Matemática Avanzadas para la Ingeniería
Tarea 3 (Entrega 25Marzo)
Autovectores y Autovalores

Considere los siguientes operadores lineales de Pauli $\Re^2 \longmapsto \Re^2$

$$\sigma_z \left|+\right\rangle = \left|+\right\rangle , \qquad \sigma_z \left|-\right\rangle = -\left|-\right\rangle$$
$$\sigma_x \left|+\right\rangle_x = \left|+\right\rangle_x , \qquad \sigma_x \left|-\right\rangle_x = -\left|-\right\rangle_x$$
$$\sigma_y \left|+\right\rangle_y = \left|+\right\rangle_y , \qquad \sigma_y \left|-\right\rangle_y = -\left|-\right\rangle_y$$

Por lo tanto tendremos tres bases $\Re^2$

- $\{\left|+\right\rangle, \left|-\right\rangle\}$ base de autovectores de σ_z

$$\left|+\right\rangle \leftrightarrows \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \left|-\right\rangle \leftrightarrows \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- $\{\left|+\right\rangle_x, \left|-\right\rangle_x\}$ base de autovectores de σ_x

$$\left|+\right\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\left|+\right\rangle + \left|-\right\rangle\right], \qquad \left|-\right\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\left|+\right\rangle - \left|-\right\rangle\right]$$

- $\left\{\left|+\right\rangle_y, \left|-\right\rangle_y\right\}$ base de autovectores de σ_y

$$\left|+\right\rangle_y = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\left|+\right\rangle + i\left|-\right\rangle\right], \qquad \left|-\right\rangle_y = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\left|+\right\rangle - i\left|-\right\rangle\right]$$

En general dadas dos bases ortonormales $\{\left|\mathbf{t}_j\right\rangle\}$ y $\{\left|\mathbf{u}_m\right\rangle\}$ se pueden relacionar las representaciones matriciales de un mismo operador, correspondientes a esas dos bases, a través de matrices de transformación de la siguente forma

$$\left\langle \mathbf{t}^i \right| \mathbf{A} \left|\mathbf{t}_j\right\rangle = \left\langle \mathbf{t}^i \right| \left(\left|\mathbf{u_k}\right\rangle \left\langle \mathbf{u^k}\right|\right) \mathbf{A} \left(\left|\mathbf{u_m}\right\rangle \left\langle \mathbf{u^m}\right|\right) \left|\mathbf{t}_j\right\rangle = \underbrace{\left\langle \mathbf{t}^i \middle| \mathbf{u}_k \right\rangle}_{S^i_k} \left\langle \mathbf{u}^k \right| \mathbf{A} \left|\mathbf{u}_m\right\rangle \underbrace{\left\langle \mathbf{u}^m \middle| \mathbf{t}_j \right\rangle}_{S^{m\dagger}_j}$$

por lo tanto, en término de las representaciones matriciales de los operadores tendremos

$$\tilde{A}^i_j = S^i_k \; A^k_m \; S^{m\dagger}_j$$

donde $\tilde{A}^i_j$ es la representación del operador $\mathbf{A}$ respecto a la base $\{\left|\mathbf{t}_j\right\rangle\}$ y A^k_m su representación en la base $\{\left|\mathbf{u}_m\right\rangle\}$

1. Encuentre las expresiones matriciales para el operador $[\sigma_x, \sigma_z]$ en términos de la base $\{\left|+\right\rangle_x, \left|-\right\rangle_x\}$
2. Encuentre los autovalores y autovectores para el operador $[\sigma_x, \sigma_z]$
3. Encuentre las matrices de transformación que permiten asociar la representación matricial para $[\sigma_x, \sigma_z]$ en la base $\{\left|+\right\rangle_x, \left|-\right\rangle_x\}$ con su representación en la base de sus autorvectores
4. Repita los puntos anteriores para el operador $\mathcal{F}(\sigma_x, \sigma_y) = \cos(\sigma_x)\exp(\sigma_y)$. Justifique el grado de aproximación de su respuesta.