Capítulo 2

Espacios Vectoriales Lineales

2.1. Grupos, Campos y Espacios Vectoriales

2.1.1. Grupos

Considere el siguiente conjunto $\mathbf{G} = \{g_1, g_2, g_3, \cdots, g_n, \cdots\}$ y la operación $\Box$ entonces estos elementos forman un grupo abeliano[1] respecto a la operación $\Box$ si $\forall g_i \in \mathbf{G}$

1. Cerrada respecto a la operación $\Box$: $\{g_i, \in \mathbf{G}, g_j \in \mathbf{G}\} \Rightarrow \exists g_k = g_i \Box g_j \in \mathbf{G}$
2. Asociativa respecto a la operación $\Box$: $g_k \Box (g_i \Box g_j) = (g_k \Box g_i) \Box g_j$
3. Existencia de un elemento neutro: $\exists \mathbf{1} \in \mathbf{G} \ni \quad g_i \Box \mathbf{1} = g_i \ = \mathbf{1} \Box g_i$
4. Existencia de un elemento inverso: $g_i, \in \mathbf{G} \Rightarrow \exists g_i^{-1} \in \mathbf{G} \ni \quad g_i \Box g_i^{-1} = g_i^{-1} \Box g_i = \mathbf{1}$
5. Conmutativa respecto a la operación $\Box$: $g_i \Box g_j \equiv g_j \Box g_i$

Ejemplos de grupos: Serán grupo:

- Los enteros $\mathbb{Z} = \{\cdots - 3 - 2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots\}$ respecto a la suma pero no respecto a la multiplicación (excluyendo el cero) por cuanto no existe inverso.
- Los racionales respecto a la suma y a la multiplicación
- Los números complejos $z = e^{i\theta}$ respecto a la multiplicación
- Las rotaciones en 2 Dimensiones (2D), sin embargo las rotaciones en 3D forman grupo no-abeliano.
- Dado un grupo de tres elementos, $\mathbf{G} = \{\mathbf{1}, a, b\}$ y la operación $\Box$, por construcción si queremos que la operación de dos de los elementos provea un tercero distinto, entonces la ÚNICA "tabla de multiplicación" posible será:

$\Box$	$\mathbf{1}$	a	b
$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$	a	b
a	a	b	$\mathbf{1}$
b	b	$\mathbf{1}$	a

Si sólo se cumplen las cuatro primeras, entonces se dice que simplemente forman grupo respecto a la operación $\Box$. Se pueden definir subgrupos si un subconjuntos de los elementos de un grupo $g_i \in \mathbf{G}$ también forman un grupo. El número de los elementos de un grupo puede ser finito o infinito. En el primer caso de denominan *grupos finitos* y el número de elementos que contenga se conoce como el orden del grupo, y se denotará como g. de los grupos. Un grupo finito que se construye a partir de una operación con un único miembro se denomina *grupo cíclico* y el caso más elemental es $\mathbf{G} = \left\{I, X, X^2, X^3, \cdots, X^{g-1}\right\}$. Obviamente hemos definido $X^2 = X \Box X$ y $X^3 = X^2 \Box X = X \Box X \Box X$ y así consecutivamente hasta ejecutarse $g - 1$ veces y, entonces se retoma el elemento identidad. Esto es: $X^{g-1} \Box X = X^g = I$.

Considere los siguientes conjuntos y operaciones

[1] NIELS HENRIK ABEL, (1802-1829 Noruega) Pionero en el desarrollo de diferentes ramas de la matemática moderna, Abel mostró desde su infancia un notable talento para el estudio de las ciencias exactas. Tal predisposición se vería muy pronto confirmada por sus precoces investigaciones sobre cuestiones de álgebra y cálculo integral, en particular sobre la teoría de las integrales de funciones algebraicas (a las que se denominaría abelianas en honor de su formulador) que no habría de publicarse hasta 1841, doce años después de su fallecimiento. En 2002 el gobierno noruego lanzó el premio Abel que llenará el vacío que existe en la premiación Nobel del gobierno sueco, en el cual no existe premiación para la comunidad matemática.
Más detalles `http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Mathematicians`

- $\mathbf{G}_{\text{mod8}} = \{1, 3, 5, 7\}$ y la operación multiplicación módulo 8. Construimos entonces la tabla de multiplicación

×mod8	1	3	5	7
1	1	3	5	7
3	3	1	7	5
5	5	7	1	3
7	7	5	3	1

- $\mathbf{G}_{\text{mod5}} = \{1, 2, 3, 4\}$ y la operación multiplicación módulo 5. Construimos entonces la tabla de multiplicación

×mod5	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	1	3
3	3	1	4	2
4	4	3	2	1

$\Leftrightarrow$

×mod5	1	2	4	3
1	1	2	4	3
2	2	4	3	1
4	4	3	1	2
3	3	1	2	4

- $\mathbf{G}_{\text{mod24}} = \{1, 5, 7, 11\}$ y la operación multiplicación módulo 24. Construimos entonces la tabla de multiplicación

×mod24	1	5	7	11
1	1	5	7	11
5	5	1	11	7
7	7	11	1	5
11	11	7	5	1

- $\mathbf{G}_{\times} = \{1, i, -1, -i\}$ y la operación multiplicación. Construimos entonces la tabla de multiplicación

×	1	i	-1	-i
1	1	i	-1	-i
i	i	-1	-i	1
-1	-1	-i	1	i
-i	-i	1	i	-1

Diremos que los grupos $\mathbf{G}_{\text{mod8}}$ y $\mathbf{G}_{\text{mod24}}$ son isomorfos porque tienen tablas equivalentes de multiplicación. Esto es, dado un grupo genérico $\mathbf{G} = \{1, A, B, C\}$ su tabla de multiplicación será:

	1	A	B	C
1	1	A	B	C
A	A	1	C	B
B	B	C	1	A
C	C	B	A	1

Note que $\mathrm{A}^{-1}=\mathrm{A}$ y que siempre la operación de dos elementos da uno distinto a los operados.

De igual forma los grupos $\mathbf{G}_{\times}$ y $\mathbf{G}_{\mathrm{mod}5}$ son isomorfos con una tabla de multiplicación

	1	A	B	C
1	1	A	B	C
A	A	B	C	1
B	B	C	1	A
C	C	1	A	B

2.1.2. Campo

Definiremos como un campo como el conjunto $\mathbf{F}=\{f_1, f_2, f_3, \cdots, f_n, \cdots\}$ sobre el cual están definidas dos operaciones suma, $+$, y multiplicación, $\cdot$, y que satisfacen las siguientes propiedades

1. Forman un grupo abeliano respecto a la suma, $+$,con el elemento neutro representado por el cero, 0.
2. Forman un grupo abeliano respecto a la multiplicación, $\cdot$. Se excluye el cero, 0 y se denota el elemento neutro de la multiplicación como **1**.
3. Es distributiva respecto a la suma, $+$: Dados f_i, f_j y f_k se tiene que
   $f_i \cdot (f_j + f_k) = f_i \cdot f_j + f_i \cdot f_k$

Ejemplos típicos de campos lo constituyen los racionales $\mathbb{Q}$, los números reales $\mathbb{R}$ y los números complejos $\mathbf{C}$. Normalmente se refiere estos campos como *Campos Escalares*

2.1.3. Espacios Vectoriales Lineales

Sea el conjunto de objetos $\mathbf{V}=\{|\mathbf{v}_1\rangle, |\mathbf{v}_2\rangle, |\mathbf{v}_3\rangle \cdots |\mathbf{v}_i\rangle \cdots\}$ se denominará $\mathbf{V}$ un espacio vectorial lineal y sus elementos $|\mathbf{v}_i\rangle$ vectores, si existe definida una operación suma, $\boxplus$, respecto a la cual los elementos $|\mathbf{v}_i\rangle \in \mathbf{V}$ de forman un grupo abeliano y una operación multiplicación por un número escalar de un campo, $\mathbf{K}=\{\alpha,\ \beta,\ \gamma \cdots\}$ tal que:

1. La operación suma $\boxplus$ es cerrada en $\mathbf{V}: \forall\ |\mathbf{v}_i\rangle, |\mathbf{v}_j\rangle \in \mathbf{V} \Rightarrow |\mathbf{v}_k\rangle = |\mathbf{v}_i\rangle \boxplus |\mathbf{v}_j\rangle \in \mathbf{V}$
2. La operación suma $\boxplus$ es conmutativa y asociativa
   a) $\forall\ |\mathbf{v}_i\rangle, |\mathbf{v}_j\rangle \in \mathbf{V} \Rightarrow |\mathbf{v}_i\rangle \boxplus |\mathbf{v}_j\rangle = |\mathbf{v}_j\rangle \boxplus |\mathbf{v}_i\rangle$
   b) $\forall\ |\mathbf{v}_i\rangle, |\mathbf{v}_j\rangle, |\mathbf{v}_k\rangle \in \mathbf{V} \Rightarrow (|\mathbf{v}_i\rangle \boxplus |\mathbf{v}_j\rangle) \boxplus |\mathbf{v}_k\rangle = |\mathbf{v}_j\rangle \boxplus (|\mathbf{v}_i\rangle \boxplus |\mathbf{v}_k\rangle)$
3. Existe un único elemento neutro: $\exists!\ |\mathbf{0}\rangle \quad \ni \quad |\mathbf{0}\rangle \boxplus |\mathbf{v}_j\rangle = |\mathbf{v}_j\rangle \boxplus |\mathbf{0}\rangle = |\mathbf{v}_j\rangle \quad \forall\ |\mathbf{v}_j\rangle \in \mathbf{V}$
4. Existe un elemento simétrico para cada elemento de $\mathbf{V}$:
   $\forall\ |\mathbf{v}_j\rangle \in \mathbf{V} \quad \exists\ |-\mathbf{v_j}\rangle \quad \ni \quad |\mathbf{v}_j\rangle \boxplus |-\mathbf{v}_j\rangle = |\mathbf{0}\rangle$
5. $\alpha(\beta|\mathbf{v}_i\rangle) = (\alpha\beta)|\mathbf{v}_i\rangle$
6. $(\alpha+\beta)|\mathbf{v}_i\rangle = \alpha|\mathbf{v}_i\rangle + \beta|\mathbf{v}_i\rangle$
7. $\alpha(|\mathbf{v}_i\rangle \boxplus |\mathbf{v}_j\rangle) = \alpha|\mathbf{v}_i\rangle \boxplus \alpha|\mathbf{v}_j\rangle$
8. $\mathbf{1}|\mathbf{v}_i\rangle = |\mathbf{v}_i\rangle$

Es inmediato notar que podemos definir subespacios vectoriales dentro de los espacios vectoriales. Ellos serán aquellos conjuntos de vectores que cumplan con los requisitos anteriores pero además sean cerrado dentro de los esos mismos conjuntos de vectores.

Ejemplos

Serán ejemplos de espacios vectoriales

1. Los números reales y complejos con el campo de reales o complejos y definidas las operaciones ordinarias de suma y multiplicación. $\mathbf{V} \equiv \mathbb{R}$; $\boxplus \Rightarrow +$; $|\mathbf{v}\rangle \equiv x$; $\mathbf{K} \equiv \mathbb{R}$.
   $\mathbf{V} \equiv \mathbf{C}$; $\boxplus \equiv +$; $|\mathbf{v}_i\rangle \equiv x + iy$; $\mathbf{K} \equiv \mathbb{R}$.
   Si el campo $\mathbf{K}$ es el conjunto de los números reales se dirá que es *un espacio vectorial real de números reales* si $\mathbf{V} \equiv \mathbb{R}$ y si $\mathbf{V} \equiv \mathbb{C}$ se dirá *un espacio vectorial real de números complejos*. Por su parte si $\mathbf{K} \equiv \mathbb{C}$ diremos que es un espacio vectorial complejo de números reales (si $\mathbf{V} \equiv \mathbb{R}$) o complejos ($\mathbf{V} \equiv \mathbb{C}$). Siempre se asociará el campo de escalares al espacio vectorial. Se dirá que es un espacio vectorial sobre el campo de los escales. Si el campo es real (complejo) se dirá que el espacio vectorial es real (complejo).

2. El espacio $\mathbf{V} \equiv \mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$, vale decir el producto cartesiano de $\mathbb{R}$, cuyos elementos son $n-$uplas de números, con la operación suma ordinaria de vectores en n-dimensionales y la multiplicación por escalares.

$$\begin{aligned} |\mathbf{x}\rangle &= (x_1, x_2, x_3, \cdots x_n) \quad \wedge \quad |\mathbf{y}\rangle = (y_1, y_2, y_3, \cdots, y_n) \\ |\mathbf{x}\rangle \boxplus |\mathbf{y}\rangle &\equiv (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, \cdots x_n + y_n) \\ \alpha\,|\mathbf{x}\rangle &= (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3, \cdots \alpha x_n) \end{aligned}$$

   Este espacio vectorial es de dimensión finita. Igualmente, será espacio vectorial $\mathbb{C}^n = \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \cdots \times \mathbb{C}$ para el cual los elementos $x_i \in \mathbf{C}$. Si para este caso el campo sobre el cual se define el espacio vectorial $\mathbb{C}^n$ es real, tendremos un espacio vectorial real de números complejos. Es obvio que el caso $\mathbf{V} \equiv \mathbb{R}$ para el cual $|\mathbf{x}\rangle_1 = (x_1, 0, 0, \cdots, 0)$ y $|\mathbf{y}\rangle_1 = (y_1, 0, 0, \cdots, 0)$ o cualquier espacio de vectores formados por las componentes, i.e. $|\mathbf{x}\rangle_i = (0, 0, 0, \cdots, x_i, \cdots 0)$ y $|\mathbf{y}\rangle_i = (0, 0, 0, \cdots, y_i, \cdots 0)$ formarán subespacios vectoriales dentro de $\mathbb{R}^n$

3. El espacio $\mathbf{E}^\infty$ constituido por vectores $|\mathbf{x}\rangle = (x_1, x_2, x_3, \cdots x_n, \cdots)$ contables pero con infinitas componentes.

$$\begin{aligned} |\mathbf{x}\rangle &= (x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots) \quad \wedge \quad |\mathbf{y}\rangle = (y_1, y_2, y_3, \cdots, y_n, \cdots) \\ |\mathbf{x}\rangle \boxplus |\mathbf{y}\rangle &\equiv (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, \cdots, x_n + y_n, \cdots) \\ \alpha\,|\mathbf{x}\rangle &= (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3, \cdots, \alpha x_n, \cdots) \end{aligned}$$

   con la restricción que

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} x_i = L \qquad \text{con } L \text{ finito}$$

4. Para el conjunto de la matrices $n \times n$ reales o complejas con el campo $\mathbf{K}$ real o complejo.

$$\begin{aligned} |\mathbf{x}\rangle &= M_{ab} \quad \wedge \quad |\mathbf{y}\rangle = N_{ab} \\ |\mathbf{x}\rangle \boxplus |\mathbf{y}\rangle &\equiv M_{ab} + N_{ab} = (M + N)_{ab} \\ \alpha\,|\mathbf{x}\rangle &= \alpha M_{ab} = (\alpha M)_{ab} \end{aligned}$$

   Es también obvio que se podrán formar subespacios vectoriales cuyos elementos sean matrices de dimensión menor a $n \times n$

5. El conjunto de todos los polinomios con coeficientes reales $\mathcal{P} = \left\{a_o, a_1 x, a_2 x^2, \cdots, a_n x^n, \cdots\right\}$ con $\boxplus$ la suma ordinaria entre polinomios y la multiplicación ordinaria de polinomios con escalares

6. Espacios Funcionales (de los cuales lo polinomios son un caso particular) En estos espacios los vectores serán funciones, la suma sera la suma ordinaria entre funciones y la multiplicación por un escalar también sera la multiplicación ordinaria de una función por un elemento de un campo

$$|\mathbf{f}\rangle = f(x) \quad \wedge \quad |\mathbf{g}\rangle = g(x)$$
$$|\mathbf{f}\rangle \boxplus |\mathbf{g}\rangle \equiv f(x) + g(x) \equiv (f+g)(x)$$
$$\alpha\,|\mathbf{f}\rangle = (\alpha f)(x) \equiv \alpha f(x)$$

Con este esquema vemos otros ejemplos

a) El conjunto de todas las funciones continuas e infinitamente diferenciables, definidas en el intervalo $[a,b] : \mathcal{C}^{\infty}_{[a,b]}$

b) El conjunto de todas las funciones complejas de variable real, $\psi(x)$, definidas en $[a,b]$, de cuadrado integrable (es decir para las cuales $\int_{[a,b]} \mathrm{d}x\ \|\psi(x)\|^2$ sea finita). Este espacio se denomina comúnmente $\mathcal{L}^2$ y pueden ser definidas en un rango $[a,b]$ finito o infinito y para mas de una variable.

La importancia de la conceptualización y la notación

En los ejemplos antes mencionados hemos utilizado para representar un vector abstracto la notación de $|\mathbf{v}_1\rangle$ y con ellos construimos un espacio vectorial abstracto $\mathbf{V} = \{|\mathbf{v}_1\rangle, |\mathbf{v}_2\rangle, |\mathbf{v}_3\rangle, \cdots, |\mathbf{v}_n\rangle\}$. Un espacio vectorial abstracto será un conjunto de elementos genéricos que satisfacen ciertos axiomas. Dependiendo del conjunto de axiomas tendremos distintos tipos de espacios abstractos. En matemática el concepto de espacios abstracto es reciente (1928) y, aparentemente, se le debe a Maurice Fréchet[2]. La teoría resulta de desarrollar las consecuencias lógicas que resultan de esos axiomas. Los elementos de esos espacios se dejan sin especificar a propósito. Ese vector abstracto puede representar, vectores en $\mathbb{R}^n$, matrices $n \times n$ o funciones continuas. La notación $|\mathbf{v}_1\rangle$, que se denomina un *ket* y al cual corresponde un *bra* $\langle\mathbf{v}_2|$ proviene del vocablo inglés *braket* que significa corchete y será evidente más adelante cuando construyamos escalares *braket* $\langle\mathbf{v}_2|\,|\mathbf{v}_1\rangle$. Esta útil notación la ideó Paul Dirac[3], uno de los físicos más influyentes en el desarrollo de la física del siglo pasado

2.2. Métricas y Espacios Métricos

El siguiente paso en la dotación de propiedades de los espacios lineales lo constituye la idea de métrica o distancia entre sus elementos. El concepto de métrica surge de la generalización de la idea de distancia entre dos puntos de la recta real.

Un Espacio vectorial sera métrico si podemos definir una función
$d : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbb{R} \quad \ni \quad \forall\ |\mathbf{x}\rangle, |\mathbf{y}\rangle, |\mathbf{z}\rangle \in \mathbf{V}$ se cumple que

[2] MAURICE FRéCHET (1878 Maligny, Yonne, Bourgogne-1973 París, Francia). Versátil Matemático Francés, con importantes contribuciones en Espacios Métricos, Topología y creador del concepto de espacios abstractos.
Más detalles http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Mathematicians/

[3] PAUL ADRIEN MAURICE DIRAC (1902 Bristol, Inglaterra 1984-Tallahassee, EE.UU) Además de contribuir de manera determinante en la comprensión de la Mecanica Cuántica, es uno de los creadores de la Mecanica Cuantica Relativista la cual ayudó a comprender el papel que juega el espín en las partículas subatómicas. Por sus importantes trabajos compartió con Erwin Schrödinger el Premio Nobel de física en 1933.
Más detalles http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Mathematicians/

1. $d(|\mathbf{x}\rangle, |\mathbf{y}\rangle) \geq 0 \qquad \text{si} \quad d(|\mathbf{x}\rangle, |\mathbf{y}\rangle) = 0 \Rightarrow |\mathbf{x}\rangle \equiv |\mathbf{y}\rangle$
2. $d(|\mathbf{x}\rangle, |\mathbf{y}\rangle) \equiv d(|\mathbf{y}\rangle, |\mathbf{x}\rangle)$
3. $d(|\mathbf{x}\rangle, |\mathbf{y}\rangle) \leq d(|\mathbf{x}\rangle, |\mathbf{z}\rangle) + d(|\mathbf{y}\rangle, |\mathbf{z}\rangle)$ La desigualdad Triangular

Así, diremos que $(\mathbf{V}, \mathbf{K}, \boxplus; d)$ es un espacio vectorial, lineal, métrico.

