Matemática Avanzadas
Tarea 3 (Entrega 4junio)
Series por todos lados

1. **Series y ecuaciones diferenciales**
Una de las aplicaciones más útiles del algebra de series tiene que ver con la solución de ecuaciones diferenciales. Al igual que desde nuestra más tierna infancia consideramos una ecuación algebráica como aquella que se cumplía para ciertos valores de $x = x_0$, llamaremos ahora una ecuación diferencial aquella que se cumple para ciertas **funciones** i.e.

$$x^2 - 4x + 4 = 0 \quad \Leftarrow x_0 = 2 \quad \leftrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} - f(x) = 0 \Leftarrow f(x) = e^x$$

a) Consideremos la conocida ecuación diferencial

$$y(x)'' + y(x) = 0$$

Muestre que la solución a esta ecuación tiene la forma de $y(x) = a_0 \cos(x) + a_1 \mathrm{sen}(x)$

Ahora se plantea encontrar una solución entorno a $x = 0$, por lo tanto considere una propuesta de solución por serie de la forma $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, sustitúyala en la ecuación diferencial anterior

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)'' + \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) = 0$$

haga el álgebra correspondiente y muestre que la solución general para esa ecuación es

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + a_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$

Compruebe que es la misma solución analítica anterior.

b) Considere ecuación de Hermite[1] la cual aparece en la solución del oscilador armónico cuántico

$$y'' - 2xy' + \lambda y = 0$$

Igual que en el caso anterior se quiere resolver esta ecuación alrededor del punto $x_0 = 0$, e igualmente proponemos la expansión en series de potencias como solución $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, sustitúyala en la ecuación diferencial anterior y muestre que la solución general tendrá la forma de

$$y(x) = a_0 \left[\underbrace{1 - \frac{\lambda}{2!}x^2 - \frac{(4-\lambda)\lambda}{4!}x^4 - \frac{(8-\lambda)(4-\lambda)\lambda}{6!}x^6 - \cdots}_{y_0}\right]$$

$$+ a_1 \left[\underbrace{x + \frac{(2-\lambda)}{3!}x^3 + \frac{(6-\lambda)(2-\lambda)}{5!}x^5 + \frac{(10-\lambda)(6-\lambda)(2-\lambda)}{7!}x^7 + \cdots}_{y_1}\right]$$

[1] **Charles Hermite**, (1822-1901). Matemático francés, especializado en el estudio de teoría de funciones. Profesor en la Universidad de París, ofreció importantes aportaciones al álgebra, las funciones abelianas y la teoría de las formas cuadráticas.

c) Un problema muy actual es explicar la curva de rotación de las estrellas en los brazos espirales de las galaxias. Es sin duda uno de los mayores misterios que hoy enfrentamos. Para explicar ese comportamiento anómalo se invoca la existencia de una cantidad importante de materia no luminosa, es decir materia que no vemos y no podemos detectar mas que por sus efectos gravitacionales. En un artículo de hace unos años[2] Se presentan datos para las curvas de rotación en varias galaxias.

1) Seleccione los datos correspondientes a las curvas de rotación de la galaxia NGC4389, grafique esos datos y ajústelos con una expansión en polinomios de Legendre.
2) De sus cursos de Física elemental se puede inferir que en el plano ecuatorial de la galaxia

$$v^2 = R\left.\frac{\partial \Phi(R,z)}{\partial R}\right|_{z=0} \tag{1}$$

donde v es la velocidad tangencial de las estrellas y $\Phi(R,z)$. Entonces, encuentre la gráfica del potencial gravitacional que genera esa distribución de velocidades.
3) Encuentre también la gráfica de la distribución de densidad y masa de la galaxia suponiendo que las estrellas son partículas de prueba y todo está restringido al plano ecuatorial

2. Dada la siguiente función definida en $0 < x < 6$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } 0 < x < 1 \\ x-1 & \text{para } 1 < x < 2 \\ 1 & \text{para } 2 < x < 3 \\ -1 & \text{para } 3 < x < 4 \\ x-5 & \text{para } 4 < x < 5 \\ 0 & \text{para } 5 < x < 6 \end{cases}$$

a) Expándala en series de Fourier hasta el décimo armónico y muestre la huella espectral (intensidad del espectro en los armónicos).

b) Expándala en series de funciones de Bessel de primera especie $J_0(x)$, también hasta el décimo término de la serie

En cada caso grafique la aproximación sucesiva de los términos de las series correspondientes.

[2]M. A. W. Verheijen y R. Sancisi. *The Ursa Major cluster of galaxies. IV. HI synthesis observations. Astronomy and Astrophysics*, **370**:765? 867, 2001.