\mathbf{e}_{2n-1}\rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx.$$

Tal y como se muestra en la figura 7.4 distintas funciones pueden ser expandidas con sumas parciales de Fourier. A diferencia de las series de potencias, que imponen que las funciones a ser expandidas deben ser continuas y continuamente diferenciables en el intervalo, la series de Fourier pueden representar funciones continuas a trozos, siempre y cuando cumplan con algunas condiciones.

Por lo tanto cualquier función definida en el intervalo  $[0, 2\pi]$  puede expresarse en términos de esta base

como

$$|\mathbf{f}\rangle = \sum_{i=0}^{\infty} c_i |\mathbf{e}_i\rangle \Rightarrow c_i = \langle \mathbf{e}_i | \mathbf{f} \rangle = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} dx f(x) = c_0 \equiv a_0 & \text{si } i = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} dx f(x) \cos(nx) = c_{2n} \equiv a_n & \text{si } i = 2n \\ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} dx f(x) \sin(nx) = c_{2n-1} \equiv b_n & \text{si } i = 2n - 1 \end{cases}$$

donde los  $c_i$  son los coeficientes de Fourier, con lo cual

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

y equivalentemente si el período es  $T$  y para un  $x_0$  genérico

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos\left(\frac{2\pi nx}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi nx}{T}\right) \right) \quad \text{con} \quad \begin{cases} a_0 = \frac{2}{T} \int_{x_0}^{x_0+T} dx f(x) \\ a_n = \frac{2}{T} \int_{x_0}^{x_0+T} dx f(x) \cos\left(\frac{2\pi nx}{T}\right) \\ b_n = \frac{2}{T} \int_{x_0}^{x_0+T} dx f(x) \sin\left(\frac{2\pi nx}{T}\right) \end{cases}$$

La figura 7.4 muestra la aproximación de las distintas sumas parciales para distintas funciones. A medida que aumentamos el número de términos la aproximación mejora. Nótese que hemos utilizado  $F(x) \equiv F_{\infty}(x)$  para indicar el límite de la suma parcial  $F_N(x)$  para  $n = N$  de la expresión de una función  $f(x)$  expresada en series de Fourier.

Pero más aún, podemos expresar la expansión de una serie de Fourier de manera más compacta atendiendo a las expresiones anteriores. Esta expresión se conoce en algunos ámbitos como la expresión integral para la series de Fourier

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} dt f(t) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left( \left( \int_0^{2\pi} dt f(t) \cos(nt) \right) \cos(nx) + \left( \int_0^{2\pi} dt f(t) \sin(nt) \right) \sin(nx) \right) \\ F(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} dt f(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} dt f(t) \cos(n(t-x)) \end{aligned}$$

También es muy común expresar una serie de Fourier en término de una base compleja. Vale decir  $\{\dots |\tilde{\phi}_k\rangle \dots\} \leftrightarrow \{\dots e^{-ikx} \dots\}$  con  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Con lo cual

$$|\mathbf{f}\rangle = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{C}_k |\tilde{\phi}_k\rangle \equiv \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{C}_k e^{-ikx} \quad \text{con} \quad \tilde{C}_k = \frac{\langle \tilde{\phi}_k | \mathbf{f} \rangle}{\langle \tilde{\phi}_k | \tilde{\phi}_k \rangle} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx e^{-ikx} f(x)$$

Utilizando esta otra expresión podremos reescribir (una vez más) la expresión de una suma parcial de la Serie de Fourier. Dado que

$$a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dt f(t) \cos(n(t-x))$$

tendremos que

$$\begin{aligned} F_n(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kx) + b_k \operatorname{sen}(kx)) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dt f(t) \cos(n(t-x)) \right) \\ &= \Re \left[ \int_{-\pi}^{\pi} dt f(t) \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \left( e^{-i(t-x)k} \right) \right\} \right] \end{aligned}$$

y al sumar la progresión geométrica que representa una serie de exponenciales llegamos a

$$F_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dt f(t) \left[ \frac{\operatorname{sen} \left( \left( n + \frac{1}{2} \right) (t-x) \right)}{\operatorname{sen} \left( \frac{1}{2} (t-x) \right)} \right] \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dt f(t) \mathcal{K}(x, n, t)$$

la cual siempre es convergente y el término

$$\mathcal{K}(x, n, t) = \left[ \frac{\operatorname{sen} \left( \left( n + \frac{1}{2} \right) (t-x) \right)}{\operatorname{sen} \left( \frac{1}{2} (t-x) \right)} \right]$$

se conoce como el núcleo de la transformación de  $F$ , el (*Kernel*) de Dirichlet

La pregunta básica que sigue es, en todos estos casos, ¿cómo se relaciona la expansión de Fourier  $\{\mathbf{f}\} \Leftrightarrow F(x)$  con la función  $f(t)$  que genera los coeficientes de la expansión? Nótese que es una forma de mirar una relación entre  $F(x) \leftrightarrow f(t)$ . Pasamos de  $f(t)$  a  $F(x)$  mediante una “transformación”

$$F_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dt f(t) \mathcal{K}(x, n, t)$$

Este tipo de relaciones se denomina transformación integral y en particular ésta es una de las expresiones de las llamadas *Transformaciones de Fourier* las cuales trataremos más adelante en la sección 7.5.6.

## 7.5.2. Las Condiciones de Dirichlet y el Teorema de Fourier

### Condiciones de Dirichlet

Las condiciones que una determinada función  $f(x)$  debe cumplir para poder ser representada como una serie de Fourier, se conocen con el nombre de condiciones de Dirichlet<sup>9</sup> las cuales pueden ser esquematizadas en los siguientes puntos. Para que una función  $f(x)$  sea susceptible de ser expandida en series de Fourier debe ser

- periódica
- univaluada y continua a trozos (continua menos, en un número finito de puntos) con un número finito de máximos y mínimos
- la integral  $\int_{-T/2}^{T/2} dx |f(x)|$  debe ser convergente. Donde  $[-T/2, T/2]$  quiere indicar el intervalo de definición de una función con período  $T$ .

Podemos formalizar un poco más las condiciones de Dirichlet en el llamado Teorema de Fourier.