Ejemplos

1. Espacios Euclidianos reales $\mathbb{R}^n$
   a) Para $\mathbb{R}$, es decir la recta real, la definición de métrica es $d(|\mathbf{x}\rangle, |\mathbf{y}\rangle) \equiv |x - y|$
   b) Para $\mathbb{R}^2$, es decir el plano, una definición de métrica es $d(|\mathbf{x}\rangle, |\mathbf{y}\rangle) \equiv \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$. También podemos construir otra definición de métrica como $d_1(|\mathbf{x}\rangle, |\mathbf{y}\rangle) \equiv |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$. Es claro como el mismo espacio vectorial genera varios espacios métricos, dependiendo de la definición de métrica
   c) En general para Espacios Euclidianos reales $\mathbb{R}^n$ una posible definición de métrica sera $d(|\mathbf{x}\rangle, |\mathbf{y}\rangle) \equiv \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$
2. Espacios Unitarios $n-$dimensionales, o Espacios Euclidianos complejos, $\mathbb{C}^n$, la definición de distancia puede construirse como $d(|\mathbf{x}\rangle, |\mathbf{y}\rangle) \equiv \sqrt{|x_1 - y_1|^2 + |x_2 - y_2|^2 + |x_3 - y_3|^2 + \cdots + |x_n - y_n|^2}$ y es claro que se recobra la idea de distancia en el plano complejo: $d(|\mathbf{x}\rangle, |\mathbf{y}\rangle) \equiv |x - y|$
3. Para los Espacios Funcionales $\mathcal{C}^\infty_{[a,b]}$ una posible definición de distancia seria $d(|\mathbf{f}\rangle, |\mathbf{g}\rangle) \equiv \max_{t\in[a,b]} |f(t) - g(t)|$

Es importante destacar que las definiciones de distancia arriba propuesta son invariante con traslaciones de vectores. Esto es: $|\tilde{\mathbf{x}}\rangle = |\mathbf{x}\rangle + |\mathbf{a}\rangle \quad \wedge \quad |\tilde{\mathbf{y}}\rangle = |\mathbf{y}\rangle + |\mathbf{a}\rangle$, entonces $d(|\mathbf{x}\rangle, |\mathbf{y}\rangle) \equiv d(|\tilde{\mathbf{x}}\rangle, |\tilde{\mathbf{y}}\rangle)$.

2.3. Normas y Espacios Normados

La idea de distancia, de métrica, es el equipamiento más elemental que uno le puede exigir a un espacio vectorial. Mucho más interesante aún son aquellos espacios vectoriales que están equipados con la idea de norma y a partir de allí se define la idea de distancia. La norma tiene que ver con el "tamaño" del vector y la métrica tiene que ver con la distancia entre vectores. Cuando definimos la métrica a partir de la norma, vinculamos las propiedades algebraicas del espacio con sus propiedades geométricas.

La norma, $\||\mathbf{v}_i\rangle\| \equiv n(|\mathbf{v}_i\rangle)$ de un espacio vectorial $\mathbf{V} = \{|\mathbf{v}_1\rangle, |\mathbf{v}_2\rangle, |\mathbf{v}_3\rangle \cdots |\mathbf{v}_n\rangle\}$ será una función n: $\mathbf{V} \to \mathbb{R} \ni \quad \forall\ |\mathbf{v}_i\rangle \in \mathbf{V}$ se cumple que

1. $n(|\mathbf{v}_i\rangle) \equiv \||\mathbf{v}_i\rangle\| \geq 0 \qquad \text{si} \quad \||\mathbf{v}_i\rangle\| = 0 \Rightarrow |\mathbf{v}_i\rangle \equiv |\mathbf{0}\rangle$
2. $n(\alpha|\mathbf{v}_i\rangle) \equiv \|\alpha|\mathbf{v}_i\rangle\| = |\alpha|\ \||\mathbf{v}_i\rangle\|$
3. $\||\mathbf{x}\rangle + |\mathbf{y}\rangle\| \leq \||\mathbf{x}\rangle\| + \||\mathbf{y}\rangle\|$ Desigualdad Triangular.

La definición de norma induce una métrica de la forma $d\left(|\mathbf{x}\rangle, |\mathbf{y}\rangle\right) \equiv \left\| |\mathbf{x}\rangle - |\mathbf{y}\rangle \right\|$. Se denota en este caso un espacio vectorial normado como $(\mathbf{V}, \mathbf{K}, \boxplus; \|\cdot\|)$ y también se le conoce como un Espacio de Banach. El concepto de espacio vectorial normado fue formulado en 1922 de manera independiente por S. Banach[4], H. Hahn y N Wiener

Ejemplos

1. Espacios Euclidianos reales, $\mathbb{R}^n$ y Espacios Euclidianos Complejos $\mathbb{C}^n$
   Para estos espacios de Banach, la norma se define como

$$\left\| |\mathbf{x}\rangle \right\| = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + |x_3|^2 + \cdots + |x_n|^2} = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

   es claro que para un espacio Euclidiano $\mathbb{R}^3$se cumple que $\left\| |\mathbf{x}\rangle \right\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ por lo tanto la idea de norma generaliza la noción de "tamaño" del vector $|\mathbf{x}\rangle$. También es claro que la definición de distancia se construye a partir de la norma de la forma

$$d\left(|\mathbf{x}\rangle, |\mathbf{y}\rangle\right) \equiv \left\| |\mathbf{x}\rangle - |\mathbf{y}\rangle \right\| = \sqrt{|x_1 - y_1|^2 + |x_2 - y_2|^2 + |x_3 - y_3|^2 + \cdots + |x_n - y_n|^2}$$

2. Para el Espacio Lineal de matrices $n \times n$ reales o complejas con el campo $\mathbf{K}$ real o complejo, una definición de norma es

$$\|M\| = \sum_{a=1}^{m} \sum_{b=1}^{n} |M_{ab}|$$

   y la correspondiente definición de distancia

$$d\left(|\mathbf{x}\rangle, |\mathbf{y}\rangle\right) \equiv \|M - N\| = \sum_{a=1}^{m} \sum_{b=1}^{n} |M_{ab} - N_{ab}|$$

3. Para los Espacios Funcionales $\mathcal{C}^{\infty}_{[a,b]}$ una posible definición de norma sería:

$$\left\| |\mathbf{f}\rangle \right\| = \max_{t \in [a,b]} |f(t)|$$

   otra posible definición sería

$$\left\| |\mathbf{f}\rangle \right\| = \left(\int_{t \in [a,b]} \mathrm{d}x \ \ |f(x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

2.4. Producto Interno y Espacios de Hilbert

El siguiente paso en la construcción de espacios vectoriales más ricos es equiparlo con la definición de producto interno y a partir de esta definición construir el concepto de norma y con éste el de distancia. La idea de producto interno generaliza el concepto de producto escalar de vectores en $\mathbb{R}^3$ en incorpora a los

[4]**Stefan Banach** (1892 Kracovia, Polonia-1945 Lvov,Ucrania) Matemático polaco, uno de los fundadores del Análisis Funcional Moderno, con sus mayores contribuciones a la teoría de espacios topológicos. Hizo también importantes aportes a la teoría de la Medida, Integración y Teoría de conjuntos y Series Ortogonales.
Más detalles http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Mathematicians/

espacios vectoriales abstractos el concepto de ortogonalidad y descomposición ortogonal. Históricamente, la teoría de espacios vectoriales con producto interno es anterior a la teoría de espacios métricos y espacios de Banach y se le debe a D. Hilbert[5]. En su honor, los espacios vectoriales abstractos dotados de producto interno se denominan espacios de Hilbert. Adicionalmente, la semejanza entre la geometría euclidiana y la geométrica de $\mathbb{R}^n$ ha hecho que espacios en los cuales de puedan definir, distancia, ángulos, a partir de una definición de producto interno, de denominen también espacio Euclidianos.

2.4.1. Producto Interno

En un espacio vectorial abstracto $\mathbf{V} = \{|\mathbf{v}_1\rangle, \ |\mathbf{v}_2\rangle, \ |\mathbf{v}_3\rangle \cdots |\mathbf{v}_n\rangle\}$ la definición del producto interno de dos vectores se denota como $\langle \mathbf{v}_i| \ \mathbf{v}_j\rangle$ y es una función de
$\mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{C} \quad \ni \quad \forall \ |\mathbf{x}\rangle, |\mathbf{y}\rangle, |\mathbf{z}\rangle \ \in \ \mathbf{V}$, es decir asocia a ese par de vectores con un elemento del campo escalar. Las propiedades que definen el producto interno son

1. $\langle \mathbf{x}| \ \mathbf{x}\rangle \quad \in \mathbb{R} \quad \wedge \quad \langle \mathbf{x}| \ \mathbf{x}\rangle \geq 0 \quad \forall \ |\mathbf{x}\rangle \in \mathbf{V} \qquad \text{si} \quad \langle \mathbf{x}| \ \mathbf{x}\rangle = 0 \Rightarrow |\mathbf{x}\rangle \equiv |\mathbf{0}\rangle$
2. $\langle \mathbf{x}| \ \mathbf{y}\rangle = \langle \mathbf{y}| \ \mathbf{x}\rangle^* \quad \forall \ |\mathbf{x}\rangle, |\mathbf{y}\rangle \in \mathbf{V}$
3. $\langle \mathbf{x}| \ \mathbf{y}+\mathbf{z}\rangle = \langle \mathbf{x}| \ \mathbf{y}\rangle + \langle \mathbf{x}| \ \mathbf{z}\rangle \quad \wedge \quad \langle \mathbf{x}+\mathbf{z}| \ \mathbf{y}\rangle = \langle \mathbf{x}| \ \mathbf{y}\rangle + \langle \mathbf{z}| \ \mathbf{y}\rangle \quad \forall \ |\mathbf{x}\rangle, |\mathbf{y}\rangle, |\mathbf{z}\rangle \in \mathbf{V}$
4. $\langle \mathbf{x}| \ \alpha\mathbf{y}\rangle = \alpha \langle \mathbf{x}| \ \mathbf{y}\rangle \quad \wedge \quad \langle \alpha\mathbf{x}| \ \mathbf{y}\rangle = \alpha^* \langle \mathbf{x}| \ \mathbf{y}\rangle \quad \forall \ |\mathbf{x}\rangle, |\mathbf{y}\rangle \in \mathbf{V} \quad \wedge \quad \alpha \in \mathbf{K}$
5. $\langle \mathbf{x}| \ \mathbf{0}\rangle = \langle \mathbf{0}| \ \mathbf{x}\rangle = 0$

A partir de la definición de producto interno se construyen los conceptos de norma y distancia

$$\| |\mathbf{x}\rangle \| = \sqrt{\langle \mathbf{x}| \ \mathbf{x}\rangle} \qquad \text{y} \qquad d\left(|\mathbf{x}\rangle, |\mathbf{y}\rangle\right) \equiv \| |\mathbf{x}\rangle - |\mathbf{y}\rangle \| = \sqrt{\langle \mathbf{x}-\mathbf{y}| \ \mathbf{x}-\mathbf{y}\rangle}$$

2.4.2. La desigualdad de Cauchy Schwarz

Todo producto interno $\langle \mathbf{x}| \ \mathbf{y}\rangle$ definido en un espacio vectorial abstracto $\mathbf{V} = \{|\mathbf{v}_1\rangle, \ |\mathbf{v}_2\rangle, \ |\mathbf{v}_3\rangle \cdots |\mathbf{v}_n\rangle\}$ cumple con la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$|\langle \mathbf{x}| \ \mathbf{y}\rangle|^2 \leq \langle \mathbf{x}| \ \mathbf{x}\rangle \langle \mathbf{y}| \ \mathbf{y}\rangle \qquad \Longleftrightarrow \qquad \langle \mathbf{x}| \ \mathbf{y}\rangle \leq \| |\mathbf{x}\rangle \| \ \| |\mathbf{y}\rangle \|$$

Es claro que $|\mathbf{x}\rangle = |\mathbf{0}\rangle \quad \wedge \quad |\mathbf{y}\rangle = |\mathbf{0}\rangle$ se cumple la igualdad y es trivial la afirmación. Para $|\mathbf{x}\rangle \ \wedge \ |\mathbf{y}\rangle$ cualesquiera procedemos construyendo $|\mathbf{z}\rangle = \alpha |\mathbf{x}\rangle + \beta |\mathbf{y}\rangle$ con $|\mathbf{x}\rangle \quad \wedge \quad |\mathbf{y}\rangle$ arbitrarios pero α y β tendrán valores particulares, por lo tanto

$$\langle \mathbf{z}| \ \mathbf{z}\rangle \equiv \langle \alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{y}| \ \alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{y}\rangle \geq 0$$

$$\langle \alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{y}| \ \alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{y}\rangle = \langle \alpha\mathbf{x}| \ \alpha\mathbf{x}\rangle + \langle \alpha\mathbf{x}| \ \beta\mathbf{y}\rangle + \langle \beta\mathbf{y}| \ \alpha\mathbf{x}\rangle + \langle \beta\mathbf{y}| \ \beta\mathbf{y}\rangle \geq 0$$

$$\langle \alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{y}| \ \alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{y}\rangle = |\alpha|^2 \langle \mathbf{x}| \ \mathbf{x}\rangle + \alpha^*\beta \langle \mathbf{x}| \ \mathbf{y}\rangle + \beta^*\alpha \langle \mathbf{y}| \ \mathbf{x}\rangle + |\beta|^2 \langle \mathbf{y}| \ \mathbf{y}\rangle \geq 0$$

si $\alpha = \langle \mathbf{y}| \ \mathbf{y}\rangle$ se tiene que

$$\langle \mathbf{y}| \ \mathbf{y}\rangle \langle \mathbf{x}| \ \mathbf{x}\rangle + \beta \langle \mathbf{x}| \ \mathbf{y}\rangle + \beta^* \langle \mathbf{y}| \ \mathbf{x}\rangle + |\beta|^2 \geq 0$$

[5] **David Hilbert** (1862 Kaliningrad, Rusia-1943 Göttingen, Alemania) Matemático alemán defensor de la axiomática como enfoque primordial de los problemas científicos. Hizo importantes contribuciones en distintas áreas de la matemática, como invariantes, campos de números algebraicos, análisi funcional, ecuaciones integrales, física matemáticam y cálculo en variaciones. Más detalles http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Mathematicians/

seguidamente seleccionamos $\beta = -\langle \mathbf{x}|\ \mathbf{y}\rangle$ y por lo tanto $\beta^* = -\langle \mathbf{y}|\ \mathbf{x}\rangle$ y consecuentemente

$$\langle \mathbf{y}|\ \mathbf{y}\rangle \langle \mathbf{x}|\ \mathbf{x}\rangle \geq \langle \mathbf{x}|\ \mathbf{y}\rangle \langle \mathbf{y}|\ \mathbf{x}\rangle = |\langle \mathbf{x}|\ \mathbf{y}\rangle|^2$$

De la desigualdad de Cauchy-Schwarz y la definición de norma se desprende que

$$\frac{|\langle \mathbf{x}|\ \mathbf{y}\rangle|^2}{\||\mathbf{x}\rangle\|^2 \||\mathbf{y}\rangle\|^2} \leq 1 \qquad \Rightarrow \quad -1 \leq \frac{\langle \mathbf{x}|\ \mathbf{y}\rangle}{\||\mathbf{x}\rangle\| \||\mathbf{y}\rangle\|} \leq 1$$

por lo tanto podemos definir el "ángulo" entre los vectores abstractos $|\mathbf{x}\rangle \quad \wedge \quad |\mathbf{y}\rangle$ como

$$\cos\Theta = \frac{\langle \mathbf{x}|\ \mathbf{y}\rangle}{\||\mathbf{x}\rangle\| \||\mathbf{y}\rangle\|}$$

Más aún, a partir de la definición de norma se obtiene

$$\||\mathbf{x}\rangle + |\mathbf{y}\rangle\|^2 = \langle \mathbf{x}+\mathbf{y}|\ \mathbf{x}+\mathbf{y}\rangle = \langle \mathbf{x}|\ \mathbf{x}\rangle + \langle \mathbf{x}|\ \mathbf{y}\rangle + \langle \mathbf{x}|\ \mathbf{y}\rangle^* + \langle \mathbf{y}|\ \mathbf{y}\rangle = \langle \mathbf{x}|\ \mathbf{x}\rangle + 2\,\mathrm{Re}\left(\langle \mathbf{x}|\ \mathbf{y}\rangle\right) + \langle \mathbf{y}|\ \mathbf{y}\rangle$$

con lo cual hemos generalizado para un espacio vectorial abstracto el teorema del coseno

$$\||\mathbf{x}\rangle + |\mathbf{y}\rangle\|^2 = \||\mathbf{x}\rangle\|^2 + \||\mathbf{y}\rangle\|^2 + 2\,\||\mathbf{x}\rangle\| \||\mathbf{y}\rangle\| \cos\Theta$$

y para el caso que los vectores $|\mathbf{x}\rangle \quad \wedge \quad |\mathbf{y}\rangle$ sean ortogonales, esto es $\langle \mathbf{x}|\ \mathbf{y}\rangle = 0$, tendremos el teorema de Pitágoras generalizado

$$\||\mathbf{x}\rangle + |\mathbf{y}\rangle\|^2 = \||\mathbf{x}\rangle\|^2 + \||\mathbf{y}\rangle\|^2$$

Ejemplos

1. Espacios Euclidianos reales, $\mathbb{R}^n$ y Espacios Euclidianos Complejos $\mathbb{C}^n$. Los vectores de estos espacios pueden ser representados por $|\mathbf{x}\rangle = (x_1, x_2, \cdots x_n) \quad \wedge \quad |\mathbf{y}\rangle = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$ y **el producto interno** queda definido por

$$\langle \mathbf{x}|\ \mathbf{y}\rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3, \cdots x_n y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

es claro que esta definición de producto interno coincide, para $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ con la idea de producto escalar convencional, vale decir

$$\left.\begin{array}{|l} a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath} + a_z\hat{k} \\ \\ b_x\hat{\imath} + b_y\hat{\jmath} + b_z\hat{k} \end{array}\right\} \qquad \Rightarrow \quad \vec{a}\cdot\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

ahora bien, el lector puede comprobar que para vectores en $\mathbb{R}^2$ también se puede proveer una definición de producto interno

$$\vec{a} \circledast \vec{b} = 2a_x b_x + a_x b_y + a_y b_x + a_y b_y$$

igualmente válida, con lo cual es claro que en un mismo espacio vectorial pueden coexistir. Por su parte la **norma**

$$\||\mathbf{x}\rangle\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}|\ \mathbf{x}\rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2, \cdots + x_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

