Matemática Avanzadas para la Ingeniería
Tarea 1 (Entrega 11Marzo)
Espacios Vectoriales (Operadores Lineales)

1. Las matrices $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ se conocen con el nombre de matrices de Pauli :

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \qquad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \qquad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \qquad \mathbb{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   a) Muestre si las matrices de Pauli $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$, conjuntamente con la matriz identidad, **1** son linealmente independientes.

   b) ¿ Las matrices de Pauli forman base para un espacio vectorial de matrices complejas $2x2$? ¿ por qué ? Si forman base exprese la matriz

$$\begin{pmatrix} 3 & i \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

   en términos de esa base

   c) Convénzase que las matrices de Pauli $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$, conjuntamente con la matriz identidad, **1** cumplen con la siguiente relación

$$\sigma_j \odot \sigma_k \equiv \sigma_j \sigma_k = i\epsilon_{jkm}\sigma^m + \delta_{jk}\mathbf{1} \qquad \text{con } j,k,m = x,y,z$$

   ϵ_{jkm} el símbolo de Levi Civita y $i = \sqrt{-1}$. Entonces, una vez convencido, úsela para derivar la expresión más general para el conmutador $[\sigma_j, \sigma_k]$

   d) Suponga ahora que σ_z actúa

$$\sigma_z \left|+\right\rangle = \left|+\right\rangle, \qquad \sigma_z \left|-\right\rangle = -\left|-\right\rangle$$

   con

$$\left|+\right\rangle \leftrightarrows \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \left|-\right\rangle \leftrightarrows \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   Suponga ahora otra base $\left\{ \left|+\right\rangle_x, \left|+\right\rangle_y \right\}$ tal que se cumple que

$$\begin{array}{ll} \sigma_x \left|+\right\rangle_x = \lambda_{+x} \left|+\right\rangle_x, & \sigma_x \left|-\right\rangle_x = \lambda_{-x} \left|-\right\rangle_x \\ \sigma_y \left|+\right\rangle_y = \lambda_{+y} \left|+\right\rangle_y, & \sigma_y \left|-\right\rangle_y = \lambda_{-y} \left|-\right\rangle_y \end{array}$$

   encuentre los elementos de matriz para σ_x y σ_y en esta nueva base

   e) Encuentre la expresión para la función $\mathcal{F}(\sigma_x, \sigma_y) = \cos(\sigma_x)\exp(\sigma_y)$. Justifique el grado de aproximación de su respuesta.

   f) Muestre que cualquier representación matricial de un operador genérico $\mathbb{M}$ puede ser expresado como combinación lineal de las matrices de Pauli.

2. Dado un operador Hermítico $\mathbb{A}$ y uno unitario $\mathbb{U}$, pruebe las siguientes afirmaciones

   a) $\tilde{\mathbb{A}} = \mathbb{U}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{U}$ es también un operador Hermítico

   b) Si $\mathbb{A}$ es antihermítico entonces $\tilde{\mathbb{A}} = i\mathbb{A}$

   c) La composición de dos operadores, $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$ Hermíticos será Hermítica *si y sólo si* $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$ conmuntan.

d) Si $\mathbb{S}$ es un operador real y antisimétrico, pruebe que $A = (\mathbb{I} - \mathbb{S})(\mathbb{I} - \mathbb{S})^{-1}$ es un operador ortogonal[1]

e) Si

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Encuentre la expresión para $\mathbb{S}$

[1]Esto es $\mathbb{A}^T = \mathbb{A}^{-1}$ con $\mathbb{A}^T$ el traspuesto de $\mathbb{A}$