Mecánica 1

Examen 1

Fecha **15 Noviembre**

1. **Sobre trayectorias y fuerzas**: Un cuerpo de masa m describe una trayectoria $\vec{r} = \frac{\mathcal{A}}{\theta}\hat{u}_r$. Donde θ es el ángulo que forma el radio-vector posición con el eje x en su representación cartesiana.

   a) ¿Cuál es la expresión para la fuerza que mueve al cuerpo a lo largo de esa trayectoria ? (3ptos)

Respuesta Si $\vec{r} = (\mathcal{A}/\theta)\,\hat{u}_r$ con $\mathcal{A} = cte$ y $\theta = \theta(t)$ entonces la velocidad será

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathcal{A}}{\theta^2}\dot{\theta}\,\hat{u}_r + \frac{\mathcal{A}}{\theta}\frac{\mathrm{d}\hat{u}_r}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathcal{A}}{\theta^2}\dot{\theta}\,\hat{u}_r + \frac{\mathcal{A}}{\theta}\dot{\theta}\hat{u}_\theta \tag{1}$$

y la aceleración

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{2\mathcal{A}}{\theta^3}\dot{\theta}^2 - \frac{\mathcal{A}}{\theta^2}\ddot{\theta}\right)\hat{u}_r + \left(-\frac{\mathcal{A}}{\theta^2}\dot{\theta}\right)\frac{\mathrm{d}\hat{u}_r}{\mathrm{d}t} + \left(-\frac{\mathcal{A}}{\theta^2}\dot{\theta}^2 + \frac{\mathcal{A}}{\theta}\ddot{\theta}\right)\hat{u}_\theta + \left(\frac{\mathcal{A}}{\theta}\dot{\theta}\right)\frac{\mathrm{d}\hat{u}_\theta}{\mathrm{d}t} \tag{2}$$

con lo cual la fuerza que mueve al cuerpo será

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{\mathcal{A}}{\theta}\left\{\left(\left(\frac{2}{\theta^2} - 1\right)\dot{\theta}^2 - \frac{\ddot{\theta}}{\theta}\right)\hat{u}_r + \left(-2\frac{\dot{\theta}^2}{\theta} + \ddot{\theta}\right)\hat{u}_\theta\right\} \tag{3}$$

   b) ¿Cuál es la expresión del vector velocidad angular? (4ptos)

Respuesta Por construcción tendremos que $\vec{\omega} = \dot{\theta}\hat{u}_z$, es decir perpendicular al plano de rotación y con un módulo igual a la variación del ángulo respecto al tiempo.
Es fácil comprobarlo con lo que ya sabemos

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\delta\,\vec{r}}{\delta t} + \vec{\omega}\times\vec{r} = -\frac{\mathcal{A}}{\theta^2}\dot{\theta}\,\hat{u}_r + \vec{\omega}\times\vec{r} \tag{4}$$

En un sistema de referencia cartesiano tendremos $\hat{u}_r = \cos(\theta)\hat{\imath} + \mathrm{sen}(\theta)\hat{\jmath}$, con lo cual

$$\vec{\omega}\times\vec{r} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 0 & 0 & \dot{\theta} \\ \frac{\mathcal{A}}{\theta}\cos(\theta) & \frac{\mathcal{A}}{\theta}\mathrm{sen}(\theta) & 0 \end{vmatrix} = \frac{\mathcal{A}}{\theta}\dot{\theta}\left(-\mathrm{sen}(\theta)\hat{\imath} + \cos(\theta)\hat{\jmath}\right) = \frac{\mathcal{A}}{\theta}\dot{\theta}\hat{u}_\theta \tag{5}$$

por lo tanto, la ecuación (4) coincide con (1)

2. **Sobre cuerdas con y sin masa**

   a) Sobre una mesa sin fricción descansa una masa M atada a una cuerda *fism* (por flexible inextensible y sin masa) de longitud L que está atada a un clavo y la masa gira con una velocidad angular ω. ¿cuál es la tensión que actúa sobre el clavo, centro del movimiento circular? (3ptos)