La **distancia** también recupera la idea intuitiva de distancia euclidiana

$$d(|\mathbf{x}\rangle, |\mathbf{y}\rangle) \equiv \| |\mathbf{x}\rangle - |\mathbf{y}\rangle \| = \sqrt{\langle \mathbf{x}-\mathbf{y} | \ \mathbf{x}-\mathbf{y}\rangle}$$

$$d(|\mathbf{x}\rangle, |\mathbf{y}\rangle) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + (x_3-y_3)^2 + \cdots + (x_n-y_n)^2}$$

El teorema del coseno queda como

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i+y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} y_i^2 + 2\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\right)\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}\right)\cos\Theta$$

mientras que Pitágoras, queda como

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i+y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} y_i^2$$

obvio que para $\mathbb{R}^2$ tanto el teorema del coseno como el teorema de Pitágoras retoman su forma tradicional. Finalmente la desigualdad de Cauchy-Schwarz se expresa

$$|\langle \mathbf{x} | \ \mathbf{y}\rangle| \leq \| |\mathbf{x}\rangle \| \ \| |\mathbf{y}\rangle \| \Rightarrow \quad \left| \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \right|^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)$$

2. Para los Espacios de Funciones continuas $\mathcal{C}^{\infty}_{[a,b]}$ una posible definición de **producto interno** sería

$$\langle \mathbf{f} | \ \mathbf{g}\rangle = \int_{t\in[a,b]} \mathrm{d}x \ f^*(x) \ g(x)$$

de la cual se deriva la expresión para la **norma**

$$\| |\mathbf{f}\rangle \|^2 = \langle \mathbf{f} | \ \mathbf{f}\rangle = \int_{t\in[a,b]} \mathrm{d}x \ |f(x)|^2$$

la **distancia** entre funciones quedará definida como

$$d(|\mathbf{f}\rangle, |\mathbf{g}\rangle) \equiv \| |\mathbf{f}\rangle - |\mathbf{g}\rangle \| \equiv \sqrt{\langle \mathbf{f}-\mathbf{g} | \ \mathbf{f}-\mathbf{g}\rangle} = \sqrt{\langle \mathbf{f} | \ \mathbf{f}\rangle - \langle \mathbf{f} | \ \mathbf{g}\rangle - \langle \mathbf{f} | \ \mathbf{g}\rangle^* + \langle \mathbf{g} | \ \mathbf{g}\rangle}$$

$$d(|\mathbf{f}\rangle, |\mathbf{g}\rangle) = \sqrt{\int_{t\in[a,b]} \mathrm{d}x \ |f(x) - g(x)|^2} \quad \Rightarrow$$

$$d(|\mathbf{f}\rangle, |\mathbf{g}\rangle) = \sqrt{\int_{t\in[a,b]} \mathrm{d}x \ |f(x)|^2 - 2\,\mathrm{Re}\left(\int_{t\in[a,b]} \mathrm{d}x \ f^*(x) \ g(x)\right) + \int_{t\in[a,b]} \mathrm{d}x \ |g(x)|^2}$$

Los teoremas del coseno puede ser escrito como

$$\int_{t\in[a,b]} \mathrm{d}x \ |f(x)+g(x)|^2 = \int_{t\in[a,b]} \mathrm{d}x \ |f(x)|^2 + \int_{t\in[a,b]} \mathrm{d}x \ |g(x)|^2$$
$$+ 2\left(\int_{t\in[a,b]} \mathrm{d}x \ |f(x)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{t\in[a,b]} \mathrm{d}x \ |g(x)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \cos\Theta$$

donde

$$\cos\Theta = \frac{\int_{t\in[a,b]} \mathrm{d}x \;\; f^*(x) \;\; g(x)}{\left(\int_{t\in[a,b]} \mathrm{d}x \;\; |f(x)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{t\in[a,b]} \mathrm{d}x \;\; |g(x)|^2\right)^{\frac{1}{2}}}$$

y como era de esperarse el teorema de Pitágoras queda

$$\int_{t\in[a,b]} \mathrm{d}x \;\; |f(x)+g(x)|^2 = \int_{t\in[a,b]} \mathrm{d}x \;\; |f(x)|^2 + \int_{t\in[a,b]} \mathrm{d}x \;\; |g(x)|^2$$

para funciones $f(x)$ y $g(x)$ ortogonales, mientras que para este caso, la desigualdad de Cauchy-Schwarz se expresa

$$\left|\int_{t\in[a,b]} \mathrm{d}x \;\; f^*(x) \;\; g(x)\right|^2 \leq \left(\int_{t\in[a,b]} \mathrm{d}x \;\; |f(x)|^2\right)\left(\int_{t\in[a,b]} \mathrm{d}x \;\; |g(x)|^2\right)$$

2.5. Variedades Lineales

2.5.1. Dependencia, independencia lineal

Siguiendo la misma línea de razonamiento generalizamos el concepto de dependencia e independencia lineal de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$. Así

$$|\mathbf{0}\rangle = C_1 \;\; |\mathbf{v}_1\rangle + C_2 \;\; |\mathbf{v}_2\rangle + C_3 \;\; |\mathbf{v}_3\rangle \cdots + C_n \;\; |\mathbf{v}_n\rangle = \sum_{i=1}^{n} C_i \;\; |\mathbf{v}_i\rangle \,,$$

Podemos afirmar que

- Si esta ecuación se cumple para algún conjunto de $\{C_i\}$ no nulos, se dirá que el conjunto de vectores correspondiente $\{|\mathbf{v}_i\rangle\}$ son **linealmente dependientes.**
- por el contrario, si esta ecuación **sólo** puede ser satisfecha para todos los $C_i = 0$, entonces se dirá que el conjunto de vectores correspondiente $\{|\mathbf{v}_i\rangle\}$ son **linealmente independientes.**

Por ejemplo, dados tres vectores en $\mathbb{R}^4$

$$|\mathbf{v}_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad |\mathbf{v}_2\rangle = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad |\mathbf{v}_3\rangle = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

El criterio de independencia lineal se cumple si $|\mathbf{0}\rangle = C_1 \;\; |\mathbf{v}_1\rangle + C_2 \;\; |\mathbf{v}_2\rangle + C_3 \;\; |\mathbf{v}_3\rangle$ y todos los $\{C_i\}$ son nulos. Esto es

$$\begin{array}{cccccc} C_1 & +2C_2 & -C_3 & = & 0 \\ 3C_1 & & +C_3 & = & 0 \\ -C_1 & +C_2 & & = & 0 \\ 2C_1 & +3C_2 & & = & 0 \end{array}$$

de donde es claro ver que la única solución posible implica $C_1 = C_2 = C_3 = 0$.

Ejemplos Si consideramos el espacio vectorial $\mathbf{V} = \{|\mathbf{v}_1\rangle, |\mathbf{v}_2\rangle, |\mathbf{v}_3\rangle, \cdots, |\mathbf{v}_n\rangle\}$ serán ejemplos de **independencia lineal**:

- $|\mathbf{v}_k\rangle \equiv f(t) = t^k$ para $k = 1, 2, 3, \cdots$ es claro que un polinomio de grado $n+1$, no podrá ser expresado en términos un polinomio de grado n. en otras palabras, $t^{n+1} \neq \sum_{i=0}^{n} \bar{C}_i \ t^i$
- $|\mathbf{v}_k\rangle \equiv f(t) = e^{a_k t}$ con $a_1, a_2, a_3, \cdots$ coeficientes constantes. También salta a la vista que no podremos expresar una de esas funciones exponenciales como combinación lineal

Si consideramos $|\mathbf{v}_1\rangle \equiv f(t) = \cos^2 t, |\mathbf{v}_2\rangle = \operatorname{sen}^2 t$ y $|\mathbf{v}_3\rangle = 1$ es claro que $|\mathbf{v}_1\rangle, |\mathbf{v}_2\rangle$, y $|\mathbf{v}_3\rangle$ son **linealmente dependientes** por cuanto $|\mathbf{v}_1\rangle + |\mathbf{v}_2\rangle = |\mathbf{v}_3\rangle$. Nótese que si

$$|\mathbf{v}_1\rangle = \cos t, \quad |\mathbf{v}_2\rangle = \operatorname{sen} t \quad \text{y} \quad |\mathbf{v}_3\rangle = 1,$$

entonces $|\mathbf{v}_1\rangle, |\mathbf{v}_2\rangle$, y $|\mathbf{v}_3\rangle$ serán vectores **linealmente independientes.**

Consideremos ahora otros ejemplos y determinemos ¿ cuál o cuáles de los siguientes conjuntos de vectores en $\mathcal{P}^3$ son linealmente independientes ?

1. $|\mathbf{x1}\rangle = 1; \quad |\mathbf{x2}\rangle = x-1; \quad |\mathbf{x3}\rangle = x^2; \quad |\mathbf{x4}\rangle = x^2 + 2x + 1;$
   Linealmente dependiente ya que siempre podremos expresar $|\mathbf{x4}\rangle = 3|\mathbf{x1}\rangle + 2|\mathbf{x2}\rangle + |\mathbf{x3}\rangle$
2. $|\mathbf{x1}\rangle = 2x; \quad |\mathbf{x2}\rangle = x^2+1; \quad |\mathbf{x3}\rangle = x+1; \quad |\mathbf{x4}\rangle = x^2 - 1;$
   Linealmente dependiente ya que siempre podremos expresar $|\mathbf{x4}\rangle = |\mathbf{x1}\rangle + |\mathbf{x2}\rangle - 2|\mathbf{x3}\rangle$
3. $|\mathbf{x1}\rangle = x(x-1); \quad |\mathbf{x2}\rangle = x; \quad |\mathbf{x3}\rangle = x^3; \quad |\mathbf{x4}\rangle = 2x^3 - x^2;$
   Linealmente dependiente ya que siempre podremos expresar $|\mathbf{x4}\rangle = -|\mathbf{x1}\rangle + |\mathbf{x2}\rangle + 2|\mathbf{x3}\rangle$

2.5.2. Bases de un Espacio Vectorial

Ahora bien, dado un espacio vectorial $\mathbf{V} = \{|\mathbf{v}_1\rangle, |\mathbf{v}_2\rangle, |\mathbf{v}_3\rangle \cdots, |\mathbf{v}_n\rangle\}$, encontramos que el conjunto de $\{|\mathbf{v}_n\rangle\}$ es linealmente dependiente, entonces siempre es posible despejar uno de los vectores en términos de los demás, vale decir

$$|\mathbf{v}_n\rangle = \bar{C}_1 \ |\mathbf{v}_1\rangle + \bar{C}_2 \ |\mathbf{v}_2\rangle + \bar{C}_3 \ |\mathbf{v}_3\rangle \cdots + \bar{C}_{n-1} \ |\mathbf{v}_{n-1}\rangle = \sum_{i=1}^{n-1} \bar{C}_i \ |\mathbf{v}_i\rangle,$$

seguidamente se procede a comprobar si $\{|\mathbf{v}_1\rangle, |\mathbf{v}_2\rangle, |\mathbf{v}_3\rangle \cdots, |\mathbf{v}_{n-1}\rangle\}$ son linealmente independientes, es decir si $\bar{C}_1 = \bar{C}_2 = \bar{C}_3 = \cdots = \bar{C}_{n-1} = 0$. En caso de no serlo se procede otra vez a despejar uno de los vectores en términos de los anteriores y a aplicar el criterio de independencia lineal,

$$|\mathbf{v}_{n-1}\rangle = \tilde{C}_1 \ |\mathbf{v}_1\rangle + \tilde{C}_2 \ |\mathbf{v}_2\rangle + \tilde{C}_3 \ |\mathbf{v}_3\rangle \cdots + \tilde{C}_{n-2} \ |\mathbf{v}_{n-2}\rangle = \sum_{i=1}^{n-2} \tilde{C}_i \ |\mathbf{v}_i\rangle,$$
$$¿\tilde{C}_1 = \tilde{C}_2 = \tilde{C}_3 = \cdots = \tilde{C}_{n-1} = 0.?$$

se repite este procedimiento hasta encontrar un conjunto $\{|\mathbf{v}_1\rangle, |\mathbf{v}_2\rangle, |\mathbf{v}_3\rangle \cdots, |\mathbf{v}_{n-j}\rangle\}$ de vectores linealmente independientes. Esto es ¡$\breve{C}_1 = \breve{C}_2 = \breve{C}_3 = \cdots = \breve{C}_{n-j} = 0.$! y por lo tanto

$$|\mathbf{v}_{n-j+1}\rangle = \breve{C}_1 \ |\mathbf{v}_1\rangle + \breve{C}_2 \ |\mathbf{v}_2\rangle + \breve{C}_3 \ |\mathbf{v}_3\rangle \cdots + \breve{C}_{n-j} \ |\mathbf{v}_{n-i}\rangle = \sum_{i=1}^{n-j} \breve{C}_i \ |\mathbf{v}_i\rangle,$$
$$\breve{C}_1 = \breve{C}_2 = \breve{C}_3 = \cdots = \breve{C}_{n-j} = 0.?$$

¡$\breve{C}_1 = \breve{C}_2 = \breve{C}_3 = \cdots = \breve{C}_{n-j} = 0$.! y por lo tanto

$$|\mathbf{0}\rangle = \breve{C}_1 \ |\mathbf{v}_1\rangle + \breve{C}_2 \ |\mathbf{v}_2\rangle + \breve{C}_3 \ |\mathbf{v}_3\rangle \cdots + \breve{C}_{n-j} \ |\mathbf{v}_{n-j}\rangle = \sum_{i=1}^{n-j} \breve{C}_i \ |\mathbf{v}_i\rangle \,,$$

En este caso diremos que $\{|\mathbf{v}_1\rangle\,,\ |\mathbf{v}_2\rangle\,,\ |\mathbf{v}_3\rangle\cdots,|\mathbf{v}_{n-j}\rangle\}$ es una base para $\mathbf{V}$. La dimensión de $\mathbf{V}$ sera el conjunto de vectores linealmente independientes, que para este caso es $n-j$. Así se puede comprobar que, dado $|\mathbf{x}\rangle \in \mathbf{V}$ entonces

$$|\mathbf{x}\rangle = \sum_{i=1}^{n-j} C_i \ |\mathbf{v}_i\rangle \,, \qquad \forall \ |\mathbf{x}\rangle \in \mathbf{V}$$

y el conjunto $\{C_1, C_2, C_3, \cdots C_{n-j}\}$ es único. Diremos que el número mínimo de vectores,

$$|\mathbf{v}_1\rangle\,,\ |\mathbf{v}_2\rangle\,,\ |\mathbf{v}_3\rangle\cdots,|\mathbf{v}_{n-j}\rangle$$

que expanden $\mathbf{V}$ conforman una base de ese espacio vectorial, y que el número finito de escalares $\{C_1, C_2, C_3, \cdots C_{n-j}\}$ constituyen las componentes de $|\mathbf{x}\rangle$ relativas a la base $|\mathbf{v}_1\rangle\,,\ |\mathbf{v}_2\rangle\,,\cdots,|\mathbf{v}_{n-j}\rangle$. Del ejemplo anterior se puede concretar la siguiente definición

A un conjunto finito de vectores de un espacio vectorial,

$$\mathcal{B} = \{|\mathbf{v}_1\rangle\,,\ |\mathbf{v}_2\rangle\,,\ |\mathbf{v}_3\rangle\cdots,|\mathbf{v}_n\rangle\} \in \mathbf{V},$$

se les denominará base de ese espacio $\mathbf{V}$ si los $|\mathbf{v}_1\rangle\,,\ |\mathbf{v}_2\rangle\,,\ |\mathbf{v}_3\rangle\cdots,|\mathbf{v}_n\rangle$ son linealmente independientes y expanden $\mathbf{V}$. El espacio vectorial se denominará de dimensión finita sí la base es finita y de dimensión infinita sí, por el contrario su base es infinita.

Es fácil darse cuenta que si $\mathbf{V}$ lo expanden n vectores linealmente independientes, cualquier otro vector $|\mathbf{x}\rangle \in \mathbf{V}$ será linealmente dependiente. Igualmente fácilmente demostrable que todas las bases de un espacio vectorial $\mathbf{V}$,de dimensión finita, tendrán el mismo número de elementos y ese número de elemento será la dimensión del espacio.

Adicionalmente, puede ser que dentro de un espacio vectorial $\mathbf{V}$ se puedan encontrar subespacios y dentro de esos subespacios un conjunto de vectores base. Vale decir $\forall \ |\mathbf{x}\rangle \in \mathbf{V}$:

$$|\mathbf{x}\rangle = \underbrace{C_1 \ |\mathbf{v}_1\rangle \cdots + C_{n-j} \ |\mathbf{v}_{n-j}\rangle}_{\mathbf{S}_1} + \underbrace{C_{n-j+1} \ |\mathbf{v}_{n-j+1}\rangle \cdots C_{n-k} \ |\mathbf{v}_{n-k}\rangle}_{\mathbf{S}_2} + \underbrace{C_{n-k+1} \ |\mathbf{v}_{n-k+1}\rangle \cdots C_n \ |\mathbf{v}_n\rangle}_{\mathbf{S}_3}$$

Entonces $|\mathbf{x}\rangle = |\mathbf{x}_1\rangle + |\mathbf{x}_2\rangle + |\mathbf{x}_3\rangle$ con $|\mathbf{x}_1\rangle \in \mathbf{S}_1$; $\quad |\mathbf{x}_2\rangle \in \mathbf{S}_2$; $\quad |\mathbf{x}_3\rangle \in \mathbf{S}_3$, entonces diremos que $\mathbf{V}$ es la suma directa de $\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2$ y $\mathbf{S}_3$ y lo denotaremos como $\mathbf{V} = \mathbf{S}_1 \oplus \mathbf{S}_2 \oplus \mathbf{S}_3$

2.5.3. El determinante de Gram

Existe una forma directa de comprobar la independencia lineal de una conjunto de vectores $\{|\mathbf{v}_1\rangle\,,\ |\mathbf{v}_2\rangle\,,\ |\mathbf{v}_3\rangle\cdots,|\mathbf{v}_n\rangle\} \in \mathbf{V}$,y es como sigue: dado $|\mathbf{x}\rangle \in \mathbf{V}$ entonces

$$|\mathbf{x}\rangle = \sum_{i=1}^{n} C_i \ |\mathbf{v}_i\rangle \,, \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} C_1 \ \langle\mathbf{v}_1 |\mathbf{v}_1\rangle + C_2 \ \langle\mathbf{v}_1 |\mathbf{v}_2\rangle + C_3 \ \langle\mathbf{v}_1 |\mathbf{v}_3\rangle + \cdots + C_n \ \langle\mathbf{v}_1 |\mathbf{v}_n\rangle & = \langle\mathbf{v}_1 |\mathbf{x}\rangle \\ C_1 \ \langle\mathbf{v}_2 |\mathbf{v}_1\rangle + C_2 \ \langle\mathbf{v}_2 |\mathbf{v}_2\rangle + C_3 \ \langle\mathbf{v}_2 |\mathbf{v}_3\rangle + \cdots + C_n \ \langle\mathbf{v}_2 |\mathbf{v}_n\rangle & = \langle\mathbf{v}_2 |\mathbf{x}\rangle \\ \vdots & \vdots \\ C_1 \ \langle\mathbf{v}_n |\mathbf{v}_1\rangle + C_2 \ \langle\mathbf{v}_n |\mathbf{v}_2\rangle + C_3 \ \langle\mathbf{v}_n |\mathbf{v}_3\rangle + \cdots + C_n \ \langle\mathbf{v}_n |\mathbf{v}_n\rangle & = \langle\mathbf{v}_n |\mathbf{x}\rangle \end{array} \right.$$

donde las $C_1, C_2, C_3, \cdots C_n$ son las incógnitas, por lo cual para que este sistema tenga solución se impone que

$$\begin{vmatrix} \langle \mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_1 \rangle & \langle \mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_2 \rangle & \langle \mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_3 \rangle & \cdots & \langle \mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_n \rangle \\ \langle \mathbf{v}_2 | \mathbf{v}_1 \rangle & \langle \mathbf{v}_2 | \mathbf{v}_2 \rangle & \langle \mathbf{v}_2 | \mathbf{v}_3 \rangle & \cdots & \langle \mathbf{v}_2 | \mathbf{v}_n \rangle \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \langle \mathbf{v}_n | \mathbf{v}_1 \rangle & \langle \mathbf{v}_n | \mathbf{v}_2 \rangle & \langle \mathbf{v}_n | \mathbf{v}_3 \rangle & \cdots & \langle \mathbf{v}_n | \mathbf{v}_n \rangle \end{vmatrix} \neq 0$$

Esto es que el determinante de Gram[6] distinto de cero implica que el conjunto $\{|\mathbf{v}_1\rangle, |\mathbf{v}_2\rangle, |\mathbf{v}_3\rangle \cdots, |\mathbf{v}_n\rangle\} \in \mathbf{V}$ es linealmente independiente. La inversa también es cierta.