<sup>9</sup>Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet 1805 - 1859 Matemático Alemán con importantes contribuciones en Teorías de números Algebraica, Series y aproximaciones de funciones y ecuaciones diferenciales parciales

**Teorema de Fourier**

Sea  $f(x)$  una función en el intervalo  $-\pi \leq x \leq \pi$  y definida para el resto de la recta real tal que cumpla con  $f(x + 2\pi) = f(x)$ . Es decir  $f(x)$  es  $2\pi$ -periódica. Supongamos además que existe

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx f(x) \quad \text{con lo cual} \quad \tilde{C}_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx e^{-ikx} f(x) \quad \text{con } k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

y si  $|f(x)|$  está acotada para un intervalo  $[a, b]$  con  $-\pi < a \leq x \leq b < \pi$ , entonces

$$F(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{C}_k e^{-ikx} \quad \text{es convergente al valor } F(x) = \frac{1}{2} \left( \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} f(x + \epsilon) + \lim_{\epsilon \rightarrow 0^-} f(x - \epsilon) \right)$$

y si  $f(x)$  es continua en  $x = x_0$  entonces  $F(x_0) \rightarrow f(x_0)$ .

En este punto se pueden puntualizar varias cosas

- El valor  $F(x) = \frac{1}{2} (\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} f(x + \epsilon) + \lim_{\epsilon \rightarrow 0^-} f(x - \epsilon))$  al cual converge la expansión de Fourier, cobra particular importancia cuando el punto  $x = x_0$  es una discontinuidad. Tal y como veremos más adelante (sección 7.5.5) y expresa este teorema, las series de Fourier son particularmente apropiadas para expandir funciones discontinuas (en un número finito de puntos en el intervalo), sin embargo, por ser una base de funciones continuas no puede reproducir la discontinuidad como tal. La expansión de Fourier alrededor de un punto de discontinuidad  $x \rightarrow x_{\pm 0}$  tenderá al valor  $F(x) \rightarrow F(x_{\pm 0}) \equiv F_m$  donde  $F_m = \frac{F(x_{+0}) + F(x_{-0})}{2}$ . Es decir, tenderá al valor medio de los valores de la discontinuidad por la izquierda  $F(x_{-0})$  y por la derecha  $F(x_{+0})$ .
- Si los coeficientes de Fourier tienen variaciones acotadas en el intervalo y  $|\tilde{C}_k| \rightarrow 0$  con  $k \rightarrow \infty$ . Entonces

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\tilde{C}_k|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx |f(x)|^2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx |f(x)|^2$$

que no es otra cosa que la expresión de la completitud de esta base de funciones.

**7.5.3. Algunos ejemplos de expansiones en series de Fourier**

Para ilustrar esta relación entre la función  $f(x)$  y su expansión en serie de Fourier  $F(x)$  analicemos algunos ejemplos típicos

**Ondas Cuadradas**

Para empezar, el caso de una función muy conocida en el ámbito de los circuitos eléctrico. Una onda cuadrada

$$f(t) = \begin{cases} -1 & \text{si } -\frac{1}{2}T \leq t < 0 \\ +1 & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}T \end{cases} \quad \Rightarrow b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} dt f(t) \operatorname{sen} \left( \frac{2\pi n t}{T} \right) = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} dt f(t) \operatorname{sen} \left( \frac{2\pi n t}{T} \right)$$

porque los coeficientes pares ( $a_n$ ) se anulan. Entonces

$$b_n = \frac{2}{n\pi} (1 - (-1)^n) \quad \Rightarrow f(t) = \frac{4}{\pi} \left( \operatorname{sen}\omega t + \frac{\operatorname{sen}3\omega t}{3} + \frac{\operatorname{sen}5\omega t}{5} + \frac{\operatorname{sen}7\omega t}{7} + \dots \right)$$

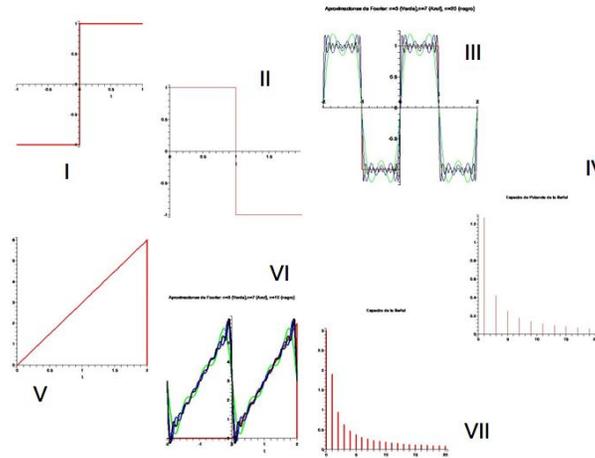


Figura 7.5: Un par de funciones, definidas con un período  $T$ , a ser expresadas en como expansiones en Series de Fourier. En los cuadrantes I y II, encontramos una onda cuadrada. La primera (cuadrante I) definida en un intervalo  $(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$  y en el cuadrante II la misma función definida en un intervalo  $(0, T)$ . El cuadrante III ilustra las aproximaciones de la serie de Fourier para  $n = 3, 7, 20$ , mientras que el espectro de potencia se presenta en el cuadrante IV. La onda “diente de sierra”, definida en un intervalo  $(0, T)$ , se presenta en el cuadrante V. Sus aproximaciones en series de Fourier para  $n = 3, 7, 10$  se pueden observar en el cuadrante VI, mientras que el espectro de potencia en el cuadrante VII.

los coeficientes pares  $b_{2n}$  se anulan y además hemos denotado  $\omega = 2\pi/T$ . Al definir la función  $\omega$  podemos interpretar los coeficientes de Fourier  $a_n, b_n$  como las contribuciones de cada uno de los armónicos  $a_n, b_n \rightarrow \omega_n = \frac{2n\pi}{T}$ . A partir de estas contribuciones se construye el espectro de potencia, el cual está relacionado con la energía que aporta cada uno de estos armónicos. Por ello construimos un índice  $E_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$  y graficamos  $E_n$  vs  $n$  tal y como se puede comprobar en la figura 7.5, cuadrantes IV y VII. Se encuentra que se puede asociar un espectro de potencia a cada señal y con lo cual realizar una especie de identificación.

En este punto podemos hacernos un par de preguntas

- ¿ qué hubiera pasado si en vez de considerar el intervalo  $(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$  hubiéramos considerado  $(0, T)$  ?
- ¿ tendríamos el mismo desarrollo en serie de Fourier ?
- ¿ el mismo espectro ?

Justifique sus respuestas.

