Mecánica 1
Examen 2
Fecha **18 Diciembre**

1. **Sobre soportes y masas**: Un soporte construido a partir de dos barras de longitudes l y masas M, se usa para colgar una masa m utilizando una cuerda de longitud $(\sqrt{2}+1)l$, tal y como muestra la figura 1

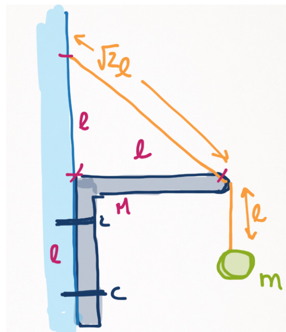

Figura 1: Soporte de masa m construido con barras de longitud l

a) Suponga que ninguno de los cuerpos se mueve y que la cuerda es flexible, inextensible y sin masa

1) Indique el diagrama de las fuerzas aplicadas a cada uno de los cuerpos que componen el sistema (2ptos)

Respuesta El diagrama de cuerpo libre para el sistema con cuerdas SIN masa se ilustra en la figura 2

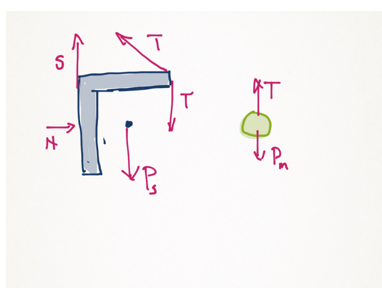

Figura 2:

2) Calcule la posición del centro del masa del sistema. (3ptos)

$$\vec{R}_{CM} = \frac{M\frac{l}{2}\hat{\imath} - M\frac{l}{2}\hat{\jmath} + ml\left(\hat{\imath}-\hat{\jmath}\right)}{2M+m} = \frac{l\left(\frac{M}{2}+m\right)}{2M+m}\left\{\hat{\imath}-\hat{\jmath}\right\}$$

3) Escriba TODAS las ecuaciones de "movimiento" para que el sistema permanezca estático. Especifique los puntos respecto a los cuales se han referido las ecuaciones (3ptos)

Respuesta
- masa m
$$T - mg = 0$$
- Soporte (Fuerzas)
$$N - T\cos(\theta) = 0 \quad \text{y} \quad S + T\text{sen}(\theta) - T - 2Mg = 0$$
es decir
$$N - \frac{T\sqrt{2}}{2} = 0 \quad \text{y} \quad S + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right)T - 2Mg = 0$$
- Soporte (torques respecto al vértice del soporte)
$$-2Mg\frac{l}{2} + N\frac{l}{2} + T\text{sen}(\theta)l - Tl = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -2Mg + N + T\text{sen}(\theta) - T = 0$$

b) Suponga que ninguno de los cuerpos se mueve, que la cuerda tiene una densidad de masa lineal λ y que sigue siendo flexible e inextensible.

1) Indique el diagrama de las fuerzas aplicadas a cada uno de los cuerpos que componen el sistema (2ptos)

Respuesta El diagrama de cuerpo libre para el sistema con cuerdas CON masa se ilustra en la figura 3

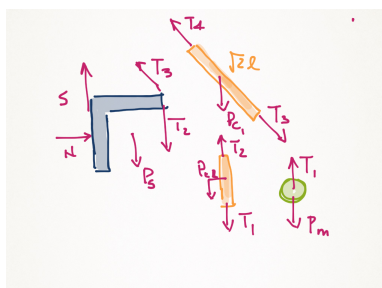

Figura 3:

2) Calcule la posición del centro del masa del sistema. (3ptos)

Respuesta
$$\vec{R}_{CM} = \frac{M\frac{l}{2}\hat{\imath} - M\frac{l}{2}\hat{\jmath} + ml\left(\hat{\imath} - \hat{\jmath}\right) + \mathcal{M}_{c1}l\left(\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\hat{\imath} + \frac{\sqrt{2}}{2}\hat{\jmath}\right) + \mathcal{M}_{c2}l\left(\hat{\imath} - \frac{\hat{\jmath}}{2}\right)}{2M + m + \mathcal{M}_{c1} + \mathcal{M}_{c2}}$$

2. **Sobre moscas y discos**: Un disco de masa M y radio R rota con velocidad ω alrededor de su centro tal y como muestra la figura 4.

   a) Suponga que, de repente, una mosca de masa m se posa sobre el disco a una distancia r de su centro.