Ejemplos

- $\mathbf{V}^n$ tendrá dimensión n y una de las posibles bases $\{|\mathbf{v}_1\rangle, |\mathbf{v}_2\rangle, |\mathbf{v}_3\rangle \cdots, |\mathbf{v}_n\rangle\}$ será
$$\begin{array}{ll} |\mathbf{v}_1\rangle = & (1,0,0,\cdots,0) \\ |\mathbf{v}_2\rangle = & (0,1,0,\cdots,0) \\ |\mathbf{v}_3\rangle = & (0,0,1,\cdots,0) \\ \vdots & \vdots \\ |\mathbf{v}_{n-j}\rangle = & (0,0,0,\cdots,1) \end{array}$$
Esta base se conoce con el nombre de base canónica.

- El espacio de polinomios, $\mathcal{P}^n$, de grado $g \leq n$ tendrá como una de las posibles bases al conjunto $\left\{1, t, t^2, t^3, \cdots, t^n\right\}$, por que cualquier polinomio de grado $\leq n$ podrá ser expresado como combinación lineal de estos $n+1$ vectores. Más aún, el espacio de **todos** los polinomios, $\mathcal{P}^\infty$, tendrá como una posible base al conjunto de funciones $\left\{1, t, t^2, t^3, \cdots, t^n \cdots\right\}$. En este caso $\mathcal{P}^\infty$ será infinito dimensional.

2.5.4. Ortogonalidad y Bases Ortogonales

En una espacio con vectorial con producto interno, dos vectores $|\mathbf{u}_1\rangle \wedge |\mathbf{u}_2\rangle$ serán ortogonales si su producto interno se anula

$$|\mathbf{u}_1\rangle \quad \perp \quad |\mathbf{u}_2\rangle \quad \Leftrightarrow \quad \langle \mathbf{u}_2 | \mathbf{u}_1 \rangle = 0$$

Se denomina un conjunto ortogonal de vectores $\{|\mathbf{u}_1\rangle, |\mathbf{u}_2\rangle, |\mathbf{u}_3\rangle \cdots, |\mathbf{u}_n\rangle\}$ si

$$\langle \mathbf{u}_i | \mathbf{u}_j \rangle = \delta_{ij} \left\| |\mathbf{u}_j\rangle \right\|^2 \qquad i,j = 1,2,3,\cdots,n \qquad \text{y con} \qquad \left\{ \begin{array}{ll} \delta_{ij} = 0 & \text{si } i \neq j \\ \delta_{ij} = 1 & \text{si } i = j \end{array} \right.$$

y se denominará conjunto ortonormal si $\left\| |\mathbf{u}_j\rangle \right\|^2 = 1$.

Un conjunto ortogonal de vectores $\{|\mathbf{u}_1\rangle, |\mathbf{u}_2\rangle, |\mathbf{u}_3\rangle \cdots, |\mathbf{u}_n\rangle\} \in \mathbf{V}$ es linealmente independiente, más aún, para el caso particular de un espacio euclidiano, $\{|\mathbf{u}_1\rangle, |\mathbf{u}_2\rangle, |\mathbf{u}_3\rangle \cdots, |\mathbf{u}_n\rangle\}$ conforman una base ortogonal para $\mathbf{V}$. La demostración es sencilla. Para un determinado espacio vectorial una combinación lineal de

[6] **Jorgen Pedersen Gram** (1850-1916 Dinamarca) Matemático Danés, que alternaba su actividad de gerente de una importante compañía de seguros con las matemáticas (Probabilidad, Análisis Numérico y Teoría de Números). Es conocido mayormente por el método de ortogonalización, pero se presume que no fue él quien primero lo utilizó. Aparentemente fue ideado por Laplace y utilizado también por Cauchy en 1836. Gram murió arrollado por una bicicleta a la edad de 61 años.
Más detalles http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Mathematicians

los $\{|\mathbf{u}_1\rangle\,,\ |\mathbf{u}_2\rangle\,,\ |\mathbf{u}_3\rangle\cdots,|\mathbf{u}_n\rangle\}$ se anula.

$$\sum_{i=1}^{n} C_i\ \ |\mathbf{u}_i\rangle = |\mathbf{0}\rangle \qquad \Rightarrow \left\{ \begin{array}{lllll} \langle \mathbf{u}_1|\left[\sum_{i=1}^{n} C_i\ \ |\mathbf{u}_i\rangle\right] = 0 & \Rightarrow & \sum_{i=1}^{n} C_i\ \delta_{1i} = 0 & \Rightarrow & C_1 = 0 \\ \langle \mathbf{u}_2|\left[\sum_{i=1}^{n} C_i\ \ |\mathbf{u}_i\rangle\right] = 0 & \Rightarrow & \sum_{i=1}^{n} C_i\ \delta_{2i} = 0 & \Rightarrow & C_2 = 0 \\ \langle \mathbf{u}_3|\left[\sum_{i=1}^{n} C_i\ \ |\mathbf{u}_i\rangle\right] = 0 & \Rightarrow & \sum_{i=1}^{n} C_i\ \delta_{3i} = 0 & \Rightarrow & C_3 = 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ \langle \mathbf{u}_n|\left[\sum_{i=1}^{n} C_i\ \ |\mathbf{u}_i\rangle\right] = 0 & \Rightarrow & \sum_{i=1}^{n} C_i\ \delta_{ni} = 0 & \Rightarrow & C_n = 0 \end{array} \right.$$

con lo cual es claro que $\{|\mathbf{u}_1\rangle\,,\ |\mathbf{u}_2\rangle\,,\ |\mathbf{u}_3\rangle\cdots,|\mathbf{u}_n\rangle\}$ son linealmente independientes. Si la dimensión de $\mathbf{V}$, es n, $\dim \mathbf{V} = \mathbf{n}$ y tenemos n vectores linealmente independientes, entonces esos n vectores $\{|\mathbf{u}_1\rangle\,,\ |\mathbf{u}_2\rangle\,,\ |\mathbf{u}_3\rangle\cdots,|\mathbf{u}_n\rangle\}$ forman una base ortogonal para $\mathbf{V}$,y por lo tanto las componentes de un vector en esa base se pueden expresar de manera simple.

$$\forall\ \ |\mathbf{x}\rangle \in \mathbf{V} \qquad |\mathbf{x}\rangle = \sum_{i=1}^{n} C_i\ \ |\mathbf{u}_i\rangle \qquad \Rightarrow \langle \mathbf{u}_j\ |\mathbf{x}\rangle = \langle \mathbf{u}_j| \left[\sum_{i=1}^{n} C_i\ \ |\mathbf{u}_i\rangle\right] \qquad \Rightarrow C_j = \frac{\langle \mathbf{u}_j\ |\mathbf{x}\rangle}{\langle \mathbf{u}_j\ |\mathbf{u}_j\rangle}$$

En el caso de un conjunto ortonormal de vectores $\{|\mathbf{e}_1\rangle\,,\ |\mathbf{e}_2\rangle\,,\ |\mathbf{e}_3\rangle\cdots,|\mathbf{e}_n\rangle\} \in \mathbf{V}^n$ con $\left\||\mathbf{e}_j\rangle\right\|^2 = 1$, las componentes de cualquier vector quedan determinadas de una forma todavía más simple y con consecuencias mucho más impactantes

$$\left\||\mathbf{e}_j\rangle\right\|^2 = 1 \quad \Rightarrow C_j = \langle \mathbf{e}_j\ |\mathbf{x}\rangle \quad \Rightarrow |\mathbf{x}\rangle = \sum_{i=1}^{n} C_i\ \ |\mathbf{e}_i\rangle = \sum_{i=1}^{n}\ \langle \mathbf{e}_i\ |\mathbf{x}\rangle\ \ |\mathbf{e}_i\rangle \equiv \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n}\ |\mathbf{e}_i\rangle\langle \mathbf{e}_i|\right)}_{\mathbf{1}} |\mathbf{x}\rangle$$

por lo tanto es bueno recalcar la relación de cierre

$$\sum_{i=1}^{n}\ |\mathbf{e}_i\rangle\langle \mathbf{e}_i| = \mathbf{1}$$

con lo cual es trivial demostrar la fórmula de Parseval.

$$\forall\ \ |\mathbf{x}\rangle\ \ |\mathbf{y}\rangle \in \mathbf{V} \quad \langle \mathbf{y}\ |\mathbf{x}\rangle \equiv \langle \mathbf{y}| \left(\sum_{i=1}^{n}\ |\mathbf{e}_i\rangle\langle \mathbf{e}_i|\right)|\mathbf{x}\rangle = \sum_{i=1}^{n}\ \langle \mathbf{y}|\,|\mathbf{e}_i\rangle\langle \mathbf{e}_i|\,|\mathbf{x}\rangle = \sum_{i=1}^{n}\ \langle \mathbf{y}|\,|\mathbf{e}_i\rangle\langle \mathbf{x}|\,|\mathbf{e}_i\rangle^*$$

la cual se concreta para el caso de $|\mathbf{x}\rangle\ \equiv |\mathbf{y}\rangle$ en la generalización del Teorema de Pitágoras

$$\langle \mathbf{x}\ |\mathbf{x}\rangle \equiv \left\||\mathbf{x}\rangle\right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \left|\langle \mathbf{x}|\,|\mathbf{e}_i\rangle\right|^2$$

Ejemplos

- Funciones Trigonométricas: Uno de los ejemplos más emblemáticos es el caso de las funciones continuas, reales de variable real y definidas en $[0,2\pi]$, $\mathcal{C}^{\infty}_{[0,2\pi]}$, con lo cual el producto interno viene definido por $\langle \mathbf{f}|\ \mathbf{g}\rangle = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}x\ f(x)\ \ g(x)$ ésto es el conjunto de funciones $\{|\mathbf{u}_1\rangle\,,\ |\mathbf{u}_2\rangle\,,\ |\mathbf{u}_3\rangle\,,\cdots,|\mathbf{u}_n\rangle\cdots\}$ representadas por

$$|\mathbf{u}_0\rangle = 1, \qquad |\mathbf{u}_{2n-1}\rangle = \cos nx \qquad \text{y} \qquad |\mathbf{u}_{2n}\rangle = \operatorname{sen} nx, \qquad \text{con } n = 1,2,3,\cdots$$

Es claro que $\{|\mathbf{u}_1\rangle\,,\ |\mathbf{u}_2\rangle\,,\ |\mathbf{u}_3\rangle\cdots,|\mathbf{u}_n\rangle\,,\cdots\}$ es un conjunto de funciones ortogonales por cuanto

$$\langle\mathbf{u}_n\,|\mathbf{u}_m\rangle=\delta_{nm}\,\||\mathbf{u}_n\rangle\|^2\Rightarrow\left\{\begin{array}{lll} 0 \quad \text{si} \quad n\neq m & \left\{\begin{array}{l}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}x\ \ \operatorname{sen} nx\operatorname{sen} mx=0\\ \int_0^{2\pi}\mathrm{d}x\ \ \cos nx\operatorname{sen} mx=0\\ \int_0^{2\pi}\mathrm{d}x\ \ \cos nx\cos mx=0\end{array}\right. \\ \\ \||\mathbf{u}_n\rangle\|^2 \quad \text{si} \quad n=m & \left\{\begin{array}{lll}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}x\ \ =2\pi & \text{si} & n=m=0\\ \\ \int_0^{2\pi}\mathrm{d}x\ \ \cos^2 nx=\pi & \text{si} & i=j=2l-1\\ \\ \int_0^{2\pi}\mathrm{d}x\ \ \operatorname{sen}^2 nx=\pi & \text{si} & i=j=2l\end{array}\right.\end{array}\right.$$

con $l=1,2,3,\cdots$ también. Por lo tanto, podremos construir una base ortonormal de funciones $\{|\mathbf{e}_1\rangle\,,\ |\mathbf{e}_2\rangle\,,\ |\mathbf{e}_3\rangle\,,\cdots,|\mathbf{e}_n\rangle\,,\cdots\}$ de la forma

$$|\mathbf{e}_0\rangle=\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\qquad |\mathbf{e}_{2n-1}\rangle=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx\qquad \text{y}\qquad |\mathbf{e}_{2n}\rangle=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\operatorname{sen} nx.$$

Por lo tanto cualquier función definida en el intervalo $[0,2\pi]$ puede expresarse en términos de esta base como

$$|\mathbf{f}\rangle=\sum_{i=1}^{\infty}C_i\ \ |\mathbf{e}_i\rangle\qquad\Rightarrow C_i=\langle\mathbf{e}_i\,|\mathbf{f}\rangle=\left\{\begin{array}{lll}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}x\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ f(x)=a_0 & \text{si} & i=0\\ \\ \int_0^{2\pi}\mathrm{d}x\ \ f(x)\ \ \cos nx\ \ =a_{2n-1} & \text{si} & i=2n-1\\ \\ \int_0^{2\pi}\mathrm{d}x\ \ f(x)\ \ \operatorname{sen} nx=a_{2n} & \text{si} & i=2n\end{array}\right.$$

donde los C_i son los coeficientes de Fourier

- Otro de los ejemplos típicos lo constituye los llamados polinomios de Legendre. Polinomios $P_n(x)$ definidos en el intervalo $[-1,1]$ y generados a partir de la Fórmula de Rodrigues[7]

$$P_n(x)=\frac{1}{n!2^n}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n,\qquad n=0,1,2,.....$$

con $P_0(x)=1$. Los polinomios de Legendre son solución de la ecuación diferencial

$$(1-x^2)\ y''-2x\ y'+\lambda(\lambda+1)\ y=0$$

λ	Ecuación de Legendre	Solución
0	$(1-x^2)\ y''-2x\ y'=0$	$y_0(x)=1$
1	$(1-x^2)\ y''-2x\ y'+2\ y=0$	$y_1(x)=x$
2	$(1-x^2)\ y''-2x\ y'+6\ y=0$	$y_0(x)=1-3x^2$
3	$(1-x^2)\ y''-2x\ y'+12\ y=0$	$y_1(x)=x-\frac{5}{3}x^3$
4	$(1-x^2)\ y''-2x\ y'+20\ y=0$	$y_0(x)=1-10x^2+\frac{35}{3}x^4$

Es fácil comprobar que los polinomios de Legendre $|\mathbf{P}_\alpha\rangle=P_\alpha(x)$ son mutuamente ortogonales con un

[7] **Benjamin Olinde Rodrigues** (1794 Burdeos, Francia - 1851, París Francia) Banquero, Matemático y activista político solcialista Francés durante la Revolución Francesa. De origen judío, y cuyas contribuciones fundamentales como la fórmula para la generación de Polinomios de Legendre, permanecieron olvidadas por mucho tiempo.
Más detalles `http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Mathematicians`

producto interno definido como

$$\langle \mathbf{P}_n | \mathbf{P}_m \rangle = \int_{-1}^{1} P_n(x) P_m(x) \mathrm{d}x = \frac{2}{2n+1} \delta_{nm}$$

con norma definida por

$$\|\mathbf{P}_n\|^2 = \langle \mathbf{P}_n | \mathbf{P}_n \rangle = \int_{-1}^{1} P_n^2(x) \mathrm{d}x \doteq \frac{2}{2n+1}$$

Cualquier función en el intervalo $[-1, 1]$ puede ser expresada en esa base.

$$f(x) = |\mathbf{F}\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \ |\mathbf{P}_k\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\langle \mathbf{P}_k | \mathbf{F} \rangle}{\langle \mathbf{P}_k | \mathbf{P}_k \rangle} \ |\mathbf{P}_k\rangle$$

Varios ejemplos ilustrarán esta aplicación. Si $f(x)$ es un polinomio

$$f(x) = \sum_{n=0}^{m} b_n x^n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \ |\mathbf{P}_k\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x)$$

no se requiere hacer ninguna integral por cuanto los coeficientes a_n se determinan a través de un sistema de ecuaciones algebraicas. Para el caso de $f(x) = x^2$ tendremos

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^2 = a_0 P_0(x) + a_1 P_1(x) + a_2 P_2(x) \\
f(x) &= x^2 = a_0 + a_1 x + \frac{1}{2} a_2 (3x^2 - 1) \\
f(x) &= x^2 = \frac{1}{3} P_0(x) + \frac{2}{3} P_2(x)
\end{aligned}$$

Quedará como ejercicio demostrar que para el caso de

$$f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\langle \mathbf{P}_k | \mathbf{F} \rangle}{\langle \mathbf{P}_k | \mathbf{P}_k \rangle} \ |\mathbf{P}_k\rangle = \frac{2}{3} P_0(x) - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_n(x)}{(2n-1)(2n+3)}$$

con

$$\langle \mathbf{P}_k | \mathbf{F} \rangle = \int_{-1}^{1} f(x) P_k(x) \mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1-x}{2}} P_k(x) \mathrm{d}x$$

2.5.5. Ortogonalización

Hemos visto que un conjunto de vectores ortogonales forman base para un espacio vectorial. Ahora bien, siempre es posible construir un conjunto de vectores ortogonales a partir de un conjunto de vectores linealmente independientes. Es método de "ortogonalización" se conoce como el método de Gram-Schmidt[8], en honor de estos dos matemáticos alemanes que NO inventaron el método, el cual al parecer se le debe al matemático francés P.S. Laplace.

