Matemática Avanzadas para la Ingeniería
Tarea 1 (Entrega 2Sept)
Espacios Vectoriales

1. Las matrices σ_x, σ_y, σ_z se conocen con el nombre de matrices de Pauli :

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \qquad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \qquad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \qquad \mathbb{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   a) Muestre si las matrices de Pauli σ_x, σ_y, σ_z, conjuntamente con la matriz identidad, $\mathbf{1}$ forman un grupo respecto a la siguiente operación

$$\sigma_j \odot \sigma_k \equiv \sigma_j \sigma_k = i\epsilon_{jkm}\sigma^m + \delta_{jk}\mathbf{1} \qquad \text{con } j,k,m = x,y,z$$

   ϵ_{jkm} el símbolo de Levi Civita y $i = \sqrt{-1}$

   b) Muestre si las matrices de Pauli σ_x, σ_y, σ_z, conjuntamente con la matriz identidad, $\mathbf{1}$ son linealmente independientes.

   c) ¿ Las matrices de Pauli forman base para un espacio vectorial de matrices complejas $2x2$? ¿ por qué ? Si forman base exprese la matriz

$$\begin{pmatrix} 3 & i \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

   en términos de esa base

2. Una de las posibles bases de $\mathcal{P}^n$ será el conjunto $\left\{1, x, x^2, x^3, \cdots, x^n\right\}$ con el producto interno viene definido por $\langle \mathbf{f} |\, \mathbf{g}\rangle = \int_0^1 \mathrm{d}x\ f(x)\ g(x)$.

   a) Encuentre la base ortonormal que expande el subespacio $\mathcal{S}^3$ de los polinomios, $\mathcal{P}^n$, de grado $g \leq 3$.

   b) Encuentre las componentes del polinomio $g(x) = 5 + 3x^2 - x^3 + x^5$ proyectado sobre esa base ortonormal que expande a $\mathcal{S}^3$

   c) Encuentre la mínima distancia desde el subespacio $\mathcal{S}^3$ al polinomio $g(x)$

3. Sea $f(x) = e^{2x}$ una función perteneciente al espacio lineal de funciones continua y continuamente diferenciables, $\mathcal{C}^{\infty}_{[-1,1]}$, en el cual el producto interno viene definido por $\langle \mathbf{q}|\mathbf{p}\rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\ \mathrm{d}x$. Encuentre el polinomio lineal más cercano a la función $f(x)$.