Respuesta La ecuación de Newton en la dirección $\hat{u}_r$ para la masa será

$$-T_{1c} = -m\omega^2 L \tag{6}$$

y la tensión que está aplicada sobre el clavo será $\vec{T}_c = m\omega^2 L\,\hat{u}_r$

b) Sobre esa misma mesa, con el mismo clavo atamos a la misma cuerda *fism* tres masas (m_1, m_2, m_3) en $L/3$, $2L/3$, L, respectivamente. El sistema gira, otra vez con una velocidad angular ω. Hacemos la misma pregunta ¿cuál es la tensión que actúa sobre el clavo, centro del movimiento circular? (4ptos)

Respuesta Las ecuaciones de Newton en la dirección $\hat{u}_r$ para las masas serán

$$-T_{32} = -m_3\omega^2 L\,; \quad -T_{21} + T_{23} = -m_2\omega^2 \frac{2L}{3} \quad \text{y} \quad -T_{1c} + T_{12} = -m_1\omega^2 \frac{L}{3}\,, \tag{7}$$

Como la cuerda no tiene masa tenemos $T_{32} = T_{23} = T_3$, $T_{21} = T_{12} = T_2$ y $T_{1c} = T_{c1} = T_c$ con lo cual

$$-T_3 = -m_3\omega^2 L\,; \quad -T_2 + T_3 = -m_2\omega^2 \frac{2L}{3} \quad \text{y} \quad -T_c + T_2 = -m_1\omega^2 \frac{L}{3}\,, \tag{8}$$

Es decir

$$T_3 = m_3\omega^2 L\,; \tag{9}$$

$$T_2 = m_2\omega^2 \frac{2L}{3} + m_3\omega^2 L = \omega^2 L\left(\frac{2m_2}{3} + m_3\right) \tag{10}$$

$$T_c = m_1\omega^2 \frac{L}{3} + T_2 = m_1\omega^2 \frac{L}{3} + \omega^2 L\left(\frac{2m_2}{3} + m_3\right) = \omega^2 L\left(\frac{m_1}{3} + \frac{2m_2}{3} + m_3\right) \tag{11}$$

La tensión que experimenta el clavo será

$$\vec{T}_c = \omega^2 L\left(\frac{1}{3}m_1 + \frac{2}{3}m_2 + m_3\right)\hat{u}_r \tag{12}$$

Nótese que, en general, si son N masas distintas, para una masa genérica tendremos

$$-T_k + T_{k+1} = -m_k\omega^2 \frac{k}{N} L \tag{13}$$

y la tensión en el calvo

$$\vec{T}_c = \omega^2\left(\frac{L}{N}m_1 + \frac{2L}{N}m_2 + \cdots \frac{kL}{N}m_k + \cdots + Lm_N\right)\hat{u}_r = \omega^2\left(\sum_{k=1}^{N}\frac{kL}{N}m_k\right)\hat{u}_r \tag{14}$$

y si son iguales tendremos

$$\vec{T}_c = m\frac{\omega^2 L}{N}\left(1 + 2 + \cdots + k + \cdots + (N-1) + N\right)\hat{u}_r = m\omega^2 L\left(\frac{N+1}{2}\right)\hat{u}_r \tag{15}$$

c) Ahora suponga que tenemos es una cuerda de densidad lineal de masa $\lambda = M/L$ que gira sobre la mesa con la velocidad angular ω. ¿cuál es la tensión que actúa sobre el clavo, centro del movimiento circular? (4ptos)