Dado un conjunto de vectores linealmente independientes, $\{|\mathbf{v}_1\rangle, |\mathbf{v}_2\rangle, |\mathbf{v}_3\rangle, \cdots, |\mathbf{v}_n\rangle\}$ que expanden un espacio Euclidiano de dimensión finita, E^n. Entonces siempre se puede construir un conjunto ortogonal de vectores, $\{|\mathbf{u}_1\rangle, |\mathbf{u}_2\rangle, |\mathbf{u}_3\rangle, \cdots, |\mathbf{u}_n\rangle\}$ que también expandan E^n de la siguiente forma:

[8]**Erhard Schmidt** (1876, Estonia-1959 Alemania). MatemáticoAlemán fundador del primer instituto de matemáticas aplicadas de Berlín. Alumno de Hilbert, Schmidt hizo sus mayores contribuciones en Ecuaciones Integrales y Teoría de Funciones en el Espacio de Hilbert.
Más detalles http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Mathematicians

$$
\begin{array}{lcl}
|\mathbf{u}_1\rangle \equiv |\mathbf{v}_1\rangle & & \\
|\mathbf{u}_2\rangle \equiv |\mathbf{v}_2\rangle - \frac{\langle \mathbf{v}_2 |\mathbf{u}_1\rangle}{\langle \mathbf{u}_1 |\mathbf{u}_1\rangle} |\mathbf{u}_1\rangle & \ni & \langle \mathbf{u}_2 |\mathbf{u}_1\rangle = 0 \\
|\mathbf{u}_3\rangle \equiv |\mathbf{v}_3\rangle - \frac{\langle \mathbf{v}_3 |\mathbf{u}_2\rangle}{\langle \mathbf{u}_2 |\mathbf{u}_2\rangle} |\mathbf{u}_2\rangle - \frac{\langle \mathbf{v}_3 |\mathbf{u}_1\rangle}{\langle \mathbf{u}_1 |\mathbf{u}_1\rangle} |\mathbf{u}_1\rangle & \ni & \left\{ \begin{array}{l} \langle \mathbf{u}_3 |\mathbf{u}_1\rangle = 0 \\ \langle \mathbf{u}_3 |\mathbf{u}_2\rangle = 0 \end{array} \right. \\
|\mathbf{u}_4\rangle \equiv |\mathbf{v}_4\rangle - \frac{\langle \mathbf{v}_4 |\mathbf{u}_3\rangle}{\langle \mathbf{u}_3 |\mathbf{u}_3\rangle} |\mathbf{u}_3\rangle - \frac{\langle \mathbf{v}_4 |\mathbf{u}_2\rangle}{\langle \mathbf{u}_2 |\mathbf{u}_2\rangle} |\mathbf{u}_2\rangle - \frac{\langle \mathbf{v}_4 |\mathbf{u}_1\rangle}{\langle \mathbf{u}_1 |\mathbf{u}_1\rangle} |\mathbf{u}_1\rangle & \ni & \left\{ \begin{array}{l} \langle \mathbf{u}_4 |\mathbf{u}_1\rangle = 0 \\ \langle \mathbf{u}_4 |\mathbf{u}_2\rangle = 0 \\ \langle \mathbf{u}_4 |\mathbf{u}_3\rangle = 0 \end{array} \right. \\
\vdots & \vdots & \\
|\mathbf{u}_n\rangle \equiv |\mathbf{v}_n\rangle - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\langle \mathbf{v}_n |\mathbf{u}_i\rangle}{\langle \mathbf{u}_i |\mathbf{u}_i\rangle} |\mathbf{u}_i\rangle & \ni & \left\{ \begin{array}{c} \langle \mathbf{u}_4 |\mathbf{u}_1\rangle = 0 \\ \langle \mathbf{u}_4 |\mathbf{u}_2\rangle = 0 \\ \langle \mathbf{u}_4 |\mathbf{u}_3\rangle = 0 \\ \vdots \\ \langle \mathbf{u}_4 |\mathbf{u}_{n-1}\rangle = 0 \end{array} \right.
\end{array}
$$

Así siempre es posible construir una base ortonormal a partir de un conjunto de vectores linealmente independientes. Esta base ortogonal será única en E^n, si existe otra sus vectores serán proporcionales, Más aún, cada espacio vectorial $\mathbf{V}^n$ de dimensión finita tendrá una base ortogonal asociada.

Ejemplos

- El subespacio de $\mathbf{V}^4$ expandido por los siguientes vectores

$$
|\mathbf{v}_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad |\mathbf{v}_2\rangle = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad |\mathbf{v}_3\rangle = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.
$$

Tendrá una base ortogonal asociada dada por

$$|\mathbf{u}_1\rangle \equiv |\mathbf{v}_3\rangle = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$|\mathbf{u}_2\rangle \equiv |\mathbf{v}_2\rangle - \frac{\langle \mathbf{v}_2 \, |\mathbf{u}_1\rangle}{\langle \mathbf{u}_1 \, |\mathbf{u}_1\rangle} |\mathbf{u}_1\rangle = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - (-1) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$|\mathbf{u}_3\rangle \equiv |\mathbf{v}_1\rangle - \frac{\langle \mathbf{v}_1 \, |\mathbf{u}_2\rangle}{\langle \mathbf{u}_2 \, |\mathbf{u}_2\rangle} |\mathbf{u}_2\rangle - \frac{\langle \mathbf{v}_1 \, |\mathbf{u}_1\rangle}{\langle \mathbf{u}_1 \, |\mathbf{u}_1\rangle} |\mathbf{u}_1\rangle =$$

$$|\mathbf{u}_3\rangle \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} - \left(\frac{9}{12}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - (1) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} \\ \frac{5}{4} \\ -\frac{7}{4} \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix};$$

y la base ortonormal asociada será

$$|\mathbf{e}_1\rangle = \frac{|\mathbf{u}_1\rangle}{\sqrt{\langle \mathbf{u}_1 \, |\mathbf{u}_1\rangle}} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.; \quad |\mathbf{e}_2\rangle = \frac{|\mathbf{u}_2\rangle}{\sqrt{\langle \mathbf{u}_2 \, |\mathbf{u}_2\rangle}} = \left(\frac{\sqrt{12}}{12}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix};$$

$$|\mathbf{e}_3\rangle = \frac{|\mathbf{u}_3\rangle}{\langle \mathbf{u}_3 \, |\mathbf{u}_3\rangle} = \left(\frac{2\sqrt{3}}{9}\right) \begin{pmatrix} \frac{5}{4} \\ \frac{5}{4} \\ -\frac{7}{4} \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

- Para el caso de $\mathbb{R}^2$ es muy claro. Si tenemos dos vectores $|\mathbf{v}_1\rangle$ y $|\mathbf{v}_2\rangle$ linealmente independientes,

  $$|\mathbf{v}_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad |\mathbf{v}_2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

  elegimos $|\mathbf{u}_1\rangle \equiv |\mathbf{v}_2\rangle$ entonces, $|\mathbf{u}_2\rangle$ vendrá dado por

  $$|\mathbf{u}_2\rangle \equiv |\mathbf{v}_1\rangle - \frac{\langle \mathbf{v}_1 \, |\mathbf{u}_1\rangle}{\langle \mathbf{u}_1 \, |\mathbf{u}_1\rangle} |\mathbf{u}_1\rangle \quad \Rightarrow |\mathbf{u}_2\rangle \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

  tal y como se esperaba, el otro vector ortogonal es el canónico.

- Si consideramos el espacio de polinomios, $\mathcal{P}^n$, de grado $g \leq n$ definidos en el intervalo $[-1,1]$ Este espacio vectorial tendrá como una de las posibles bases al conjunto $\left\{1, t, t^2, t^3, \cdots, t^n\right\}$ con el producto interno viene definido por $\langle \mathbf{f} | \, \mathbf{g} \rangle = \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x \; f(x) \;\; g(x)$. Por lo tanto, se procede a construir una base ortogonal de la forma
  $|\mathbf{u}_0\rangle \equiv |\mathbf{v}_0\rangle = 1$

$$|\mathbf{u}_1\rangle \equiv |\mathbf{v}_1\rangle - \frac{\langle \mathbf{v}_1 \, |\mathbf{u}_0\rangle}{\langle \mathbf{u}_0 \, |\mathbf{u}_0\rangle} |\mathbf{u}_0\rangle = t$$

$\langle \mathbf{v}_1 \, |\mathbf{u}_0\rangle = \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x \; t = 0; \qquad \langle \mathbf{u}_0 \, |\mathbf{u}_0\rangle = \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x = 2$

$$|\mathbf{u}_2\rangle \equiv |\mathbf{v}_2\rangle - \frac{\langle \mathbf{v}_2 \, |\mathbf{u}_1\rangle}{\langle \mathbf{u}_1 \, |\mathbf{u}_1\rangle} |\mathbf{u}_1\rangle - \frac{\langle \mathbf{v}_2 \, |\mathbf{u}_0\rangle}{\langle \mathbf{u}_0 \, |\mathbf{u}_0\rangle} |\mathbf{u}_0\rangle = t^2 - \tfrac{1}{3}$$

$\langle \mathbf{v}_2 \, |\mathbf{u}_0\rangle = \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x \; t^2 = \frac{2}{3}; \qquad \langle \mathbf{v}_2 \, |\mathbf{u}_1\rangle = \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x \; t^3 = 0;$

$\langle \mathbf{u}_1 \, |\mathbf{u}_1\rangle = \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x \; t^2 = \frac{2}{3}$

$$|\mathbf{u}_3\rangle \equiv |\mathbf{v}_3\rangle - \frac{\langle \mathbf{v}_3 \, |\mathbf{u}_2\rangle}{\langle \mathbf{u}_2 \, |\mathbf{u}_2\rangle} |\mathbf{u}_2\rangle - \frac{\langle \mathbf{v}_3 \, |\mathbf{u}_1\rangle}{\langle \mathbf{u}_1 \, |\mathbf{u}_1\rangle} |\mathbf{u}_1\rangle - \frac{\langle \mathbf{v}_3 \, |\mathbf{u}_0\rangle}{\langle \mathbf{u}_0 \, |\mathbf{u}_0\rangle} |\mathbf{u}_0\rangle = t^3 - \tfrac{3}{5}t$$

$\langle \mathbf{v}_3 \, |\mathbf{u}_0\rangle = \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x \; t^3 = 0; \qquad \langle \mathbf{v}_3 \, |\mathbf{u}_1\rangle = \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x \; t^4 = \frac{2}{5}$

$\langle \mathbf{v}_3 \, |\mathbf{u}_2\rangle = \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x \; t^3 \left(t^2 - \frac{1}{3}\right) = 0; \qquad \langle \mathbf{u}_2 \, |\mathbf{u}_2\rangle = \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x \; \left(t^2 - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{45}$

$\vdots$

Podemos resumir

$\lvert\mathbf{v}_1\rangle$	$\lvert\mathbf{u}_1\rangle$	$\lvert\mathbf{e}_1\rangle$
1	1	$\sqrt{\frac{1}{2}}$
t	t	$\sqrt{\frac{3}{2}}t$
t^2	$\left(t^2 - \frac{1}{3}\right)$	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}\left(3t^2 - 1\right)$
t^3	$\left(t^3 - \frac{3}{5}t\right)$	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}}\left(5t^3 - 3t\right)$
t^4	$\left(t^4 - \frac{6}{7}t^2 + \frac{3}{35}\right)$	$\frac{1}{8}\sqrt{\frac{9}{2}}\left(35t^4 - 30t^2 + 3\right)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

2.5.6. Complementos Ortogonales.

Sea un subespacio $\mathbf{S} \subset \mathbf{V}$ un elemento $|\bar{\mathbf{v}}_i\rangle \in \mathbf{V}$ se dice ortogonal a $\mathbf{S}$ si $\langle \mathbf{s}_k \, |\bar{\mathbf{v}}_i\rangle = 0 \quad \forall \; |\mathbf{s}_k\rangle \in \mathbf{S}$, $|\bar{\mathbf{v}}_i\rangle$ es decir, es ortogonal a todos los elementos de $\mathbf{S}$. El conjunto $\{|\bar{\mathbf{v}}_1\rangle, \; |\bar{\mathbf{v}}_2\rangle, \; |\bar{\mathbf{v}}_3\rangle, \cdots, |\bar{\mathbf{v}}_m\rangle\}$ de todos los elementos ortogonales a $\mathbf{S}$,se denomina $S-$perpendicular y se denota como $\mathbf{S}^{\perp}$. Es fácil demostrar que $\mathbf{S}^{\perp}$ es un subespacio, aún si $\mathbf{S}$ no lo es.

2.5.7. Descomposición ortogonal

Dado $\{|\mathbf{v}_1\rangle, |\mathbf{v}_2\rangle, |\mathbf{v}_3\rangle, \cdots, |\mathbf{v}_n\rangle, \cdots\}$ un Espacio Euclidiano $\mathbf{V}$ y un subespacio de $\mathbf{V}$ con dimensión finita, $\mathbf{S} \subset \mathbf{V}$ y $\dim \mathbf{V} = \mathbf{m}$. Entonces $\forall \ |\mathbf{v}_k\rangle \in \mathbf{V}$ se puede expresar como suma de dos vectores $|\mathbf{s}_k\rangle \in \mathbf{S} \quad \wedge \quad |\mathbf{s}_k\rangle^{\perp} \in \mathbf{S}^{\perp}$. Esto es

$$|\mathbf{v}_k\rangle = |\mathbf{s}_k\rangle + |\mathbf{s}_k\rangle^{\perp} \qquad |\mathbf{s}_k\rangle \in \mathbf{S} \quad \wedge \quad |\mathbf{s}_k\rangle^{\perp} \in \mathbf{S}^{\perp}$$

Más aún, la norma de $|\mathbf{v}_k\rangle$ se calcula a través del teorema de Pitágoras generalizado

$$\||\mathbf{v}_k\rangle\|^2 = \||\mathbf{s}_k\rangle\|^2 + \left\||\mathbf{s}_k\rangle^{\perp}\right\|^2$$

La demostración es sencilla. Primero se prueba que la descomposición ortogonal $|\mathbf{v}_k\rangle = |\mathbf{s}_k\rangle + |\mathbf{s}_k\rangle^{\perp}$ es siempre posible. Para ello recordamos que $\mathbf{S} \subset \mathbf{V}$ es de dimensión finita, por lo tanto existe una base ortonormal $\{|\mathbf{e}_1\rangle, |\mathbf{e}_2\rangle, |\mathbf{e}_3\rangle \cdots |\mathbf{e}_m\rangle\}$ para $\mathbf{S}$. Esto es, dado un $|\mathbf{v}_k\rangle$ definimos los elementos $|\mathbf{s}_k\rangle$ y $|\mathbf{s}_k\rangle^{\perp}$ como siguen

$$|\mathbf{s}_k\rangle = \sum_{i=1}^{m} \langle \mathbf{v}_k | \mathbf{e}_i\rangle |\mathbf{e}_i\rangle \quad \wedge \quad |\mathbf{s}_k\rangle^{\perp} = |\mathbf{v}_k\rangle - |\mathbf{s}_k\rangle$$

Nótese que $\langle \mathbf{v}_k | \mathbf{e}_i\rangle |\mathbf{e}_i\rangle$ es la proyección de $|\mathbf{v}_k\rangle$ a lo largo de $|\mathbf{e}_i\rangle$ y $|\mathbf{s}_k\rangle$ se expresa combinación lineal de la base de $\mathbf{S}$. Por lo tanto está en $\mathbf{S}$. Por otro lado,

$$^{\perp}\langle \mathbf{s}_k | \mathbf{e}_i\rangle = \langle \mathbf{v}_k - \mathbf{s}_k | \mathbf{e}_i\rangle = \langle \mathbf{v}_k | \mathbf{e}_i\rangle - \langle \mathbf{s}_k | \mathbf{e}_i\rangle = \langle \mathbf{v}_k | \mathbf{e}_i\rangle - \left[\sum_{j=1}^{m} \langle \mathbf{v}_k | \mathbf{e}_j\rangle \langle \mathbf{e}_j\right] |\mathbf{e}_i\rangle = 0 \Rightarrow |\mathbf{s}_k\rangle^{\perp} \ \perp \ |\mathbf{e}_j\rangle$$

lo cual indica que $|\mathbf{s}_k\rangle^{\perp} \ \in \mathbf{S}^{\perp}$.

Pero, podemos ir un poco más allá. La descomposición $|\mathbf{v}_k\rangle = |\mathbf{s}_k\rangle + |\mathbf{s}_k\rangle^{\perp}$ es única en $\mathbf{V}$. Para ello suponemos que existen dos posibles descomposiciones, vale decir

$$|\mathbf{v}_k\rangle = |\mathbf{s}_k\rangle + |\mathbf{s}_k\rangle^{\perp} \quad \wedge \quad |\mathbf{v}_k\rangle = |\mathbf{t}_k\rangle + |\mathbf{t}_k\rangle^{\perp} \qquad \text{con } |\mathbf{s}_k\rangle \wedge |\mathbf{t}_k\rangle \in \mathbf{S} \quad \wedge \quad |\mathbf{s}_k\rangle^{\perp} \wedge |\mathbf{t}_k\rangle^{\perp} \in \mathbf{S}^{\perp}$$

Por lo tanto

$$|\mathbf{v}_k\rangle - |\mathbf{v}_k\rangle = \left(|\mathbf{s}_k\rangle + |\mathbf{s}_k\rangle^{\perp}\right) - \left(|\mathbf{t}_k\rangle + |\mathbf{t}_k\rangle^{\perp}\right) = 0 \qquad \Rightarrow |\mathbf{s}_k\rangle - |\mathbf{t}_k\rangle = |\mathbf{t}_k\rangle^{\perp} - |\mathbf{s}_k\rangle^{\perp}$$

Pero $|\mathbf{s}_k\rangle - |\mathbf{t}_k\rangle \in \mathbf{S}$,por lo tanto ortogonal a todos los elementos de $\mathbf{S}^{\perp}$ y $|\mathbf{s}_k\rangle - |\mathbf{t}_k\rangle = |\mathbf{t}_k\rangle^{\perp} - |\mathbf{s}_k\rangle^{\perp}$ con lo cual $|\mathbf{s}_k\rangle - |\mathbf{t}_k\rangle \equiv |\mathbf{0}\rangle$ que es el único elemento que es ortogonal a el mismo y en consecuencia la descomposición $|\mathbf{v}_k\rangle = |\mathbf{s}_k\rangle + |\mathbf{s}_k\rangle^{\perp}$ es única. Finalmente, con la definición de norma

$$\||\mathbf{v}_k\rangle\|^2 = \left\||\mathbf{s}_k\rangle + |\mathbf{s}_k\rangle^{\perp}\right\|^2 = \left(\langle \mathbf{s}_k| + \langle \mathbf{s}_k|^{\perp}\right)\left(|\mathbf{s}_k\rangle + |\mathbf{s}_k\rangle^{\perp}\right) = \langle \mathbf{s}_k | \mathbf{s}_k\rangle +^{\perp} \langle \mathbf{s}_k | \mathbf{s}_k\rangle^{\perp} \||\mathbf{s}_k\rangle\|^2 + \left\||\mathbf{s}_k\rangle^{\perp}\right\|^2$$

Así, dado $\mathbf{S}^m$ un subespacio de $\mathbf{V}$ de dimensión finita y dado un $|\mathbf{v}_k\rangle \in \mathbf{V}$ el elemento

$$|\mathbf{s}_k\rangle \in \mathbf{S} \qquad \ni \quad |\mathbf{s}_k\rangle = \sum_{i=1}^{m} \langle \mathbf{v}_k | \mathbf{e}_i\rangle |\mathbf{e}_i\rangle$$

será la proyección de $|\mathbf{v}_k\rangle$ en $\mathbf{S}$.

Dado un vector $|\mathbf{x}\rangle \in \mathbf{V}$ y un subespacio de $\mathbf{V}$ con dimensión finita, $\mathbf{S}^m \subset \mathbf{V}$ y $\dim \mathbf{V} = \mathbf{m}$, entonces la distancia de $|\mathbf{x}\rangle$ a $\mathbf{S}^m$ es la norma de la componente de $|\mathbf{x}\rangle$, perpendicular a $\mathbf{S}^m$.