### Variedades de dientes de sierra

Otra función muy común es la denominada dientes de sierra

$$f(t) = at \quad \text{si } 0 \leq t \leq T \quad \text{con } a \text{ constante} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T dt f(t) & = aT \\ a_n = \frac{2}{T} \int_0^T dt f(t) \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) & = 0 \\ b_n = \frac{2}{T} \int_0^T dt f(t) \sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) & = \frac{-aT}{n\pi} \end{cases}$$

si adicionalmente suponemos  $a = 3$ , tendremos que la expansión en serie tomaría la forma

$$f(t) = 3t = 3 - \frac{6\text{sen}(\pi t)}{\pi} - \frac{3\text{sen}(2\pi t)}{\pi} - \frac{2\text{sen}(3\pi t)}{\pi} - \frac{3\text{sen}(4\pi t)}{2\pi} - \frac{6\text{sen}(5\pi t)}{5\pi} + \dots \quad \text{para } 0 \leq t \leq T$$

La figura 7.5 (cuadrantes V y VI) muestra la construcción de esta función y su representación en Series de Fourier.

A partir de esta función podemos hacer unas variaciones. Por ejemplo considérese la función

$$f(t) = at \quad \text{si } \frac{-T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2} \quad \text{con } a \text{ constante} \quad \Rightarrow \begin{cases} a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt f(t) & = 0 \\ a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt f(t) \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) & = 0 \\ b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt f(t) \text{sen}\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) & = -\frac{aT(-1)^n}{n\pi} \end{cases}$$

Claramente es una función impar  $f(-x) = -f(x)$  y así lo refleja su expansión en series de Fourier. Si hacemos  $a = 3$  y  $T = 2 \rightarrow \omega_n = n\pi$  tendremos que la expresión para de la serie es

$$f(t) = 3t = \frac{6\text{sen}(\pi t)}{\pi} - \frac{3\text{sen}(2\pi t)}{\pi} + \frac{2\text{sen}(3\pi t)}{\pi} - \frac{3\text{sen}(4\pi t)}{2\pi} + \frac{6\text{sen}(5\pi t)}{5\pi} + \dots \quad \text{con } \frac{-T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2}$$

la cual, si bien es parecida no es igual a la anterior, debido que estamos expandiendo otra función.

Otra variación posible de la función “diente de sierra” puede ser la versión completamente par del “diente”,  $f(-x) = f(x)$ . Esta es

$$f(t) = \begin{cases} -at & \text{si } \frac{-T}{2} \leq t \leq 0 \\ at & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{T}{2} \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt f(t) & = \frac{Ta}{2} \\ a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt f(t) \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) & = \frac{Ta((-1)^n - 1)}{n^2\pi^2} \\ b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt f(t) \text{sen}\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) & = 0 \end{cases}$$

En este caso son los términos impares los que se anulan. Adicionalmente, nótese que para  $n$  par, los coeficientes pares también se anulan, Otra vez, si hacemos  $a = 3$  y  $T = 2 \rightarrow \omega_n = n\pi$  tendremos la serie

$$f(x) = \frac{3}{2} - \frac{12 \cos(\pi t)}{\pi^2} - \frac{4 \cos(3\pi t)}{3\pi^2} - \frac{12 \cos(5\pi t)}{25\pi^2} + \dots \quad \text{con } \frac{-T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2}$$

### Función cuadrática

Otro caso, complementario al anterior por sus propiedades de simetría, es la expansión en series de Fourier de la función  $f(x) = x^2$  para  $-\pi < x < \pi$ . Entonces los coeficientes de la expansión serán

$$f(x) = x^2 \quad \Rightarrow \begin{cases} a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx x^2 & = \frac{2\pi^2}{3} \\ a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} dx x^2 \cos(nx) & = \frac{4(-1)^n}{\pi^2 n^2} \end{cases}$$

ya que los coeficientes correspondientes a los términos impares  $b_n$  se anulan. Con lo cual

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos(nx)}{n^2}$$

Nótese que como un resultado particular, al evaluar en  $x = \pi$ , se tiene la función zeta de Riemann  $\zeta(2)$

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \Rightarrow \zeta(2) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Pero este caso se presta también para considerar funciones no periódicas. Supongamos que queremos desarrollar la expansión de Fourier para  $f(x) = x^2$  pero en este caso con  $0 < x < 2$ . Si este fuera el caso, empezamos por suponer que la función tienen un período, digamos  $T = 4$ . Esto es  $-2 \leq x \leq 2$ . Con lo cual

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{4} \int_{-2}^2 dx x^2 = \frac{4}{4} \int_0^2 dx x^2 = \frac{8}{3} \\ a_n &= \frac{2}{4} \int_{-2}^2 dx x^2 \cos\left(\frac{2\pi nx}{4}\right) = \frac{4}{4} \int_0^2 dx x^2 \cos\left(\frac{\pi nx}{2}\right) = \frac{16}{\pi^2 n^2} \cos n\pi = \frac{16}{\pi^2 n^2} (-1)^n \end{aligned}$$

Con lo cual tendremos que

$$x^2 = \frac{4}{3} + 16 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\pi^2 n^2} \cos\left(\frac{\pi nx}{2}\right) \quad \text{para } 0 < x \leq 2$$

#### 7.5.4. Consideraciones de Simetría en series de Fourier

Es de hacer notar que esta propiedades de simetría respecto al período de la función ( $f(x) = f(-x)$  simetría y  $f(x) = -f(-x)$  antisimetría) para un período  $-\frac{T}{2} \leq x \leq \frac{T}{2}$  pueden y deben ser explotadas para simplificar los cálculos. Esto se puede resumir en

$$f(x) = f(-x) \Rightarrow \begin{cases} a_n \neq 0 \\ b_n = 0 \end{cases} \quad \text{y alternativamente} \quad f(x) = -f(-x) \Rightarrow \begin{cases} a_n = 0 \\ b_n \neq 0 \end{cases}$$

Pero más interesante aún es cuando estas propiedades de simetría se presentan en un cuarto del período. Vale decir, que  $f(x)$  será par o impar respecto a  $T/4$  i.e.  $f\left(\frac{T}{4} + x\right) = \pm f\left(\frac{T}{4} - x\right) \Rightarrow f(-s) = \pm f(s)$  donde  $s = \frac{T}{4} - x$ . Entonces

