Matemática Avanzadas para la Ingeniería
Tarea 4 (Entrega 9abril)
Fourier y Ecuaciones diferenciales ordinarias (empezandito)

1. Considere la siguiente función
$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi < x \leq 0 \\ x & -0 \leq x < \pi \end{cases}$$
   - Determine la expresión de su expansión en series de Fourier
   - Calcule el valor de $\frac{\pi^2}{8}$ con 12 cifras significativas
   - Integre la serie y confirme su valor
2. Considere la función $y = \sqrt{1 - 3x^2}$
   a) Encuentre la expansión en series de Legendre hasta $n = 5$
   b) Encuentre la expansión en series de Fourier hasta $n = 5$ ¿ cuál de las expansiones resulta más precisa?
   c) La relación entre esas dos expansiones puede escribirse como
   $$\mathcal{F}^m = \langle u^m | \, P_n \rangle \, F^n$$
   Identifique las componentes de la expansión de Fourier, $\mathcal{F}^m$, las correspondientes en polinomios de Legendre, F^n, y, finalmente la matriz de transformación entre las componentes identificadas.
3. Utilizando el método iterativo descrito en el punto 8.1 de las notas, encuentre la solución de la ecuación (8.21)
4. A veces la apariencia de las ecuaciones diferenciales engañan. Considere la siguiente ecuación diferencial
$$\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x} - P(x)y(x) = Q(x)y(x)^3$$
luce terriblemente no-lineal. Muestre que con el siguiente cambio de función incógnita $v(x) = y^{-2}$ se convierte en una ecuación lineal. En general las ecuaciones diferenciales de la forma
$$\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x} - P(x)y(x) = Q(x)y(x)^n$$
se conocen como ecuaciones diferenciales de Bernoulli y se convierten en ecuaciones lineales, fácilmente solubles mediante un cambio en la función incógnita del tipo $v(x) = y^{1-n}$ (muéstrelo también)