2.6. Temas Avanzados

2.6.1. Aproximación de Funciones

Sea $\{|\mathbf{v}_1\rangle, |\mathbf{v}_2\rangle, |\mathbf{v}_3\rangle, \cdots, |\mathbf{v}_n\rangle, \cdots\}$ un Espacio Euclidiano $\mathbf{V}$ y un subespacio de $\mathbf{V}$ con dimensión finita, $\mathbf{S}^m \subset \mathbf{V}$ y $\dim \mathbf{V} = \mathbf{m}$,y sea un elemento $|\mathbf{v}_i\rangle \in \mathbf{V}$. La proyección de $|\mathbf{v}_i\rangle$ en $\mathbf{S}^m$, $|\mathbf{s}_i\rangle$, será el elemento de $\mathbf{S}^m$ más próximo a $|\mathbf{v}_k\rangle$. En otras palabras

$$\| |\mathbf{v}_i\rangle - |\mathbf{s}_i\rangle \| \leq \| |\mathbf{v}_i\rangle - |\mathbf{t}_i\rangle \| \qquad \forall \ |\mathbf{t}_i\rangle \in \mathbf{S}$$

La demostración se sigue así

$$|\mathbf{v}_i\rangle - |\mathbf{t}_i\rangle = (|\mathbf{v}_i\rangle - |\mathbf{s}_i\rangle) - (|\mathbf{s}_i\rangle - |\mathbf{t}_i\rangle) \qquad \Rightarrow \qquad \| |\mathbf{v}_i\rangle - |\mathbf{t}_i\rangle \|^2 = \| |\mathbf{v}_i\rangle - |\mathbf{s}_i\rangle \|^2 + \| |\mathbf{s}_i\rangle - |\mathbf{t}_i\rangle \|^2$$

ya que $|\mathbf{v}_i\rangle - |\mathbf{s}_i\rangle = |\mathbf{s}_k\rangle^{\perp} \in \mathbf{S}^{\perp} \quad \wedge \quad |\mathbf{s}_i\rangle - |\mathbf{t}_i\rangle \in \mathbf{S}$.y vale el teorema de Pitágoras generalizado Ahora bien, como

$$\| |\mathbf{s}_i\rangle - |\mathbf{t}_i\rangle \|^2 \geq 0 \qquad \Rightarrow \quad \| |\mathbf{v}_i\rangle - |\mathbf{t}_i\rangle \|^2 \geq \| |\mathbf{v}_i\rangle - |\mathbf{s}_i\rangle \|^2 \quad \Rightarrow \quad \| |\mathbf{v}_i\rangle - |\mathbf{t}_i\rangle \| \geq \| |\mathbf{v}_i\rangle - |\mathbf{s}_i\rangle \|$$

Ejemplos

- Desarrollemos la aproximación de funciones continuas, reales de variable real y definidas en $[0, 2\pi]$, $\mathcal{C}^{\infty}_{[0,2\pi]}$, mediante funciones Trigonométricas y con el producto interno definido por $\langle \mathbf{f} | \ \mathbf{g}\rangle = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}x \ f(x) \ g(x)$. Hemos visto que para este espacio vectorial tenemos una base ortonormal definida por

$$|\mathbf{e}_0\rangle = \varphi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \qquad |\mathbf{e}_{2n-1}\rangle = \varphi_{2n-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx \qquad \text{y}$$
$$|\mathbf{e}_{2n}\rangle = \varphi_{2n}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \operatorname{sen} nx.$$

Por lo tanto cualquier función definida en el intervalo $[0, 2\pi]$ puede expresarse en términos de esta base como

$$|\mathbf{f}\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} C_i \ |\mathbf{e}_i\rangle \qquad \text{con}$$

$$C_i = \langle \mathbf{e}_i \ |\mathbf{f}\rangle = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}x \ f(x) \ \varphi_i(x) = \begin{cases} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}x \ f(x) = a_0 & \text{si} \quad i = 0 \\ \int_0^{2\pi} \mathrm{d}x \ f(x) \cos nx \ = a_{2n-1} & \text{si} \quad i = 2n-1 \\ \int_0^{2\pi} \mathrm{d}x \ \operatorname{sen} nx \ f(x) = a_{2n} & \text{si} \quad i = 2n \end{cases}$$

donde los C_i son los coeficientes de Fourier. Es decir, cualquier función puede ser expresada como una serie de Fourier de la forma

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx)$$

con

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}x \ f(x) \cos kx \qquad \wedge \qquad b_k = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}x \ f(x) \operatorname{sen} kx \ f(x)$$

Es claro que para la aproximación de funciones por funciones Trigonométricas cuyos coeficientes son los coeficientes de Fourier constituyen la mejor aproximación. Por lo tanto, de todas las funciones $\mathcal{P}(x) \in \mathcal{C}^{\infty}_{[0,2\pi]}$ las funciones trigonométricas, $\mathcal{T}(x)$ minimizan la desviación cuadrática media

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{d}x \ \left(f(x) - \mathcal{P}(x)\right)^2 \geq \int_0^{2\pi} \mathrm{d}x \ \left(f(x) - \mathcal{T}(x)\right)^2$$

2.6.2. El Método de Mínimos Cuadrados

Una de las aplicaciones más importantes en la aproximación de funciones es el método de mínimos cuadrados. La idea es determinar el valor más aproximado de una cantidad física, C a partir de un conjunto de medidas experimentales: $\{x_1, x_2, x_3, \cdots x_n\}$. La intención es encontrar en el mejor valor de C a partir de ese conjunto de datos experimentales.

Para ello asociamos el conjunto de medidas $\{x_1, x_2, x_3, \cdots x_n\}$ con las componentes de un vector $|\mathbf{x}\rangle$ en $\mathbb{R}^n$. Así

$$|\mathbf{x}\rangle = (x_1, x_2, x_3, \cdots x_n) \quad \wedge \quad \mathrm{C}\,|\mathbf{y}\rangle = (\mathrm{C},\mathrm{C},\mathrm{C}, \cdots \mathrm{C})$$

Por lo tanto si la mejor aproximación de $\mathrm{C}|\mathbf{y}\rangle$,que llamaremos C'$|\mathbf{y}\rangle$,será la proyección perpendicular de $|\mathbf{x}\rangle$ (las medidas) sobre el subespacio generado por $|\mathbf{y}\rangle$. Esto es

$$\mathrm{C}' = \frac{\langle \mathbf{x}\ |\mathbf{y}\rangle}{\langle \mathbf{y}\ |\mathbf{y}\rangle} = \frac{x_1 + x_2 + x_3, \cdots + x_n}{n}$$

que no es otra cosa que el promedio aritmético de las medidas. Es claro que la proyección perpendicular de $|\mathbf{x}\rangle$ sobre $|\mathbf{y}\rangle$ hace mínimo la distancia entre el subespacio perpendicular generado por $|\mathbf{y}\rangle$ y el vector $|\mathbf{x}\rangle$ .Es decir hace mínimo el cuadrado de esa distancia

$$\left[d\left(|\mathbf{x}\rangle, \mathrm{C}'\,|\mathbf{y}\rangle\right)\right]^2 = \langle \mathbf{x}{-}\mathrm{C}'\mathbf{y}\ |\mathbf{x}{-}\mathrm{C}'\mathbf{y}\rangle = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mathrm{C}')^2$$

Es claro que este problema se puede generalizar si se desea medir dos (o n) cantidades. Para el caso de dos cantidades extendemos la dimensión del espacio. Por lo tanto, los resultados experimentales se acumularán en un vector de $2n$ dimensiones

$$|\mathbf{x}\rangle = (x_{11}, x_{12}, x_{13}, \cdots x_{1n}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, \cdots x_{2n})$$

mientras que los vectores que representan las cantidades más aproximadas serán

$$\mathrm{C}'_1\,|\mathbf{y}_1\rangle = \Bigg(\underbrace{\mathrm{C}'_1,\mathrm{C}'_1,\mathrm{C}'_1, \cdots \mathrm{C}'_1}_{n},\underbrace{0, 0, 0, \cdots 0}_{n}\Bigg) \quad \wedge \quad \mathrm{C}'_2\,|\mathbf{y}_2\rangle = (0, 0, 0, \cdots 0, \mathrm{C}'_2,\mathrm{C}'_2,\mathrm{C}'_2, \cdots \mathrm{C}'_2)$$

Ahora $\{|\mathbf{y}_1\rangle, |\mathbf{y}_2\rangle\}$ expanden un subespacio vectorial sobre el cual $|\mathbf{x}\rangle$ tiene como proyección ortogonal $\mathrm{C}'_1\,|\mathbf{y}_1\rangle + \mathrm{C}'_2\,|\mathbf{y}_2\rangle$ y consecuentemente $|\mathbf{x}{-}\mathrm{C}'_1\mathbf{y}_1{-}\mathrm{C}'_2\mathbf{y}_2\rangle$ será perpendicular a $\{|\mathbf{y}_1\rangle, |\mathbf{y}_2\rangle\}$, por lo tanto

$$\mathrm{C}'_1 = \frac{\langle \mathbf{x}\ |\mathbf{y}_1\rangle}{\langle \mathbf{y}_1\ |\mathbf{y}_1\rangle} = \frac{x_{11} + x_{12} + x_{13}, \cdots + x_{1n}}{n} \quad \wedge \quad \mathrm{C}'_2 = \frac{\langle \mathbf{x}\ |\mathbf{y}_2\rangle}{\langle \mathbf{y}_2\ |\mathbf{y}_2\rangle} = \frac{x_{21} + x_{22} + x_{23}, \cdots + x_{2n}}{n}$$

La consecuencia más conocida de esta aproximación de funciones es el "ajuste" de un conjunto de datos experimentales $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \cdots, (x_n, y_n)\}$ a la ecuación de una recta $y = \mathrm{C}x$. En este caso, el planteamiento del problema se reduce a encontrar el vector $\mathrm{C}'\,|\mathbf{x}\rangle$ en el subespacio $\mathbf{S}(|\mathbf{x}\rangle)$ esté lo más cercano posible al vector $|\mathbf{y}\rangle = \mathrm{C}\,|\mathbf{x}\rangle$. Por lo tanto $\left\| |\mathrm{C}'\mathbf{x} - \mathbf{y}\rangle \right\|^2$ será lo menor posible y $|\mathrm{C}'\mathbf{x} - \mathbf{y}\rangle$ ser[perpendicular a $\mathbf{S}(|\mathbf{x}\rangle)$,por lo tanto

$$\langle \mathbf{x}\ |\mathrm{C}'\mathbf{x} - \mathbf{y}\rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{C}' = \frac{\langle \mathbf{x}\ |\mathbf{y}\rangle}{\langle \mathbf{x}\ |\mathbf{x}\rangle} = \frac{x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 \cdots + x_ny_n}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2, \cdots + x_n^2}$$

Ejemplo Si el conjunto de datos experimentales es $\{(1,2),(3,2),(4,5),(6,6)\}$ ¿ cuál es la recta que ajusta más acertadamente a estos puntos ? La ecuación queda como

$$|\mathbf{y}\rangle = \mathrm{C}\,|\mathbf{x}\rangle \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \mathrm{C} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \mathrm{C}' = \frac{\langle \mathbf{x}\,|\mathbf{y}\rangle}{\langle \mathbf{x}\,|\mathbf{x}\rangle} = \frac{2+6+20+36}{1+9+16+36} = \frac{32}{31}$$

Ahora bien, se puede generalizar esta procedimiento cuando se tiene que una cantidad y que es una combinación lineal desconocida de un conjunto de cantidades

$$y = \mathrm{C}_1 x_1 + \mathrm{C}_2 x_2 + \mathrm{C}_3 x_3 + \cdots + \mathrm{C}_m x_m$$

En este caso se ejecutarán n experimentos con $n > m$ y el conjunto de medidas experimentales serán

$$(y_1, x_{11}, x_{12}, x_{13}, \cdots x_{1m}; y_2, x_{21}, x_{22}, x_{23}, \cdots x_{2m}; y_3, x_{31}, x_{32}, x_{33}, \cdots x_{3m}; \cdots y_n, x_{n1}, x_{n2}, x_{n3}, \cdots x_{nm})$$

y a partir de ellas generamos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} y_1 &= \mathrm{C}'_1 x_{11} + \mathrm{C}'_2 x_{12} + \mathrm{C}'_3 x_{13}, \cdots + \mathrm{C}'_m x_{1m} \\ y_2 &= \mathrm{C}'_1 x_{21} + \mathrm{C}'_2 x_{22} + \mathrm{C}'_3 x_{23}, \cdots + \mathrm{C}'_m x_{2m} \\ y_3 &= \mathrm{C}'_1 x_{31} + \mathrm{C}'_2 x_{32} + \mathrm{C}'_3 x_{43}, \cdots + \mathrm{C}'_m x_{4m} \\ &\vdots \\ y_n &= \mathrm{C}'_1 x_{n1} + \mathrm{C}'_2 x_{n2} + \mathrm{C}'_3 x_{n3}, \cdots + \mathrm{C}'_m x_{nm} \end{aligned}$$

en el cual las incógnitas $\{\mathrm{C}'_1, \mathrm{C}'_2, \mathrm{C}'_3, \cdots \mathrm{C}'_m\}$ hacen que el lado derecho de las ecuaciones antes mencionadas sean los más próximas a las $\{y_1, y_2, y_3, \cdots y_n\}$ por lo tanto si consideramos los vectores

$$|\mathbf{x}_1\rangle = (x_{11}, \cdots x_{1n})\,; |\mathbf{x}_2\rangle = (x_{21}, \cdots x_{2n})\,; \cdots |\mathbf{x}_m\rangle = (x_{m1}, \cdots x_{mn})\,; |\mathbf{y}\rangle = (y_{m1}, \cdots y_n)$$

por lo tanto los $\{|\mathbf{x}_1\rangle, |\mathbf{x}_2\rangle, \cdots |\mathbf{x}_m\rangle\}$ expanden el subespacio $\mathbf{S}(|\mathbf{x}_1\rangle, |\mathbf{x}_2\rangle, \cdots |\mathbf{x}_m\rangle)$ donde está la aproximación de $|\mathbf{y}\rangle$. Por lo tanto la distancia de este subespacio al vector $|\mathbf{y}\rangle$, será mínimo. Esto es

$$[d(\mathbf{S}(\mathrm{C}'_i\,|\mathbf{x}_i\rangle), |\mathbf{y}\rangle)]^2 = \langle \mathbf{S}(\mathrm{C}'_i\,|\mathbf{x}_i\rangle) - \mathbf{y}\ |\mathbf{S}(\mathrm{C}'_i\,|\mathbf{x}_i\rangle) - \mathbf{y}\rangle$$

y por lo tanto $|\mathbf{S}(\mathrm{C}'_i\,|\mathbf{x}\rangle) - \mathbf{y}\rangle$ será ortogonal a

$$\langle \mathbf{x}_j\ |\mathbf{S}(\mathrm{C}'_i\,|\mathbf{x}\rangle) - \mathbf{y}\rangle \equiv \left\langle \mathbf{x}_i\ \middle| \sum_{i=1}^{m} \mathrm{C}'_i\,|\mathbf{x}\rangle - \mathbf{y} \right\rangle = 0 \quad \forall \quad i,j = 1,2,3,\cdots m$$

por lo tanto podemos construir el sistema de ecuaciones normales para la aproximación que hemos considerado:

$$\begin{array}{ll} \mathrm{C}'_1\ \langle \mathbf{x}_1\,|\mathbf{x}_1\rangle + \mathrm{C}'_2\ \langle \mathbf{x}_1\,|\mathbf{x}_2\rangle + \mathrm{C}'_3\ \langle \mathbf{x}_1\,|\mathbf{x}_3\rangle + \cdots + \mathrm{C}'_m\ \langle \mathbf{x}_1\,|\mathbf{x}_m\rangle & = \langle \mathbf{x}_1\,|\mathbf{y}\rangle \\ \mathrm{C}'_1\ \langle \mathbf{x}_2\,|\mathbf{x}_1\rangle + \mathrm{C}'_2\ \langle \mathbf{x}_2\,|\mathbf{x}_2\rangle + \mathrm{C}'_3\ \langle \mathbf{x}_2\,|\mathbf{x}_3\rangle + \cdots + \mathrm{C}'_m\ \langle \mathbf{x}_2\,|\mathbf{x}_m\rangle & = \langle \mathbf{x}_2\,|\mathbf{y}\rangle \\ \vdots & \vdots \\ \mathrm{C}'_1\ \langle \mathbf{x}_m\,|\mathbf{x}_1\rangle + \mathrm{C}'_2\ \langle \mathbf{x}_m\,|\mathbf{x}_2\rangle + \mathrm{C}'_3\ \langle \mathbf{x}_n\,|\mathbf{x}_3\rangle + \cdots + \mathrm{C}'_m\ \langle \mathbf{x}_m\,|\mathbf{x}_m\rangle & = \langle \mathbf{x}_n\,|\mathbf{y}\rangle \end{array}$$

donde, tal y como se ha señalado, las incógnitas son las $\{\mathrm{C}'_1, \mathrm{C}'_2, \mathrm{C}'_3, \cdots \mathrm{C}'_m\}$

Ejemplos

- Se sospecha que una determinada propiedad de un material cumple con la ecuación $y = ax_1 + bx_2$. Si al realizar un conjunto de medidas experimentales obtenemos

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ x_{11} \\ x_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} y_2 \\ x_{21} \\ x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} y_3 \\ x_{31} \\ x_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} y_4 \\ x_{41} \\ x_{42} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

  Es claro que tenemos un subespacio de $m = 2$ dimensiones y hemos hecho $n = 4$ veces el experimento. Por lo tanto los vectores considerados arriba serán

$$|\mathbf{x}_1\rangle = (1,2,1,1); \quad |\mathbf{x}_2\rangle = (2,1,1,-1); \quad |\mathbf{y}\rangle = (15,12,10,0)$$

  por lo tanto

$$\left.\begin{array}{lll} 7a & +4b & = 49 \\ 4a & +7b & = 52 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} a = \frac{45}{11} \\ \\ b = \frac{56}{11} \end{array}\right\} \Rightarrow 11y = 45x_1 + 56x_2$$

- Se puede extender el razonamiento anterior y generar un ajuste linear cuadrático. Esto es, el ajuste lineal es en los coeficiente, pero la funcionalidad de la ley a la cual queremos ajustar los datos puede ser un polinomio de cualquier orden. Ese es el caso de una parábola que ajusta al siguiente conjunto de puntos

$$\{(0,1),(1,3),(2,7),(3,15)\} \quad \Leftrightarrow \quad y = ax^2 + bx + c$$

  Las ecuaciones toman la forma de

$$\begin{array}{rccc} 1 = & 0 & +0 & +c \\ 3 = & a & +b & +c \\ 7 = & 4a & +2b & +c \\ 15 = & 9a & +3b & +c \end{array}$$

  y los vectores construidos a partir de los datos experimentales serán

$$|\mathbf{x}_1\rangle = (0,1,4,9); \quad |\mathbf{x}_2\rangle = (0,1,2,3); \quad |\mathbf{x}_3\rangle = (1,1,1,1); \quad |\mathbf{y}\rangle = (1,3,7,15)$$

  las ecuaciones normales para este sistema son

$$\left.\begin{array}{rccc} 136 = & 98a & +36b & +14c \\ 62 = & 36a & +14b & +6c \\ 26 = & 14a & +6b & +4c \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} a = -6 \\ \\ b = \frac{113}{5} \\ \\ c = -\frac{32}{5} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad y = -6x^2 + \frac{113}{5}x - \frac{32}{5}$$

Ejercicios Al medir la temperatura a lo largo de una barra material obtenemos los siguientes valores

x_i	(cm)	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0
T_i	$(°C)$	14,6	18,5	36,6	30,8	59,2	60,1	62,2	79,4	99,9

Encuentre, mediante el método de los mínimos cuadrados los coeficientes que mejor ajustan a una recta $T = ax + b$