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{x_0}^{x_0+T} ds f(s) \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi ns}{T} + \frac{\pi n}{2}\right)$$

Donde los límites de integración no se han visto alterados porque la función es periódica. Es inmediato comprobar que

$$\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi ns}{T} + \frac{\pi n}{2}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi ns}{T}\right) \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) + \cos\left(\frac{2\pi ns}{T}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi n}{2}\right)$$

es decir

$$b_n = \frac{2}{T} \left( \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) \int_{x_0}^{x_0+T} ds f(s) \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi ns}{T}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi n}{2}\right) \int_{x_0}^{x_0+T} ds f(s) \cos\left(\frac{2\pi ns}{T}\right) \right)$$

por lo que si  $n = 2k \Rightarrow \operatorname{sen}\left(\frac{\pi n}{2}\right) = \operatorname{sen}(\pi k) = 0$  y si  $n = 2k - 1 \Rightarrow \cos\left(\frac{2k-1}{2}\pi\right) = 0$ . Ta misma consideración se puede hacer para los coeficientes  $a_n$  (queda como ejercicio para el lector) y se puede concluir que

- Si  $f(x)$  par en  $T/4$  entonces  $a_{2n-1} = b_{2n} = 0$
- Si  $f(x)$  impar en  $T/4$  entonces  $a_{2n} = b_{2n-1} = 0$

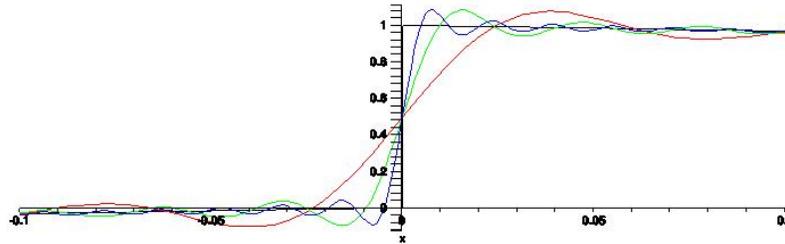


Figura 7.6: Aproximación por series de Fourier para la función escalón  $\{f(x) = 0$  para  $-\infty < x < 1$  y  $f(x) = 1$  para  $x \geq 0\}$  Las curvas corresponden a sumas parciales de Fourier:  $F_{40}(x)$ ,  $F_{100}(x)$ ,  $F_{200}(x)$ ,

### 7.5.5. Tratamiento de discontinuidades

Tal y como hemos mencionado, a diferencia de las series de potencias, las series de Fourier manejan razonablemente bien las discontinuidades, pero por ser una base de funciones continuas, no puede reproducirlas. Tal y como comentamos en el Teorema de Fourier (sección 7.5.2) y muestra la figura 7.6 el valor de las sumas parciales de Fourier en un punto de discontinuidad  $x = x_{\pm 0}$  será el promedio de los valores  $F(x_{-0})$  (por la izquierda) y  $F(x_{+0})$  (por la derecha) en la discontinuidad. Esto es la expansión de Fourier alrededor de un punto de discontinuidad  $x \rightarrow x_{\pm 0}$  tenderá al valor  $F(x) \rightarrow F(x_{\pm 0}) \equiv F_m$  donde  $F_m = \frac{F(x_{+0}) + F(x_{-0})}{2}$ .

#### El Fenómeno de Gibbs

Pero también se muestra en esa figura 7.6 que, tanto por la izquierda como por la derecha la discontinuidad de la función escalón, las sumas parciales de Fourier oscilan y no convergen a los valores  $x_{\pm 0}$ . El comportamiento oscilante de las sumas parciales de Fourier alrededor de las discontinuidades, que no desaparecen ni en el límite se denominan *fenómeno de Gibbs* en honor a su descubridor Josiah Willard Gibbs<sup>10</sup>

Para entender qué pasa en la discontinuidad consideremos una variación de la onda cuadrada considerada anteriormente (7.5.3). Entonces sus sumas parciales serán

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t < \pi \\ 0 & \text{si } \pi \leq t < 2\pi \end{cases} \Rightarrow F_{2n}^c(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} \text{sen}((2k-1)x)$$

porque los coeficientes pares ( $a_n$ ) se anulan. Para estudiar el fenómeno de Gibbs reescribimos la suma parcial anterior de una manera ingeniosa

$$F_{2n}^c(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^n \left( \int_0^t \text{ds} \cos(2k-1)s \right) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \int_0^t \text{ds} \left( \sum_{k=1}^n \cos(2k-1)s \right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^t \text{ds} \left( \frac{\text{sen}(2ns)}{\text{sen}(s)} \right)$$

donde, utilizando la fórmula de Moivre y convirtiendo esa serie de cosenos en una de exponenciales la cual,

<sup>10</sup>Josiah Willard Gibbs 1839 - 1903 Algunos lo consideran el primer Físico Norteamericano, de hecho fue el primero en recibir un título de doctorado por una universidad norteamericana (Yale University). Hizo importantes aportes en electromagnetismo y sobre todo en termodinámica y física estadística, sentando las bases matemáticas para estas disciplinas. En matemáticas es conocido su estudio de las oscilaciones de las expansiones de las series de Fourier en los puntos de discontinuidad. Más detalles <http://www-history.mcs.st-and.ac.uk>

a su vez es una progresión geométrica (y le queda la comprobación al lector), hemos sustituido

$$\sum_{k=1}^n \cos(2k-1)s = \frac{\text{sen}(2ns)}{\text{sen}(s)}$$

Es inmediato convencerse que las sumas parciales  $F_{2n}^c(x)$  siempre tendrán máximos y mínimos

$$\frac{dF_{2n}^c(x)}{dx} = \frac{\text{sen}(2nx)}{\text{sen}(x)} = 0 \quad \Rightarrow \text{ para } x = \frac{m\pi}{2n} \quad \text{ con } m = 1, 2, 3, \dots$$

Las Series de Fourier tienden a sobre-estimar el valor de los puntos de discontinuidad en  $\pm 18\%$  esto es un valor de  $\approx 1,1789797$ . La inclusión de más términos en las sumas parciales no mejoran la situación. El fenómeno de Gibbs no se restringe a Series de Fourier sino que también se presenta en las demás series de funciones (ver detalles en la referencia [Arfken, Weber y Weber 2000]).