   1) ¿cuál es el momento de inercia del sistema Disco-mosca posada respecto al eje alrededor del cual rota el disco? (2ptos)

Respuesta
$$I_{total} = I_{disco} + I_{mosca} = \frac{1}{2}MR^2 + mr^2$$

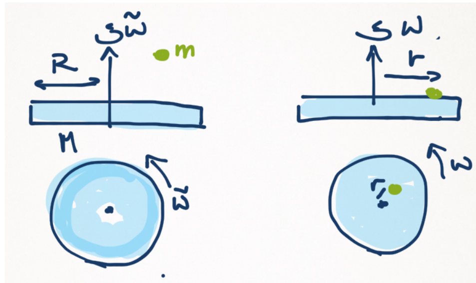

Figura 4: Disco de masa M y radio R con mosca de masa m

2) ¿Hubo variación en la velocidad angular del disco antes y después de que la mosca se posara? ¿por qué? ¿cuánto? (2ptos)

Respuesta Si, por que la cantidad de movimiento se tiene que conservar por cuanto no hay torques externos que la varíen

$$L_i = L_f \quad \Rightarrow I_{disco}\omega_i = I_{disco-mosca}\omega_{f1} \quad \Rightarrow \omega_{f1} = \frac{I_{disco}}{I_{disco-mosca}}\omega_i \equiv \frac{\frac{1}{2}MR^2}{\frac{1}{2}MR^2 + mr^2}\omega$$

b) Suponga que la mosca aburrida camina en dirección radial y se detiene a una distancia $r/2$ del centro del disco ¿Hubo variación en la velocidad angular del disco antes y después de que la mosca caminara? ¿por qué? ¿cuánto? (2ptos)

Respuesta Si, por que la cantidad de movimiento se tiene que conservar por cuanto no hay torques externos que la varíen

$$L_i = L_f \quad \Rightarrow I_{d-m}\omega_{f1} = I_{d-m2}\omega_{f2} \quad \Rightarrow \omega_{f2} = \frac{\frac{1}{2}MR^2 + mr^2}{\frac{1}{2}MR^2 + m\frac{r^2}{4}}\omega_{f1} \equiv \frac{\frac{1}{2}MR^2}{\frac{1}{2}MR^2 + m\frac{r^2}{4}}\omega$$

3. **Sobre carretes y masas**: Un carrete está construido por dos discos (de masa M_1 y radio R_1) y un cilindro (de masa M_1 y radio R_1), tal y como muestra la figura 5 en el cuadrante A. En uno de los extremos de la cuerda (flexible, inextensible y sin masa) cuelga una masa m y el otro extremo se encuentra enrollado al carrete de dos formas distintas, tal y como muestra la figura 5 en los cuadrantes B y C, respectivamente. En ambos casos el carrete rueda sin deslizar.

   a) ¿cuál es el momento de inercia del carrete respecto al punto de contacto con el suelo ? (2ptos)

Respuesta

$$I_{carr} = I_{Dp} + I_{Dp} + I_{Cp} = 2\left(\frac{1}{2}M_1R_1^2 + M_1R_1^2\right) + \left(\frac{1}{2}M_2R_2^2 + M_2R_1^2\right) = (3M_1 + M_2)\,R_1^2 + \frac{M_2R_2^2}{2}$$

   b) En ambos casos (ilustrados en los cuadrantes B y C) indique el diagrama de las fuerzas aplicadas a cada uno de los cuerpos que componen el sistema (3ptos)

