Métodos Matemáticos 1
Tarea 3
Interpolación de Funciones
Fecha de entrega 10 junio 2015

Muchas veces nos encontramos con la situación en la cual tenemos un conjunto de (digamos n) medidas o puntos experimentales $\{(x_1, y_1 = f(x_1)), (x_2, y_2 = f(x_2)), \cdots, (x_n, y_n = f(x_n))\}$ y para modelar ese experimento quisiéramos una función que ajuste estos puntos. Tener una función nos provee la gran ventaja de poder intuir o aproximar los puntos que no hemos medido. La función candidata más inmediata es un polinomio y debemos definir el grado del polinomio y la estrategia que aproxime esos puntos. Puede ser que no sea lineal el polinomio y queramos ajustar esos puntos a un polinomio tal que éste pase por los puntos experimentales.

Queda entonces por decidir la estrategia. Esto es si ajustamos la función como "trozos" de polinomios que ajusten a subconjuntos $\{(x_1, y_1 = f(x_1)), (x_2, y_2 = f(x_2)), \cdots, (x_m, y_m = f(x_m))\}$ con $m < n$. de los puntos experimentales En este caso tendremos una función de ajuste, para cada conjunto de puntos. También podemos a ajustar la función a todo el conjunto de puntos experimentales y, en ese caso el máximo grado del polinomio que los ajuste será de grado $n-1$. Para encontrar este polinomio lo expresamos como una combinación lineal de Polinomios de Legendre. Esto es

$$\mathcal{P}(x) = f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} C_k \left|P_k\right\rangle = \sum_{k=0}^{n-1} C_k P_k(x) \quad \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} y_1 = f(x_1) = C_0 P_0(x_1) + C_1 P_1(x_1) + \cdots + C_{n-1} P_{n-1}(x_1) \\ y_2 = f(x_2) = C_0 P_0(x_2) + C_1 P_1(x_2) + \cdots + C_{n-1} P_{n-1}(x_2) \\ \vdots \\ y_n = f(x_n) = C_0 P_0(x_n) + C_1 P_1(x_n) + \cdots + C_{n-1} P_{n-1}(x_n) \end{array} \right.$$

que no es otra cosa que un sistema de n ecuaciones con n incógnitas: los coeficientes $\{C_0, C_1, \cdots C_{n-1}\}$ Al resolver el sistema de ecuaciones y obtener los coeficientes, podremos obtener la función polinómica que interpola esos puntos. Es importante hacer notar que debido a que los polinomios de Legendre está definido en el intervalo $[-1, 1]$ los puntos experimentales deberán re-escalarse al ese intervalo para poder encontrar el polinomio de interpolación como combinación lineal de los Polinomios de Legendre.

Un problema muy actual es explicar la curva de rotación de las estrellas en los brazos espirales de las galaxias. Es sin duda uno de los mayores misterios que hoy enfrentamos. Para explicar ese comportamiento anómalo se invoca la existencia de una cantidad importante de materia no luminosa, es decir materia que no vemos y no podemos detectar mas que por sus efectos gravitacionales. En un artículo de hace unos años[1] Se presentan datos para las curvas de rotación en varias galaxias.

1. Seleccione los datos correspondientes a las curvas de rotación de la galaxia NGC4389, grafique esos datos y ajústelos con una expansión en polinomios de Legendre.

2. De sus cursos de Física elemental se puede inferir que en el plano ecuatorial de la galaxia

$$v^2 = R \left. \frac{\partial \Phi(R, z)}{\partial R} \right|_{z=0} \tag{1}$$

   donde v es la velocidad tangencial de las estrellas y $\Phi(R, z)$. Entonces, encuentre la gráfica del potencial gravitacional que genera esa distribución de velocidades.

3. Encuentre también la gráfica de la distribución de densidad y masa de la galaxia suponiendo que las estrellas son partículas de prueba y todo está restringido al plano ecuatorial

[1] M. A. W. Verheijen y R. Sancisi. *The Ursa Major cluster of galaxies. IV. HI synthesis observations. Astronomy and Astrophysics*, **370**:765? 867, 2001.