El fenómeno de Gibbs fue observado ¡ experimentalmente ! por primera vez por Albert Michelson<sup>11</sup> Para finales de 1800 Michelson había creado un dispositivo mecánico para medir las componentes de Fourier de señales eléctricas. Al incorporarle una onda cuadrada observó que una oscilación inesperada en los puntos de discontinuidad. Creyó que esa oscilación se debía a defectos del dispositivo. Luego de probar múltiples tipos de señales periódicas y observar un comportamiento similar, decidió comentárselo a su amigo Willard Gibbs, de la Universidad Yale. Al poco tiempo Gibbs volvió una explicación que dejó intacta la fama de Michelson como instrumentista. El fenómeno es una consecuencia de la teoría de series de Fourier y no del equipo diseñado por Michelson<sup>12</sup>.

### Corrección al fenómeno de Gibbs: Factor $\sigma$ de Lanczos

Una de las estrategia para corregir las oscilaciones del fenómeno de Gibbs se le debe a Lanczos<sup>13</sup> Considerando el mismo caso de la función onda cuadrada, se puede intentar sustituir la función oscilante  $F_n^c(x)$  por su promedio  $\bar{F}_n^c(x)$  alrededor del punto  $x$ . Vale decir

$$F_{2n}^c(x) \rightarrow \bar{F}_{2n}^c(x) = \frac{n}{\pi} \int_{x-\frac{\pi}{2n}}^{x+\frac{\pi}{2n}} ds F_{2n}^c(s) = \frac{n}{\pi} \int_{x-\frac{\pi}{2n}}^{x+\frac{\pi}{2n}} ds \left[ \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} \text{sen}((2k-1)s) \right]$$

desarmando tendremos que

$$\begin{aligned} \bar{F}_{2n}^c(x) &= \frac{n}{\pi} \int_{x-\frac{\pi}{2n}}^{x+\frac{\pi}{2n}} ds \left[ \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} \text{sen}((2k-1)s) \right] \\ &= \frac{n}{\pi} \left[ \frac{\pi}{2n} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)^2} \cos((2k-1)s) \right]_{x-\frac{\pi}{2n}}^{x+\frac{\pi}{2n}} \\ \bar{F}_{2n}^c(x) &= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} \underbrace{\left[ \frac{\text{sen}\left(\frac{\pi}{2n}(2k-1)\right)}{\frac{\pi}{2n}(2k-1)} \right]}_{\sigma} \text{sen}((2k-1)x) \end{aligned}$$

<sup>11</sup> **Albert Abraham Michelson** Strelno, Prussia, 1852 - Pasadena EEUU. 1931. Premio Nobel en Física (1907) uno de los físicos experimentales más habilidosos de todos los tiempos. La precisión y lo ingenioso de los instrumentos creados por él son famosos. Con importantes contribuciones en medidas de fenómenos en óptica. Una de sus contribuciones más conocidas son los experimentos para mostrar la inexistencia del Ether como medio de transmisión para el fenómeno electromagnético. Más detalles <http://nobelprize.org/physics/laureates/1907/michelson-bio.html>

<sup>12</sup> Más detalles [http://en.wikipedia.org/wiki/Gibbs\\_phenomenon](http://en.wikipedia.org/wiki/Gibbs_phenomenon)

<sup>13</sup> **Cornelius Lanczos** 1893 - 1974 Hungría. Matemático húngaro con contribuciones importante en Relatividad y Física Teórica. En matemáticas es conocido inventar la transformada rápida de Fourier. Más detalles en <http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Lanczos.html>

Con lo cual hemos identificado el factor  $\sigma$  de Lanczos. Siguiendo este mismo proceso se puede generalizar para cualquier función de tal modo que una serie de Fourier genérica podrá ser corregida con un factor  $\sigma$  para lograr

$$\bar{F}_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \left[ \frac{\text{sen}\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{\left(\frac{k\pi}{n}\right)} \right] (a_k \cos(kx) + b_k \text{sen}(kx)) \equiv \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \sigma_k (a_k \cos(kx) + b_k \text{sen}(kx))$$

### 7.5.6. Transformadas de Fourier

La transformada de Fourier representa (como combinación lineal de funciones sinusoidales) a funciones definidas en toda la recta real y/o sin una periodicidad definida. Puede ser considerada como la generalización de la representación en serie de Fourier, y es mayormente utilizada para expresar funciones que varían en el tiempo con el único requisito que tengan norma acotada, i.e.  $\int_{-\infty}^{\infty} dt |f(t)|$  finita

Hemos visto en 7.5.1, que podemos expresar una función en término de series de Fourier complejas

$$|\mathbf{f}\rangle = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{C}_k |\tilde{\phi}_k\rangle \equiv \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{C}_k e^{-ikx} \quad \leftrightarrow \quad f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{C}_n e^{i\frac{2n\pi}{T}t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{C}_n e^{i\omega_n t}$$

donde hemos definido  $\omega = \frac{2n\pi}{T}$ . Ahora bien, podemos hacer  $T \rightarrow \infty$  con lo cual  $[-T/2, T/2] \rightarrow [-\infty, \infty]$  pero además

$$T \rightarrow \infty \quad \Rightarrow \quad \frac{2\pi}{T} = \frac{\omega}{n} = \Delta\omega \rightarrow d\omega \quad \text{y además} \quad \frac{\int_{-T/2}^{T/2} dt f(t)}{T} \rightarrow 0 \quad \text{ya que} \quad \int_{-\infty}^{\infty} dt f(t) \text{ existe y es acotada.}$$

Si recordamos la expresión que toman los coeficientes de la expansión

$$\tilde{C}_n = \frac{\langle \tilde{\phi}_n | \mathbf{f} \rangle}{\langle \tilde{\phi}_k | \tilde{\phi}_n \rangle} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dx e^{-i\frac{2n\pi x}{T}} f(x) \quad \Rightarrow \quad f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \frac{\Delta\omega}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} dx e^{-inx} f(x) \right) e^{i\omega_n t}$$

con lo cual hacer  $T \rightarrow \infty$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{i\omega t} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-i\omega x} f(x)}_{F(\omega)}$$

De este modo, la transformada de Fourier de una función y su inversa, pueden escribirse como

$$F(\omega) \equiv \mathcal{F}[f(t)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-i\omega t} f(t) \quad \Leftrightarrow \quad f(t) \equiv \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{i\omega t} F(\omega)$$

### Propiedades

Las transformada de Fourier cumplen con las siguiente propiedades, las cuales de derivan de la definición arriba expuesta