Respuesta El diagrama de cuerpo libre para cada uno de los casos se ilustra en la figura 6

   c) En ambos casos escriba TODAS las ecuaciones de movimiento para cada uno de los cuerpos que componen el sistema (4ptos)

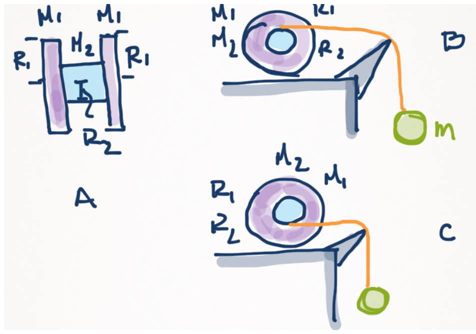

Figura 5: Disco de masa M y radio R con mosca de masa m

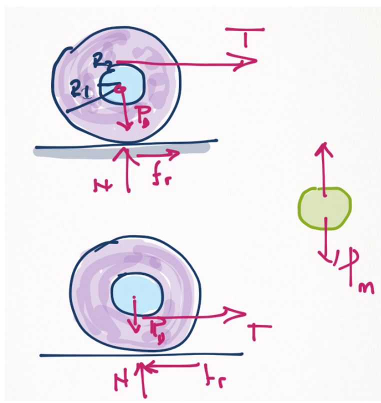

Figura 6:

Respuesta

- masa m (ambos casos)

$$T - mg = ma_m$$

- Carrete (Fuerzas)
  - Caso B

$$T + f_r = (2M_1 + M_2)a_{CM} \quad \text{y} \quad N - (2M_1 + M_2) = 0$$

  - Caso C

$$T - f_r = (2M_1 + M_2)a_{CM} \quad \text{y} \quad N - (2M_1 + M_2) = 0$$

- Carrete (torques respecto al punto de contacto)
  - Caso B

$$T\,(R_1 + R_2) = I_{carr}\alpha$$

  - Caso C

$$T\,(R_1 - R_2) = I_{carr}\alpha$$

- Vínculos o ligaduras debido a que la cuerda es inextensible
  - Caso B

$$a_m = (R_1 + R_2)\,\alpha = (R_1 + R_2)\,\frac{a_{CM}}{R_1}$$

- Caso C

$$a_m = (R_1 - R_2)\,\alpha = (R_1 - R_2)\,\frac{a_{CM}}{R_1}$$

d) En ambos casos encuentre las aceleraciones (módulo, dirección y sentido) de los cuerpos que componen el sistema. Esto es aceleración del centro de masa del carrete y aceleración de caída de la masa m(4ptos)

- Caso B

$$\left.\begin{array}{c} T - mg = ma_m \\ \\ T\,(R_1 + R_2) = I_{carr}\,\frac{a_{CM}}{R_1} \\ \\ a_m = (R_1 + R_2)\,\frac{a_{CM}}{R_1} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a_m = \frac{2(R_1+R_2)^2 mg}{6\,R_1{}^2 M_1 + 2\,R_1{}^2 M_2 + M_2\,R_2{}^2 - 2\,R_1{}^2 m - 4\,R_1\,R_2\,m - 2\,R_2{}^2 m} \\ \\ a_{CM} = 2\,\frac{R_1\,mg(R_1+R_2)}{6\,R_1{}^2 M_1 + 2\,R_1{}^2 M_2 + M_2\,R_2{}^2 - 2\,R_1{}^2 m - 4\,R_1\,R_2\,m - 2\,R_2{}^2 m} \end{array}\right.$$

- Caso C (de manera análoga al caso B)

$$a_m = (R_1 - R_2)\,\alpha = (R_1 - R_2)\,\frac{a_{CM}}{R_1}$$