2.7. Algunos ejemplos resueltos

1. Consideramos el espacio vectorial de polinomios, , de grado $g \leq n$ definidos en el intervalo $[0,1]$ o en el intervalo $[-1,1]$ según el caso

   a) Consideramos el espacio vectorial de polinomios, , de grado $g \leq n$ definidos en el intervalo $[0,1]$ o en el intervalo $[-1,1]$ según el caso ¿ Cuál o cuáles de los siguientes conjuntos de vectores en $\mathcal{P}^3$ son linealmente independientes ? Explique por qué
   Ninguno, todos son linealmente dependientes

      1) $|\mathbf{x1}\rangle = 1; \quad |\mathbf{x2}\rangle = x-1; \quad |\mathbf{x3}\rangle = x^2; \quad |\mathbf{x4}\rangle = x^2+2x+1;$
      Linealmente dependiente ya que siempre podremos expresar $|\mathbf{x4}\rangle = 3|\mathbf{x1}\rangle + 2|\mathbf{x2}\rangle + |\mathbf{x3}\rangle$
      2) $|\mathbf{x1}\rangle = 2x; \quad |\mathbf{x2}\rangle = x^2+1; \quad |\mathbf{x3}\rangle = x+1; \quad |\mathbf{x4}\rangle = x^2-1;$
      Linealmente dependiente ya que siempre podremos expresar $|\mathbf{x4}\rangle = |\mathbf{x1}\rangle + |\mathbf{x2}\rangle - 2|\mathbf{x3}\rangle$
      3) $|\mathbf{x1}\rangle = x(x-1); \quad |\mathbf{x2}\rangle = x; \quad |\mathbf{x3}\rangle = x^3; \quad |\mathbf{x4}\rangle = 2x^3-x^2;$
      Linealmente dependiente ya que siempre podremos expresar $|\mathbf{x4}\rangle = -|\mathbf{x1}\rangle + |\mathbf{x2}\rangle + 2|\mathbf{x3}\rangle$

   b) Considerando las siguientes definiciones de producto interior en $\mathcal{P}^n$:definidos en el intervalo $[0,1]$ o en el intervalo $[-1,1]$ según el caso

$$\langle \mathbf{q}_n | \mathbf{p}_n \rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\mathrm{d}x \qquad \text{y} \qquad \langle \mathbf{q}_n | \mathbf{p}_n \rangle = \int_{0}^{1} p(x)q(x)\mathrm{d}x$$

   En $\mathcal{P}^3$ encontrar la distancia y el ángulo entre los vectores

$$|\mathbf{x1}\rangle = x(x-1); \quad |\mathbf{x2}\rangle = x;$$

   En general la definición de distancia es

$$d\left(|\mathbf{x1}\rangle, |\mathbf{x2}\rangle\right) = \sqrt{\langle \mathbf{x2} - \mathbf{x1}\ | \mathbf{x2} - \mathbf{x1} \rangle}$$

   por lo tanto para $\langle \mathbf{q}_n | \mathbf{p}_n \rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\mathrm{d}x$ *la distancia será*

$$\sqrt{\langle \mathbf{x2} - \mathbf{x1}\ | \mathbf{x2} - \mathbf{x1} \rangle} = \sqrt{\int_{-1}^{1} \left(x(x-1) - x\right)^2 \mathrm{d}x} = \frac{1}{15}\sqrt{690}$$

   y para $\langle \mathbf{q}_n | \mathbf{p}_n \rangle = \int_{0}^{1} p(x)q(x)\mathrm{d}x$ *ser'a*

$$\sqrt{\langle \mathbf{x2} - \mathbf{x1}\ | \mathbf{x2} - \mathbf{x1} \rangle} = \sqrt{\int_{0}^{1} \left(x(x-1) - x\right)^2 \mathrm{d}x} = \frac{2}{15}\sqrt{30}$$

   los ángulos serán

$$\theta = \arccos\left(\frac{\langle \mathbf{x1}\ | \mathbf{x2} \rangle}{\sqrt{\langle \mathbf{x1}\ | \mathbf{x1} \rangle}\sqrt{\langle \mathbf{x2}\ | \mathbf{x2} \rangle}}\right)$$

para $\langle \mathbf{q}_n|\mathbf{p}_n\rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\mathrm{d}x$

$$\theta = \arccos\left(\frac{\langle \mathbf{x1}\ |\mathbf{x2}\rangle}{\sqrt{\langle \mathbf{x1}\ |\mathbf{x1}\rangle}\sqrt{\langle \mathbf{x2}\ |\mathbf{x2}\rangle}}\right) = \arccos\left(\frac{\int_{-1}^{1}\left(x(x-1)\right)(x)\,\mathrm{d}x}{\sqrt{\int_{-1}^{1}\left(x(x-1)\right)^2\mathrm{d}x}\sqrt{\int_{-1}^{1}(x)^2\,\mathrm{d}x}}\right)$$

$$\theta = \arccos\left(-\frac{1}{12}\sqrt{15}\sqrt{6}\right) = 2{,}4825 \text{ rad}$$

para $\langle \mathbf{q}_n|\mathbf{p}_n\rangle = \int_{0}^{1} p(x)q(x)\mathrm{d}x$

$$\theta = \arccos\left(\frac{\langle \mathbf{x1}\ |\mathbf{x2}\rangle}{\sqrt{\langle \mathbf{x1}\ |\mathbf{x1}\rangle}\sqrt{\langle \mathbf{x2}\ |\mathbf{x2}\rangle}}\right) = \arccos\left(\frac{\int_{0}^{1}\left(x(x-1)\right)(x)\,\mathrm{d}x}{\sqrt{\int_{0}^{1}\left(x(x-1)\right)^2\mathrm{d}x}\sqrt{\int_{0}^{1}(x)^2\,\mathrm{d}x}}\right)$$

$$\theta = \arccos\left(-\frac{1}{12}\sqrt{15}\sqrt{2}\right) = 2{,}4825 \text{ rad}$$

¡ el mismo ángulo !

c) Una de las posibles bases de $\mathcal{P}^n$ será el conjunto $\left\{1, x, x^2, x^3, \cdots, x^n\right\}$ con el producto interno viene definido por $\langle \mathbf{f}|\ \mathbf{g}\rangle = \int_0^1 \mathrm{d}x\ f(x)\ g(x)$.

1) Encuentre la base ortonormal que expande el subespacio $\mathcal{S}^3$ de los polinomios, $\mathcal{P}^n$, de grado $g \leq 3$.
$\mathcal{S}^3$ tendrá como vectores linealmente independientes $\left\{1, x, x^2, x^3\right\}$ para encontrar la base ortonormal utilizamos el método de Gram Smith con lo cual tendremos que

$$|\mathbf{u}_n\rangle \equiv |\mathbf{v}_n\rangle - \sum_{i=1}^{n-1}\frac{\langle \mathbf{v}_n\ |\mathbf{u}_i\rangle}{\langle \mathbf{u}_i\ |\mathbf{u}_i\rangle}|\mathbf{u}_i\rangle$$

esto es

$$|\mathbf{u}_1\rangle = \frac{|\mathbf{v}_1\rangle}{\sqrt{\langle \mathbf{u}_1\ |\mathbf{u}_1\rangle}} = \frac{1}{\sqrt{\int_0^1\mathrm{d}x}} = 1$$

$$|\mathbf{u}_2\rangle = \frac{|\mathbf{v}_2\rangle - \frac{\langle \mathbf{v}_2\,|\mathbf{u}_1\rangle}{\langle \mathbf{u}_1\,|\mathbf{u}_1\rangle}|\mathbf{u}_1\rangle}{\sqrt{\langle \mathbf{u}_2\ |\mathbf{u}_2\rangle}} = \frac{x - \frac{\int_0^1 x\mathrm{d}x}{\int_0^1\mathrm{d}x}}{\sqrt{\langle \mathbf{u}_2\ |\mathbf{u}_2\rangle}} = \frac{x-\frac{1}{2}}{\sqrt{\int_0^1\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\mathrm{d}x}} = 2\left(x-\frac{1}{2}\right)\sqrt{3}$$

$$|\mathbf{u}_3\rangle = \frac{|\mathbf{v}_3\rangle - \frac{\langle \mathbf{v}_3\,|\mathbf{u}_1\rangle}{\langle \mathbf{u}_1\,|\mathbf{u}_1\rangle}|\mathbf{u}_1\rangle - \frac{\langle \mathbf{v}_3\,|\mathbf{u}_2\rangle}{\langle \mathbf{u}_2\,|\mathbf{u}_2\rangle}|\mathbf{u}_2\rangle}{\sqrt{\langle \mathbf{u}_3\ |\mathbf{u}_3\rangle}} = \frac{x^2 - \frac{\int_0^1 x^2\mathrm{d}x}{\int_0^1\mathrm{d}x} - \frac{\int_0^1 x^2\left(2\left(x-\frac{1}{2}\right)\sqrt{3}\right)\mathrm{d}x}{\int_0^1\left(2\left(x-\frac{1}{2}\right)\sqrt{3}\right)^2\mathrm{d}x}\left(2\left(x-\frac{1}{2}\right)\sqrt{3}\right)}{\sqrt{\langle \mathbf{u}_3\ |\mathbf{u}_3\rangle}}$$

$$|\mathbf{u}_3\rangle = \frac{x^2+\frac{1}{6}-x}{\sqrt{\int_0^1\left(x^2+\frac{1}{6}-x\right)^2\mathrm{d}x}} = 6\left(x^2+\frac{1}{6}-x\right)\sqrt{5}$$

$$|\mathbf{u}_4\rangle = \frac{|\mathbf{v}_4\rangle - \frac{\langle \mathbf{v}_4 |\mathbf{u}_1\rangle}{\langle \mathbf{u}_1 |\mathbf{u}_1\rangle}|\mathbf{u}_1\rangle - \frac{\langle \mathbf{v}_4 |\mathbf{u}_2\rangle}{\langle \mathbf{u}_2 |\mathbf{u}_2\rangle}|\mathbf{u}_2\rangle - \frac{\langle \mathbf{v}_4 |\mathbf{u}_3\rangle}{\langle \mathbf{u}_3 |\mathbf{u}_3\rangle}|\mathbf{u}_2\rangle}{\sqrt{\langle \mathbf{u}_4 |\mathbf{u}_4\rangle}} =$$

$$|\mathbf{u}_4\rangle = \frac{x^3 - \int_0^1 x^3 \mathrm{d}x - \left(\int_0^1 x^3 \left(2\left(x-\frac{1}{2}\right)\sqrt{3}\right)\mathrm{d}x\right)\left(\left(2\left(x-\frac{1}{2}\right)\sqrt{3}\right)\right)}{\sqrt{\langle \mathbf{u}_4 |\mathbf{u}_4\rangle}}$$

$$- \frac{\left(\int_0^1 x^3 \left(6\left(x^2+\frac{1}{6}-x\right)\sqrt{5}\right)\mathrm{d}x\right)\left(6\left(x^2+\frac{1}{6}-x\right)\sqrt{5}\right)}{\sqrt{\langle \mathbf{u}_4 |\mathbf{u}_4\rangle}}$$

$$|\mathbf{u}_4\rangle = \frac{\left(x^3 - \frac{1}{20} + \frac{3}{5}x - \frac{3}{2}x^2\right)}{\sqrt{\int_0^1 \left(x^3 - \frac{1}{20} + \frac{3}{5}x - \frac{3}{2}x^2\right)^2 \mathrm{d}x}} = 20\left(x^3 - \frac{1}{20} + \frac{3}{5}x - \frac{3}{2}x^2\right)\sqrt{7}$$

2) Encuentre las componentes del polinomio $g(x) = 5 + 3x^2 - x^3 + x^5$ proyectado sobre esa base ortonormal que expande a $\mathcal{S}^3$

Las componentes de la proyección de $g(x)$ en $\mathcal{S}^3$ *serían*

$$c^1 = \langle \mathbf{g} |\mathbf{u}_1\rangle = \int_0^1 u_1(x)\ g(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (1)\ \left(5 + 3x^2 - x^3 + x^5\right)\mathrm{d}x = \frac{71}{12}$$

$$c^2 = \langle \mathbf{g} |\mathbf{u}_2\rangle = \int_0^1 u_2(x)\ g(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(2\left(x-\frac{1}{2}\right)\sqrt{3}\right)\ \left(5 + 3x^2 - x^3 + x^5\right)\mathrm{d}x = \frac{197}{420}\sqrt{3}$$

$$c^3 = \langle \mathbf{g} |\mathbf{u}_3\rangle = \int_0^1 u_3(x)\ g(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(6\left(x^2+\frac{1}{6}-x\right)\sqrt{5}\right)\ \left(5 + 3x^2 - x^3 + x^5\right)\mathrm{d}x$$
$$= \frac{23}{210}\sqrt{5}$$

$$c^4 = \langle \mathbf{g} |\mathbf{u}_4\rangle = \int_0^1 u_4(x)\ g(x)\,\mathrm{d}x$$
$$= \int_0^1 \left(20\left(x^3 - \frac{1}{20} + \frac{3}{5}x - \frac{3}{2}x^2\right)\sqrt{7}\right)\ \left(5 + 3x^2 - x^3 + x^5\right)\mathrm{d}x = \frac{4}{315}\sqrt{7}$$

con lo cual

$$|\mathbf{g}\rangle_{\mathcal{S}^3} = \frac{71}{12}|\mathbf{u}_1\rangle + \frac{197}{420}\sqrt{3}\,|\mathbf{u}_2\rangle + \frac{23}{210}\sqrt{5}\,|\mathbf{u}_3\rangle + \frac{4}{315}\sqrt{7}\,|\mathbf{u}_4\rangle$$

y la norma será

$$\left\||\mathbf{g}\rangle_{\mathcal{S}^3}\right\|^2 = \left(\frac{71}{12}\right)^2 + \left(\frac{197}{420}\sqrt{3}\right)^2 + \left(\frac{23}{210}\sqrt{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{315}\sqrt{7}\right)^2 = \frac{1{,}418{,}047}{39{,}690} \cong 35{,}728$$

para que, finalmente la proyección del polinomio en $\mathcal{S}^3$ será

$$g_{\mathcal{S}^3}(x) = \frac{71}{12} + \frac{197}{420}\sqrt{3}\left(2\left(x-\frac{1}{2}\right)\sqrt{3}\right) + \frac{23}{210}\sqrt{5}\left(6\left(x^2+\frac{1}{6}-x\right)\sqrt{5}\right) + \left(20\left(x^3 - \frac{1}{20} + \frac{3}{5}x - \frac{3}{2}x^2\right)\sqrt{7}\right)$$

$$g_{\mathcal{S}^3}(x) = \frac{71}{12} + \frac{197}{70}\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{23}{42}\left(x^2 + \frac{1}{6} - x\right) + 20\sqrt{7}\left(x^3 - \frac{1}{20} + \frac{3}{5}x - \frac{3}{2}x^2\right)$$

es decir

$$g_{\mathcal{S}^3}(x) = \frac{5797}{1260} - \sqrt{7} + \left(\frac{34}{15} + 12\sqrt{7}\right)x + \left(\frac{23}{42} - 30\sqrt{7}\right)x^2 + 20\sqrt{7}x^3$$

3) Encuentre la mínima distancia desde el subespacio $\mathcal{S}^3$ al polinomio $g(x)$
La distancia mínima será la norma del vector ortogonal a $\mathcal{S}^3$ tal que

$$|\mathbf{g}\rangle = |\mathbf{g}\rangle_{\mathcal{S}^3} + |\mathbf{g}\rangle_{\perp\mathcal{S}^3} \qquad \text{donde } |\mathbf{g}\rangle_{\mathcal{S}^3} \in \mathcal{S}^3$$

y $|\mathbf{g}\rangle_{\perp\mathcal{S}^3}$ es un vector de su complemento ortogonal. Por lo tanto el Teorema de Pitágoras nos dice que

$$\||\mathbf{g}\rangle\|^2 = \||\mathbf{g}\rangle_{\mathcal{S}^3}\|^2 + \||\mathbf{g}\rangle_{\perp\mathcal{S}^3}\|^2$$

con lo cual tendremos que la mínima distancia será

$$\||\mathbf{g}\rangle_{\perp\mathcal{S}^3}\| = \sqrt{\||\mathbf{g}\rangle\|^2 - \||\mathbf{g}\rangle_{\mathcal{S}^3}\|^2}$$

$$\||\mathbf{g}\rangle\|^2 = \int_0^1 \left(5 + 3x^2 - x^3 + x^5\right)^2 \mathrm{d}x = \frac{495193}{13860}$$

$$\||\mathbf{g}\rangle_{\mathcal{S}^3}\|^2 = \frac{1418047}{39690}$$

con lo cual

$$\||\mathbf{g}\rangle_{\perp\mathcal{S}^3}\| = \sqrt{\frac{495193}{13860} - \frac{1418047}{39690}} \approx 1{,}196\,5 \times 10^{-2}$$

d) Sea $f(x) = e^{2x}$ una función perteneciente al espacio lineal de funciones continua y continuamente diferenciables, $\mathcal{C}^{\infty}_{[-1,1]}$, en el cual el producto interno viene definido por $\langle\mathbf{q}|\mathbf{p}\rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\ \mathrm{d}x$. Encuentre el polinomio lineal más cercano a la función $f(x)$.

En el subespacio S^1 de polinomios lineales, los vectores base son $\{1, x\}$ Es una base ortogonal pero no es normal, con lo cual la normalizamos

$$|\mathbf{u}_1\rangle = \frac{|\mathbf{v}_1\rangle}{\sqrt{\langle\mathbf{u}_1\,|\mathbf{u}_1\rangle}} = \frac{1}{\sqrt{\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$|\mathbf{u}_2\rangle = \frac{|\mathbf{v}_2\rangle - \frac{\langle\mathbf{v}_2\,|\mathbf{u}_1\rangle}{\langle\mathbf{u}_1\,|\mathbf{u}_1\rangle}|\mathbf{u}_1\rangle}{\sqrt{\langle\mathbf{u}_2\,|\mathbf{u}_2\rangle}} = \frac{x - \frac{\int_{-1}^{1}x\mathrm{d}x}{\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x}}{\sqrt{\langle\mathbf{u}_2\,|\mathbf{u}_2\rangle}} = \frac{x}{\sqrt{\int_{-1}^{1}x^2\mathrm{d}x}} = \frac{\sqrt{6}}{2}x$$

y *la proyección ortogonal de esta función será*

$$c^0 = \int_{-1}^{1} e^{2x}\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)\mathrm{d}x = -\frac{\sqrt{2}}{4}\left(-e^2 + e^{-2}\right) \qquad \text{y} \qquad c^1 = \int_{-1}^{1}\left(\frac{\sqrt{6}}{2}x\right)e^{2x}\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{6}}{8}\left(e^2 + 3e^{-2}\right)$$

con lo cual la función lineal será

$$\mathcal{P}^n = \left(\frac{\sqrt{6}}{8}\left(e^2 + 3e^{-2}\right)\right)x - \frac{\sqrt{2}}{4}\left(-e^2 + e^{-2}\right)$$

2.8. Algunos ejercicios propuestos

1. Sea S el conjunto de todos los números reales excluyendo -1 y defina la operación $\square$

$$a \square b = a + b + ab$$

donde $+$ es la suma estándar entre números reales.

   a) Muestre que $[S, \square]$ forman grupo
   b) Encuentre la solución en S para la ecuación $2 \square x \square 3 = 7$

2. Considere un triángulo equilátero. Uno puede identificar operaciones de rotación alrededor de un eje perpendicular a la figura y reflexiones respecto a planos que dejan invariante la figura del triángulo.

   a) Muestre que el conjunto de estas operaciones forma un grupo $\mathbf{G}_\triangle = \left\{I, R, \bar{R}, X_1, X_2, X_3\right\}$. con I la operación identidad; R y $\bar{R}$ las rotaciones y X_1, X_2 y X_3 las reflexiones. Muestre además, que las rotaciones forman un subgrupo cíclico de orden 3, mientras que las reflexiones forman un subgrupo cíclico de orden 2
   b) Construya la tabla de multiplicación para $\mathbf{G}_\triangle$
   c) Considere las siguientes matrices

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad D = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

   Muestre que forman grupo bajo la multiplicación de matrices y que ese grupo es isomorfo a $\mathbf{G}_\triangle$
   d) Considere las siguientes funciones

$$f_1(x) = x; \quad f_2(x) = \frac{1}{x}; \quad f_3(x) = \frac{1}{1-x}; \quad f_4(x) = \frac{x-1}{x}; \quad f_5(x) = 1 - x; \quad f_6(x) = \frac{x}{x-1};$$

   Muestre que forman grupo bajo la operación $f_i(x) \odot f_j(x) = f_i(f_j(x))$ y que ese grupo es isomorfo a $\mathbf{G}_\triangle$

.