1. Las transformada de la derivada  $\mathcal{F}[f'(t)] = i\omega F(\omega)$  y en general  $\mathcal{F}[f^n(t)] = i^n \omega^n F(\omega)$ . Esta propiedad es más o menos inmediata a partir de la definición integrando por partes

$$\mathcal{F}[f'(t)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} f'(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\omega t} f(t) \Big|_{-\infty}^{\infty} + \frac{i\omega}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} f(t) = i\omega F(\omega)$$

2. La transformada de la integral

$$\mathcal{F}\left[\int^t ds f(s)\right] = \frac{1}{i\omega} F(\omega) + 2\pi c\delta(\omega)$$

donde la función (distribución)  $\delta(\omega)$  se denomina delta de Dirac y el término  $2\pi c\delta(\omega)$  representa la transformada de la constante de integración

3. Escalamiento  $\mathcal{F}[f(at)] = \frac{1}{a} f\left(\frac{\omega}{a}\right)$

4. Traslación  $\mathcal{F}[f(t+a)] = e^{ia\omega} F(\omega)$

5. Multiplicación por un exponencial  $\mathcal{F}[e^{\alpha t} f(t)] = f(\omega + i\alpha)$

### Funciones pares e impares

Al igual que en las expansiones de Fourier la paridad de la función  $f(t)$  es importante. Esto se nota rápidamente a partir de la definición. Supongamos  $f(t) = -f(-t)$ , entonces

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-i\omega t} f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt (\cos \omega t - i \operatorname{sen} \omega t) f(t) = \frac{-2i}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} dt \operatorname{sen} \omega t f(t)$$

con lo cual podremos definir las transformadas de Fourier seno y coseno para funciones impares y pares respectivamente. Esto es para funciones impares  $f(t) = -f(-t)$

$$F(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} dt \cos \omega t f(t) \quad \Leftrightarrow \quad f(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} d\omega \cos \omega t F(\omega)$$

y para funciones pares  $f(t) = f(-t)$

$$F(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} dt \operatorname{sen} \omega t f(t) \quad \Leftrightarrow \quad f(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} d\omega \operatorname{sen} \omega t F(\omega)$$

### Bases discreta y continuas: La base de Ondas Planas

Haremos una digresión para fijar conceptos y extender algunos de los razonamientos que hemos desarrollado hasta aquí. Tal y como hemos visto repetidas veces, la representación de un vector  $|\mathbf{F}\rangle$  en un espacio vectorial abstracto  $\mathbf{V}$  puede darse en término de una base ortonormal de vectores (discreta y finita  $B_{DF} = \{|\mathbf{u}_1\rangle, |\mathbf{u}_2\rangle, |\mathbf{u}_3\rangle, \dots, |\mathbf{u}_n\rangle\}$  o discreta e infinita  $B_{DI} = \{|\mathbf{u}_1\rangle, |\mathbf{u}_2\rangle, |\mathbf{u}_3\rangle, \dots, |\mathbf{u}_n\rangle, \dots\}$ ) de la forma:

$$|\mathbf{F}\rangle = \begin{cases} \sum_{i=0}^n c_i |\mathbf{u}_i\rangle = \sum_{i=0}^n \langle \mathbf{u}_i | \mathbf{F} \rangle |\mathbf{u}_i\rangle & \Leftrightarrow B_{DF} = \{|\mathbf{u}_1\rangle, |\mathbf{u}_2\rangle, |\mathbf{u}_3\rangle, \dots, |\mathbf{u}_n\rangle\} \\ \sum_{i=0}^{\infty} c_i |\mathbf{v}_i\rangle = \sum_{i=0}^{\infty} \langle \mathbf{u}_i | \mathbf{F} \rangle |\mathbf{u}_i\rangle & \Leftrightarrow B_{DI} = \{|\mathbf{u}_1\rangle, |\mathbf{u}_2\rangle, |\mathbf{u}_3\rangle, \dots, |\mathbf{u}_n\rangle, \dots\} \end{cases}$$

donde en ambos casos:

$$c_i = \langle \mathbf{u}_i | \mathbf{F} \rangle = \sum_{j=0}^{\infty} c_j \langle \mathbf{u}_i | \mathbf{u}_j \rangle = \sum_{j=0}^{\infty} c_j \delta_{ij}$$

la intención ahora será utilizar la transformada de Fourier para construir la generalización de bases discretas a continua  $|\mathbf{w}_\alpha\rangle$  de tal forma que transformamos el índice de la sumatoria en la variable de una integral

$$|\Psi\rangle = \int d\alpha c(\alpha) |\mathbf{w}_\alpha\rangle$$

donde

$$c(\beta) = \langle \mathbf{w}_\beta | \Psi \rangle = \int d\alpha c(\alpha) \langle \mathbf{w}_\beta | \mathbf{w}_\alpha \rangle = \int d\alpha c(\alpha) \delta(\alpha - \beta)$$

con en la cual  $\delta(\alpha - \beta)$  es una Delta de Dirac. Así, los dos conceptos expresados hasta ahora tienen una expresión:

Propiedad \ Base	Discreta	Continua
Ortogonalidad	$\langle \mathbf{v}_i   \mathbf{v}_j \rangle = \delta_{ij}$	$\langle \mathbf{w}_\beta   \mathbf{w}_\alpha \rangle = \delta(\alpha - \beta)$
Cierre	$\mathbf{1} = \sum_{j=0}^{\infty}  \mathbf{v}_j\rangle \langle \mathbf{v}_j $	$\mathbf{1} = \int d\alpha  \mathbf{w}_\alpha\rangle \langle \mathbf{w}_\alpha $
Expansión	$ \mathbf{F}\rangle = \sum_{i=0}^{\infty} c_i  \mathbf{u}_i\rangle$	$ \Psi\rangle = \int d\alpha c(\alpha)  \mathbf{w}_\alpha\rangle$
Componentes	$c_i = \langle \mathbf{u}_i   \mathbf{F} \rangle$	$c(\beta) = \langle \mathbf{w}_\beta   \Psi \rangle$
Producto Interno	$\langle \mathbf{G}   \mathbf{F} \rangle = \sum_{i=0}^{\infty} g_i^* f_i$	$\langle \mathbf{G}   \mathbf{F} \rangle = \int d\alpha g^*(\alpha) f(\alpha)$
Norma	$\langle \mathbf{F}   \mathbf{F} \rangle = \sum_{i=0}^{\infty}  f_i ^2$	$\langle \mathbf{F}   \mathbf{F} \rangle = \int d\alpha  f(\alpha) ^2$