Respuesta Un diferencial de masa en una posición arbitraria en la cuerda tendrá una ecuación de Newton

$$-T_i + T_{i+1} = -\Delta m_i r\omega^2 \quad \Rightarrow -T_i + T_{i+1} = -\lambda\Delta r_i\, r_i\omega^2 \tag{16}$$

y la tensión del clavo será muy similar a la ecuación (14), por lo tanto

$$\vec{T}_c = \omega^2\left(\sum_{k=1}^{N} r_k\Delta m_k\right)\hat{u}_r = \omega^2\lambda\left(\sum_{k=1}^{N} r_k\Delta r_k\right)\hat{u}_r \tag{17}$$

y si pasamos al contínuo $\Delta r_k \to 0$

$$\vec{T}_c = \omega^2 \lambda \lim_{\Delta r_k \to 0} \left(\sum_{k=1}^{N} r_k \Delta r_k \right) \hat{u}_r \to \vec{T}_c = \left(\omega^2 \lambda \int_0^L \mathrm{d}r\, r \right) \hat{u}_r = \lambda \omega^2 \frac{L^2}{2} \hat{u}_r \tag{18}$$

Respuesta express El centro de masa de la cuerda setá en la mitad de la cuerda y allí podremos suponer que se concentra toda su masa, con lo cual la ecuación de Newton para ese masa "imaginaria" será

$$-T_{1c} = -M\omega^2 \frac{L}{2} \tag{19}$$

y la tensión del clavo será $\vec{T}_c = \lambda \omega^2 \frac{L^2}{2} \hat{u}_r$

3. **Sobre resorte y oscilaciones:** Un ascensor de $m = 1800\,kg$ tiene una falla y cae desde el segundo piso (a $d = 3,7\,mts$ del foso). El freno de emergencia se activa y aplica una fuerza de $f_r = 4{,}4\,kN$. En el foso hay un resorte de para amortiguar la caída con una constante elástica $K = 0,15\;MN/m$

   a) Calcule la velocidad con la cual llega el ascensor justo antes de empezar a comprimir al resorte de amortiguación (3ptos).

Respuesta La ecuación de Newton para el ascensor implica

$$p - f_r = ma \quad \Rightarrow a = g - \frac{f_r}{m} \quad \Rightarrow v_f = \sqrt{2\left(g - \frac{f_r}{m}\right) d} \tag{20}$$

   b) Calcule la máxima compresión del resorte (3ptos)

Respuesta La ecuación de Newton para un punto cualquiera de compresión con el ascensor cayendo será

$$p - f_r - Ky = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \quad \Rightarrow (p - f_r - Ky)\, v = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} v \quad \Rightarrow (p - f_r - Ky)\,\mathrm{d}y = mv\,\mathrm{d}v \tag{21}$$

con lo cual

$$\int_0^{y_{max}} (p - f_r - Ky)\,\mathrm{d}y = m \int_{v_f}^{0} v\,\mathrm{d}v \quad \Rightarrow (p - f_r)\, y_{max} - K\frac{y_{max}^2}{2} = -m\frac{v_f^2}{2} \tag{22}$$

finalmente

$$y_{max} = \frac{p - f_r \pm \sqrt{p^2 - 2\,pf_r + f_r^2 + Km\,v_f^2}}{K} \tag{23}$$

   c) El ascensor rebota y vuelve a caer. Calcule la velocidad justo antes de volver a comprimir, por segunda vez al resorte. (4ptos)

Respuesta La velocidad de ascenso cuando abandona el resorte sale de una ecuación similar a (22)

$$p + f_r - Ky = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \quad \Rightarrow (p + f_r)\, y_{max} - K\frac{y_{max}^2}{2} = -m\frac{v_f^2}{2} \tag{24}$$

con lo cual

$$v_{f2} = \sqrt{\frac{K}{m} y_{max}^2 - \frac{2y_{max}}{m}(p + f_r)} \tag{25}$$

Entonces alcanzará una altura de

$$d_2 = \frac{v_{f2}^2}{2\left(p + f_r\right)} = \frac{\frac{K}{m} y_{max}^2 - \frac{2 y_{max}}{m}\left(p + f_r\right)}{2\left(p + f_r\right)} \tag{26}$$

y llegará de nuevo al resorte con

$$v_{f3} = \sqrt{2\left(g - \frac{f_r}{m}\right) d_2} \tag{27}$$