

Figura 1: Resorte de constante k y coeficiente de amortiguamiento η

Matemática Avanzadas para la Ingeniería

Tarea 6 (Entrega 30abril)

Ecuaciones diferenciales de orden superior y Soluciones Numéricas

1. Una masa de $0,1\text{Kg}$ se encuentra atada a un resorte con una constante elástica $k = 0,4\text{N m}^{-1} \text{s}^{-2}$, tal y como muestra la fig ???. El sistema está sometido a un amortiguamiento representado por un coeficiente $\eta_1 = 0,4\text{Kg s}^{-1}$. El sistema puede presentar una fuerza externa $\vec{F}_{ext}(t)$ que fuerza su movimiento. Es claro que la ecuación de movimiento para este sistema viene representada por

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + \eta \frac{dx}{dt} + k x = \vec{F}_{ext}(t) \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} + 2\mu \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{\vec{F}_{ext}(t)}{m} \quad (1)$$

- a) Considere el caso $\vec{F}_{ext}(t) = 0$, vale decir, oscilaciones libres amortiguadas. Encuentre la solución para este caso y gráfiquela de $t_0 = 0\text{s}$ a $t_0 = 10$, considerando que el cuerpo parte, desde una posición inicial $x(0) = 0$, con una velocidad inicial de 4m/s .
- b) Suponga las mismas condiciones anteriores, pero ahora varíe el amortiguamiento con $\eta_2 = 0,6\text{Kg s}^{-1}$ y $\eta_3 = 0,15\text{Kg s}^{-1}$.
- 1) Grafique la evolución de la posición $x(t)$ vs t del móvil para los tres casos en una misma gráfica.
 - 2) Grafique la evolución de la posición $x(t)$ vs $\frac{dx}{dt}$ del móvil para los tres casos en una misma gráfica de $t_0 = 0\text{s}$ a $t_0 = 10$. La trayectoria en este tipo de gráfica se denomina evolución del sistema en el espacio de fase.
- c) Considere que el caso de un oscilador libre sin amortiguación, sometido a una fuerza inelástica $\vec{F}_{inel} = -kx - \epsilon x^3$. Nota¹.
- 1) Grafique la evolución del sistema en el espacio de fase para los casos $\epsilon = 0,1\text{N m}^{-3} \text{s}^{-2}$ y $\epsilon = 0$ de $t_0 = 0\text{s}$ a $t_0 = 10$.
 - 2) Para ambos casos estime la amplitud y el período del movimiento
 - 3) Cambie los valores de ϵ a $0,2\text{N m}^{-3} \text{s}^{-2}$ y $0,3\text{N m}^{-3} \text{s}^{-2}$ y grafique sus valores estimados para la amplitud y el período respecto a los valores de ϵ
 - 4) ¿Cómo cambian los estimados anteriores si considera valores de ϵ negativos ?
 - 5) Considere ahora, para este modelo de fuerzas inelásticas, considere una fuerza externa del tipo

$$\vec{F}_{ext}(t) = \begin{cases} 3t & 0 \leq t < \pi \\ 3(2\pi - t) & \pi \leq t < 2\pi \\ 0 & t \geq 2\pi \end{cases}$$

Grafique la evolución del sistema en el espacio de fase para estos casos, de $t_0 = 0\text{s}$ a $t_0 = 10$.

¹Para este caso la ecuación de movimiento será $m \frac{d^2x}{dt^2} + k x + \epsilon x^3 = 0$