Ilustraremos esta generalización con la construcción de la base de ondas planas. Hemos visto que la transformada compleja de Fourier compleja para una función, se puede escribir como

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i st} f(t) \quad \Leftrightarrow \quad f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} ds e^{-i st} F(s)$$

las cuales reescribiremos en términos más familiares a la comunidad de físicos como

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} dp e^{ipx/\hbar} \bar{\psi}(p) \quad \Leftrightarrow \quad \bar{\psi}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ipx/\hbar} \psi(x)$$

Hemos tenido cuidado de incluir los factores de normalización adecuados para el caso de las descripciones en mecánica cuántica. Estas fórmulas pueden ser reinterpretadas en función de los conceptos anteriormente expuestos y podemos definir una base continua de la forma

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} dp \underbrace{\left( \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{i px/\hbar} \right)}_{v_p(x)} \bar{\psi}(p) \quad \Leftrightarrow \quad \bar{\psi}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} dx \underbrace{\left( \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{-i px/\hbar} \right)}_{v_p^*(x)} \psi(x)$$

por lo cual

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dp v_p(x) \bar{\psi}(p) \quad \Leftrightarrow \quad \bar{\psi}(p) = \int_{-\infty}^{\infty} dx v_p^*(x) \psi(x)$$

Diremos que la función  $\psi(x)$  está expresada en la base de ondas planas  $v_p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{i px/\hbar}$

Nótese

- El índice  $p$  de  $v_p(x)$  varía de forma continua entre  $-\infty$  e  $\infty$ .
- Que  $v_p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{i px/\hbar} \notin \mathcal{L}^2$  es decir no pertenece al espacio vectorial de funciones de cuadrado integrable ya que su norma diverge

$$\langle \mathbf{v}_p | \mathbf{v}_p \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx |v_p(x)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{2\pi\hbar} \rightarrow \infty$$

- Que las proyecciones de  $\psi(x)$  sobre la base de ondas planas es  $\bar{\psi}(p) = \langle \mathbf{v}_p | \psi \rangle$

- La relación de cierre para esta base se expresa como

$$1 = \int d\alpha |\mathbf{v}_\alpha\rangle \langle \mathbf{v}_\alpha| \quad \Leftrightarrow \quad \int_{-\infty}^{\infty} dp v_p^*(x') v_p(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dp \frac{1}{2\pi\hbar} e^{i p(x'-x)/\hbar} = \delta(x' - x)$$

mientras que de la definición de producto interno, uno obtiene

$$\langle \mathbf{v}_{p'} | \mathbf{v}_p \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx v_{p'}^*(x) v_p(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dp \frac{1}{2\pi\hbar} e^{i x(p'-p)/\hbar} = \delta(p' - p)$$

### Un para de ejemplos

Un ejemplo inmediato lo tenemos al considerar la función

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } |t| < 1 \\ 0 & \text{el resto} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^1 dt 1 e^{-i\omega t} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left. \frac{e^{-i\omega} - e^{i\omega}}{-i\omega} \right|_{-1}^1 = \frac{2\text{sen } \omega}{\sqrt{2\pi}\omega}$$

el otro ejemplo de uso lo podremos construir a si consideramos la ecuación diferencial inhomogénea y busquemos su solución

$$\frac{d\phi(x)}{dx^2} - K^2\phi(x) = f(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^1 dt \left[ \frac{d\phi(x)}{dx^2} - K^2\phi(x) \right] e^{-i\omega t} = F(\omega)$$

donde  $F(\omega)$  es la transformada de Fourier de la función  $f(x)$ . Utilizando las propiedades de la transformada de Fourier obtenemos que

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^1 dt \left[ \frac{d\phi(x)}{dx^2} \right] e^{-i\omega t} - K^2\phi(\tilde{\omega}) = F(\omega) \quad \Rightarrow \quad -k^2\phi(\tilde{\omega}) - K^2\phi(\tilde{\omega}) = F(\omega) \quad \Rightarrow \quad \phi(\tilde{\omega}) = -\frac{F(\omega)}{k^2 + K^2}$$

donde hemos representado  $\phi(\tilde{\omega})$  como la transformada de Fourier de la solución  $\phi(x)$ . Con lo cual

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^1 dt \phi(\tilde{\omega}) e^{-i\omega t} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^1 dt \frac{F(\omega)}{k^2 + K^2} e^{-i\omega t}$$

Como solución formal de la ecuación diferencial resulta sencilla y el método también es inmediato. El punto crucial es la solución de la integral que resulta de la transformación inversa. Normalmente este tipo de integrales no son tratables de manera analítica. Pero siempre queda el recurso numérico.

### 7.5.7. Transformadas Discretas de Fourier

Aquí haremos algo más contemporáneo que será estudiar la versión discreta de esta transformación. En general las integrales, en su mayoría, no se pueden resolver analíticamente por lo que tenemos que proceder a resolverlas de forma numérica. La mayor parte de los métodos numéricos involucra convertir integrales en sumatorias. Es decir en series de funciones.

En 7.5.1 hemos visto como las funciones trigonométricas (y las exponenciales de argumento imaginario) son ortogonales bajo integrales evaluadas en un determinado intervalo. En otras palabras con la definición de producto interno en un espacio de funciones. Ahora bien, esas mismas funciones (*Fourier Generalidades*, *cosenos* y funciones *exponenciales* de argumento imaginario) serán también ortogonales al ser evaluadas en puntos muy particulares.

Consideremos los siguientes  $2N$  puntos  $t_k = \frac{kT}{2N}$  y probaremos que las funciones  $e^{2\pi i p t_k/T}$  y  $e^{2\pi i q t_k/T}$  serán ortogonales  $\propto \delta_{qp}$  en un conjunto esos puntos  $t_k$ . Esto es

$$\sum_{k=0}^{2N-1} \left[ e^{\frac{2\pi i p t_k}{T}} \right]^* e^{\frac{2\pi i q t_k}{T}} = \sum_{k=0}^{2N-1} e^{\frac{2\pi i s t_k}{T}} = \sum_{k=0}^{2N-1} e^{\frac{2\pi i s k}{2N}} = \begin{cases} \frac{1-r^{2N}}{1-r} = 0 & r \neq 1 \\ 2N & r = 1 \end{cases}$$

donde hemos sustituido  $s = q - p$ , y evaluado en los puntos  $t_k = \frac{kT}{2N}$  con  $k = 1, 2, 3, \dots, 2N - 1$ . Nótese que la última de las series es una serie finita y geométrica con razón  $r = e^{(\pi i s)/N}$ , que comienza con 1 y por lo tanto suma (dependiendo del valor de  $r$ ) lo que aparece en la llave. Es inmediato convencerse que, para todo  $N$  se cumple que  $r^{2N} = e^{2\pi i s} = 1$  (con  $s$  entero) con lo cual se cumple la relación de ortogonalidad que buscamos

$$\sum_{k=0}^{2N-1} \left[ e^{\frac{2\pi i p t_k}{T}} \right]^* e^{\frac{2\pi i q t_k}{T}} = 2N \delta_{qp} \quad \text{con } k = 1, 2, 3, \dots, 2N - 1 \quad (7.3)$$

Si hacemos un ligero cambio de notación y llamamos  $\omega_m = \frac{2\pi m}{T}$  tendremos algunos cambios, en apariencia, cosméticos

$$e^{\pm \frac{2\pi i m t_k}{T}} \rightarrow e^{\pm \omega_m t_k} \Rightarrow F(\omega_m) = \frac{1}{2N} \sum_{k=0}^{2N-1} f(t_k) e^{\pm \omega_m t_k} \Leftrightarrow f(t_k) = \frac{1}{2N} \sum_{m=0}^{2N-1} F(\omega_m) e^{\pm \omega_m t_k} \quad (7.4)$$

La función  $F(\omega_m)$  representa la transformada discreta de Fourier de la  $f(t_k)$ . Para despejar la función  $f(t_k)$  hemos utilizado la relación de ortogonalidad 7.3

Consideremos el siguiente  $f(t_k) = \cos t_k$  evaluado en un período  $T = 2\pi$  y dividido, digamos en  $N = 2$  intervalos. Los puntos en los cuales evaluaremos nuestra serie serán  $2N = 4$ , vale decir

$$t_k = \frac{kT}{2N} \equiv \frac{k\pi}{2} \quad \text{con } k = 0, 1, 2, 3 \Leftrightarrow \omega_m = \frac{2\pi m}{T} \equiv m \Rightarrow \frac{e^{i\omega_m t_k}}{2N} \equiv \frac{e^{imk\pi/2}}{2N}$$

nótese que la función  $f(t_k)$  puede ser escrita como un vector  $f(t_k) = (1, 0, -1, 0)$ , con lo cual para encontrar la expresión de su transformada discreta de Fourier,  $F(\omega_m)$ , podemos expresar la suma como una matriz de transformación con índices  $m, k$ . Esto es

$$\frac{e^{imk\pi/2}}{2N} \Leftrightarrow \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

con lo cual

$$F(\omega_m) = \frac{1}{2N} \sum_{k=0}^{2N-1} f(t_k) e^{\pm \omega_m t_k} \Rightarrow \begin{pmatrix} F(\omega_0) \\ F(\omega_1) \\ F(\omega_2) \\ F(\omega_3) \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Respecto a la ecuación 7.4 se deben puntualizar varios elementos

- la frecuencia angular  $\omega_m = \frac{2\pi m}{T}$  corresponde a lo que en Física se denomina el espacio recíproco (al temporal), espacio de frecuencias u  $\omega$ -espacio. Por ello la función  $F(\omega_m)$  está expresada en este espacio de frecuencias, mientras que la función  $f(t_k)$  en el de tiempos.

- La elección de uno de los signos + y - en la expresión  $e^{\pm\omega_m t_k}$  es arbitraria.

Con lo cual si “reconstruimos” la función original a partir de la transformada discreta nos sorprende el resultado, por cuanto no coincide

$$f(t_k) = \frac{1}{2}e^{-it_k} + \frac{1}{2}e^{-3it_k} \Rightarrow \Re[f(t_k)] = \frac{1}{2}\cos t_k + \frac{1}{2}\cos 3t_k$$

Ahora bien, para los puntos  $t_k = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \text{ y } \frac{3\pi}{2}$  si se cumple que los valores  $\cos t_k = \frac{1}{2}\cos t_k + \frac{1}{2}\cos 3t_k$ . En los pocos puntos seleccionados  $\cos t_k$  y  $\cos 3t_k$  se asemejan. En la medida que seleccionemos más puntos en esa medida se dejan de parecer y la reconstrucción de la función será más fidedigna.

# Bibliografía

- [Aleksandrov Kolmogorov y Lavrentiev 1999] A. D. Aleksandrov, A. N. Kolmogorov y M. A. Lavrentiev (1999) **Mathematics: Its Content, Methods and Meaning**. (*Dover Publications, New York*) Existe traducción por Editorial Alianza Universidad.
- [Arfken, Weber y Weber 2000] Arfken, G. B., Weber, H., y Weber, H.J. (2000) **Mathematical Methods for Physicists** 5ta Edición (*Academic Press, Nueva York*)
- [1] Byron, F.W. y Fuller W.F. (1970) **Mathematics of Classical and Quantum Physics** (*Dover Publications, New York*)
- [Cushing 1975] Cushing, J. (1975) **Applied Analytical Mathematics for Physical Sciences** (*John Wiley & Sons, New York*)
- [Hamming 1973] Hamming R.W. (1973) **Numerical Methods For Scientist and Engineers, 2nd ed.** (Dover, New York.)
- [Hassani 1991] Hassani, S. (1991) **Foundations of Mathematical Physics** (*Prentice Hall, International Edition, London:*)
- [Lebedev 1972] Lebedev, N.N. (1972) **Special Functions & Their Applications** (*Dover Publications, New York*)
- [math-atlas.org URL] **The Mathematical Atlas** <http://www.math-atlas.org/welcome.html>
- [Richards 2002] Richards, D. (2002) **Advanced Mathematical Methods with MAPLE** (*Cambridge University Press Cambridge*)
- [Riley Hobson y Bence 2002] Riley, K.F., Hobson, M.P. y Bence, S.J. (2002) **Mathematical Methods for Physics and Engineering** (*Cambridge University Press Cambridge*)
- [Weisstein URL] Weisstein, E. W., **MathWorld** <http://mathworld.wolfram.com/>