3. Definamos una operación binaria $\blacksquare$ como

$$x \blacksquare y = x + y + \alpha xy$$

con $x, y, \alpha \in \mathbb{R}$ y además $\alpha \neq 0$.

   a) Demuestre que $\blacksquare$ es asociativa
   b) Muestre que $\blacksquare$ genera un grupo en $\left\{\mathbb{R} - \left(\frac{-1}{\alpha}\right)\right\}$. Es decir, $\forall x, y \in \mathbb{R} \wedge x \neq \frac{-1}{\alpha}, y \neq \frac{-1}{\alpha}$ entonces $x \blacksquare y$ forma un grupo

4. Muestre que el siguiente conjunto de transformaciones en el plano xy forman un grupo y construya su tabla de multiplicación

   a) $1 = \begin{cases} x \rightarrow x \\ \\ y \rightarrow y \end{cases}$

   b) $I = \begin{cases} x \rightarrow -x \\ \\ y \rightarrow -y \end{cases}$

   c) $I_x = \begin{cases} x \rightarrow -x \\ \\ y \rightarrow y \end{cases}$

   d) $I_y = \begin{cases} x \rightarrow x \\ \\ y \rightarrow -y \end{cases}$

5. Muestre que también serán espacios vectoriales

   a) El conjunto de todas las funciones $f = f(x)$ definidas en $x = 1$ con $f(1) = 0$. Si $f(1) = c$, ¿ tendremos igual un espacio vectorial ? ¿ por qué ?

   b) Los vectores $(x, y, z) \in V_3$ tal que sus componentes satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones algebraico

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z &= 0 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z &= 0 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z &= 0 \end{aligned}$$

6. Sea $\mathcal{P}_n$ el conjunto de todos los polinomios de grado n, en x, con coeficientes reales:

$$|\mathbf{p}_n\rangle \rightleftharpoons p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_{n-1}x^{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$$

   a) Demostrar que $\mathcal{P}_n$ es un espacio vectorial respecto a la suma de polinomios y a la multiplicación de polinomios por un escalar (número real).

   b) Si los coeficientes a_i son enteros, ¿ $\mathcal{P}_n$ será un espacio vectorial ?
   ¿ Por qué ?

   c) ¿ Cuál de los siguientes subconjuntos de $\mathcal{P}_n$ es un subespacio vectorial ?

      1) El polinomio cero y todos los polinomios de grado $n - 1$.
      2) El polinomio cero y todos los polinomios de grado par.
      3) Todos los polinomios que tienen a x como un factor (grado $n > 1$).
      4) Todos los polinomios que tienen a $x - 1$ como un factor.

   d) ¿ Cuál de los siguientes polinomios pertenece al subespacio de $\mathcal{P}$ generado por: $|\mathbf{x1}\rangle = x^3 + 2x + 1$; $|\mathbf{x2}\rangle = x^2 - 2$; $|\mathbf{x3}\rangle = x^3 + x$;

      1) $x^2 - 2x + 1$;
      2) $x^4 + 1$;

3) $-\frac{1}{2}x^3 + \frac{5}{2}x^2 - x - 1$;
4) $x - 5$;

e) Probar que los polinomios

$$|\mathbf{x1}\rangle = 1; \quad |\mathbf{x2}\rangle = x; \quad |\mathbf{x3}\rangle = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}; \quad |\mathbf{x4}\rangle = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x;$$

Forman una base en $\mathcal{P}_4$. Expresar $|\mathbf{p}\rangle = x^2; \quad |\mathbf{q}\rangle = x^3$ en función de esa base.

f) Sean $|\mathbf{p}_n\rangle = p(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$, $|\mathbf{q}_n\rangle = q(x) = \sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i \in \mathcal{P}_n$. Considérese la siguiente definición:

$$\langle \mathbf{q}_n | \mathbf{p}_n \rangle \rightleftharpoons a_0 b_0 + a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_{n-1} b_{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i b_i$$

1) Muestre que ésta es una buena definición de producto interno.
2) A partir de la definición anterior de producto interno encuentre las expresiones para la norma y la distancia entre polinomios
3) Con esta definición de producto interior ¿ se puede considerar $\mathcal{P}_n$ un subespacio de $\mathcal{C}_{[a,b]}$? ¿ Por qué ?

g) Considerando estas definiciones de producto interior en $\mathcal{P}_n$

1) $\langle \mathbf{q}_n | \mathbf{p}_n \rangle = \int_{-1}^{1} p(x) q(x) \mathrm{d}x$
2) $\langle \mathbf{q}_n | \mathbf{p}_n \rangle = \int_{0}^{1} p(x) q(x) \mathrm{d}x$

Encontrar la distancia y el ángulo entre los siguientes pares de vectores en $\mathcal{P}_3$

1) $|\mathbf{x1}\rangle = 1; \quad |\mathbf{x2}\rangle = x$;
2) $|\mathbf{x1}\rangle = 2x; \quad |\mathbf{x2}\rangle = x^2$;

h) Encontrar la proyección perpendicular de los siguientes vectores en $\mathcal{C}_{[-1,1]}$ (espacio de funciones continuas en el intervalo [-1,1]) al subespacio generado por los polinomios $1,\ x,\ x^2 - 1$. Calcular la distancia de cada una de estas funciones al subespacio mencionado.

1) $f(x) = x^n; \quad n$ entero
2) $f(x) = \operatorname{sen} x$;
3) $f(x) = 3x^2$;

7. Los vectores en $\mathbb{R}^3$ en coordenada cartesianas los definimos como $\vec{a} = a_x \hat{\imath} + a_y \hat{\jmath} + a_y \hat{\mathrm{k}}$ y definimos una "tabla de multiplicación" entre ellos de la forma $\left\langle \mathbf{e}^i \, | \mathbf{e}_j \right\rangle = \delta^i_j$ con $i, j = 1, 2, 3$, esto es:

$\left\langle \mathbf{e}^i \, \vert \mathbf{e}_j \right\rangle$	$\hat{\imath}$	$\hat{\jmath}$	$\hat{\mathrm{k}}$
$\hat{\imath}$	1	0	0
$\hat{\jmath}$	0	1	0
$\hat{\mathrm{k}}$	0	0	1

con $i, j = 1, 2, 3$

Un cuaternión cartesiano puede escribirse de manera análoga a los vectores cartesianos, vale decir:

$$|\mathbf{a}\rangle = a^\alpha \, |\mathbf{q}_\alpha\rangle = a^0 + a^i \, |\mathbf{q}_i\rangle = a_0 + a_x \hat{\imath} + a_y \hat{\jmath} + a_y \hat{\mathrm{k}}$$

con $\alpha = 0, 1, 2, 3$ y donde las a^icon $i = 1, 2, 3$ son números reales que representan las componentes vectoriales en coordenadas cartesianas de los cuaterniones, mientras que la a^0, también números reales, se le llama componente escalar[9]. Los cuaterniones fueron inventados por el matemático irlandés William Rowan Hamilton[10] a mediados del siglo XIX. Por decirlo de alguna manera, son híbridos. o generalizaciones a un plano hipercomplejo. Un vector cartesiano es un cuaternión con la componente escalar nula. Basándonos en este esquema podemos definir la "tabla de multiplicación" para los cuaterniones cartesianos como

$\lvert \mathbf{q}'_i \rangle \odot \lvert \mathbf{q}_j \rangle$	$\mathbf{1}$	$\lvert \mathbf{q}_1 \rangle$	$\lvert \mathbf{q}_2 \rangle$	$\lvert \mathbf{q}_3 \rangle$
$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$	$\lvert \mathbf{q}_1 \rangle$	$\lvert \mathbf{q}_2 \rangle$	$\lvert \mathbf{q}_3 \rangle$
$\lvert \mathbf{q}'_1 \rangle$	$\lvert \mathbf{q}_1 \rangle$	$-\mathbf{1}$	$\lvert \mathbf{q}_3 \rangle$	$-\lvert \mathbf{q}_2 \rangle$
$\lvert \mathbf{q}'_2 \rangle$	$\lvert \mathbf{q}_2 \rangle$	$-\lvert \mathbf{q}_3 \rangle$	$-\mathbf{1}$	$\lvert \mathbf{q}_1 \rangle$
$\lvert \mathbf{q}'_3 \rangle$	$\lvert \mathbf{q}_3 \rangle$	$\lvert \mathbf{q}_2 \rangle$	$-\lvert \mathbf{q}_1 \rangle$	$-\mathbf{1}$

Nótese que por el hecho que $\lvert \mathbf{q}_j \rangle \odot \lvert \mathbf{q}_j \rangle = -1 \Rightarrow \lvert \mathbf{q}_1 \rangle \odot \lvert \mathbf{q}_1 \rangle = \lvert \mathbf{q}_2 \rangle \odot \lvert \mathbf{q}_2 \rangle = \lvert \mathbf{q}_3 \rangle \odot \lvert \mathbf{q}_3 \rangle = -1$, se puede pensar que un cuaternión es la generalización de los números complejos a más de una dimensión (un número hipercomplejo) donde la parte imaginaria tendría tres dimensiones y no una como es costumbre. Esto es

$$\lvert \mathbf{a} \rangle = a^{\alpha} \lvert \mathbf{q}_{\alpha} \rangle = a^0 \underbrace{\lvert \mathbf{q}_0 \rangle}_{\mathbf{1}} + a^j \lvert \mathbf{q}_j \rangle = a^0 + \underbrace{a^1 \lvert \mathbf{q}_1 \rangle + a^2 \lvert \mathbf{q}_2 \rangle + a^3 \lvert \mathbf{q}_3 \rangle}_{\text{“parte compleja”}}$$

Siendo consistente con esa visión de generalización de un número complejo, definiremos el conjugado de un cuaternión como $\lvert \mathbf{b} \rangle^{\maltese} = b^0 \lvert \mathbf{q}_0 \rangle - b^j \lvert \mathbf{q}_j \rangle$ con $j = 1, 2, 3$. Es decir, en analogía con los números complejos el conjugado de un cuaternión cambia el signo de su "parte compleja vectorial". Igualmente, definiremos la suma entre cuaterniones como

$$\left. \begin{array}{l} \lvert \mathbf{a} \rangle = a^{\alpha} \lvert \mathbf{q}_{\alpha} \rangle \\ \\ \lvert \mathbf{b} \rangle = b^{\alpha} \lvert \mathbf{q}_{\alpha} \rangle \end{array} \right\} \Rightarrow \lvert \mathbf{c} \rangle = c^{\alpha} \lvert \mathbf{q}_{\alpha} \rangle = \lvert \mathbf{a} \rangle + \lvert \mathbf{b} \rangle = (a^{\alpha} + b^{\alpha}) \lvert \mathbf{q}_{\alpha} \rangle \Rightarrow \qquad c^{\alpha} = (a^{\alpha} + b^{\alpha})$$

Esto quiere decir que los vectores se suman componente a componente. Mientras que la multiplicación por un escalar queda definida por $\alpha \lvert \mathbf{c} \rangle = \alpha c^{\alpha} \lvert \mathbf{q}_{\alpha} \rangle$ es decir se multiplica el escalar por cada componente.

a) Compruebe si los Cuaterniones, $\lvert \mathbf{a} \rangle$, forman un espacio vectorial respecto a una operación esa suma y esa multiplicación por escalares, análoga a la de los vectores en $\mathbf{R}^3$ en coordenada cartesianas. ¿ Cuaterniones $\lvert \mathbf{a} \rangle$ son vectores, pseudovectores o ninguna de las anteriores ? Explique por qué.

b) Dados dos cuaterniones $\lvert \mathbf{b} \rangle \equiv \left(b^0, \vec{b}\right)$ y $\lvert \mathbf{r} \rangle \equiv \left(r^0, \vec{r}\right)$ entonces, el producto entre cuaterniones $\lvert \mathbf{d} \rangle = \lvert \mathbf{b} \rangle \odot \lvert \mathbf{r} \rangle$ podrá representarse como

$$\lvert \mathbf{d} \rangle = \lvert \mathbf{b} \rangle \odot \lvert \mathbf{r} \rangle \longleftrightarrow \left(d^0, \vec{d}\right) = \left(b^0 d^0 - \vec{b} \cdot \vec{r}, d^0 \vec{b} + b^0 \vec{r} + \vec{b} \times \vec{r}\right)$$

donde $\cdot$ y $\times$ corresponden con los productos escalares y vectoriales tridimensionales. de siempre, respectivamente.
Más aún, ahora con índices, dados $\lvert \mathbf{b} \rangle = b^{\alpha} \lvert \mathbf{q}_{\alpha} \rangle$ y $\lvert \mathbf{r} \rangle = r^{\alpha} \lvert \mathbf{q}_{\alpha} \rangle$, compruebe si su producto de $\lvert \mathbf{d} \rangle = \lvert \mathbf{b} \rangle \odot \lvert \mathbf{r} \rangle$ puede ser siempre escrito de la forma

$$\lvert \mathbf{d} \rangle = \lvert \mathbf{b} \rangle \odot \lvert \mathbf{r} \rangle = a \lvert \mathbf{q}_0 \rangle + \tilde{S}^{ij} \delta_i^0 \lvert \mathbf{q}_j \rangle + A^{[jk]i} b_j r_k \lvert \mathbf{q}_i \rangle$$

[9] Recuerde que estamos utilizando la convención de Einstein en la cual $c^{\alpha} \lvert \mathbf{q}_{\alpha} \rangle \equiv c^0 + \sum_{j=1}^{3} c^j \lvert \mathbf{q}_j \rangle$. Es decir hemos supuesto que $\lvert \mathbf{q}_0 \rangle \equiv 1$, la unidad en los números reales. Adicionalmente, nótese que los índices griegos $\alpha, \beta, \cdots$ toman los valores $0, 1, 2, 3$, mientras que los latinos que acompañan a los vectores cartesianos toman los siguiente valores $j, k, l = 1, 2, 3$.

[10] Para más detalles y de los cuaterniones pueden consultar http://mathworld.wolfram.com/Quaternion.html

donde a representa un escalar; $S^{(ij)}\delta_i^0$ tres cantidades (recuerde que los índices latinos toman los siguiente valores $j,k,l=1,2,3.$) y donde $S^{(ij)}$ indica $S^{ji}=S^{ij}$ que la cantidad S^{ij} es simétrica y por lo tanto $\left(S^{ij}\delta_i^0+S^{ji}\delta_i^0\right)|\mathbf{q}_j\rangle$ Mientras $A^{[jk]i}$ representa un conjunto de objetos antisimétricos en j y k : $A^{[jk]i}\to A^{jki}=-A^{kji}\to\left(A^{jki}b_jc_k-A^{kji}b_jc_k\right)|\mathbf{q}_i\rangle$. Identifique las cantidades $a,S^{(ij)}$ y $A^{[jk]i}$ en término de las componentes de los cuaterniones

¿ el producto de cuaterniones $|\mathbf{d}\rangle=|\mathbf{a}\rangle\odot|\mathbf{r}\rangle$ será un vector, pseudovector o ninguna de las anteriores ?. Explique por qué.

c) Muestre que los cuaterniones pueden ser representados por matrices complejas 2×2 del tipo

$$|\mathbf{b}\rangle\longleftrightarrow\left(\begin{array}{cc} z & w\\ -\bar{w} & \bar{z}\end{array}\right)$$

donde z,w son números complejos y $\bar{w}$ y $\bar{z}$ sus complejos conjugados

d) Muestre que una representación posible para la base de cuaterniones es, la matriz unitaria $4x4$ y

$$|\mathbf{q}_1\rangle=\left(\begin{array}{cccc}0&1&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&-1&0\end{array}\right);\quad|\mathbf{q}_2\rangle=\left(\begin{array}{cccc}0&0&0&-1\\0&0&-1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{array}\right);\quad|\mathbf{q}_3\rangle=\left(\begin{array}{cccc}0&0&-1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&-1&0&0\end{array}\right)$$

e) Compruebe si la siguiente es una buena definición de producto interno:

$$\langle\mathbf{a}\,|\mathbf{b}\rangle=|\mathbf{a}\rangle^{\maltese}\odot|\mathbf{b}\rangle$$

f) Modifique un poco la definición anterior de tal forma que se tenga la

$$(\mathbf{a}\,|\mathbf{b})=\frac{1}{2}\left[\langle\mathbf{a}\,|\mathbf{b}\rangle-|\mathbf{q}_1\rangle\odot\langle\mathbf{a}\,|\mathbf{b}\rangle\odot|\mathbf{q}_1\rangle\right]$$

y compruebe si esta definición compleja del producto interno cumple con todas las propiedades. Nótese que un cuaternión de la forma $|\mathbf{f}\rangle=f^0+f^1|\mathbf{q}_1\rangle$ es un número complejo convencional.

g) Compruebe si la siguiente es una buena definición de norma para los cuaterniones

$$n(|\mathbf{b}\rangle)=\||\mathbf{a}\rangle\|=\sqrt{\langle\mathbf{a}\,|\mathbf{a}\rangle}=\sqrt{|\mathbf{a}\rangle^{\maltese}\odot|\mathbf{a}\rangle}$$

h) Comprebe si un cuaternión definido por

$$\overline{|\mathbf{a}\rangle}=\frac{|\mathbf{a}\rangle^{\maltese}}{\||\mathbf{a}\rangle\|^2}$$

puede ser considerado como el inverso o elemento simétrico de $|\mathbf{a}\rangle$ respecto a la multiplicación $\odot$

i) Compruebe si los Cuaterniones $|\mathbf{a}\rangle$ forman un grupo respecto a una operación multiplicación $\odot$.

j) Los vectores en $\Re^3$ en coordenada cartesianas, $|v\rangle$, pueden ser representados como cuaterniones donde la parte escalar es nula $v^0=0\to|v\rangle=v^j|\mathbf{q}_j\rangle$ .Compruebe si el siguiente producto conserva la norma

$$|v'\rangle=\overline{|\mathbf{a}\rangle}\odot|v\rangle\odot|\mathbf{a}\rangle$$

Estos es $\||v'\rangle\|^2=\left(v^{1\prime}\right)^2+\left(v^{2\prime}\right)^2+\left(v^{3\prime}\right)^2\equiv\left(v^1\right)^2+\left(v^2\right)^2+\left(v^3\right)^2=\||v\rangle\|^2$

Bibliografía

[1] Apostol, T. M. (1972) **Calculus** Vol 2 (*Reverté Madrid*) `QA300 A66C3 1972`

[2] Arfken, G. B.,Weber, H., Weber, H.J. (2000) **Mathematical Methods for Physicists** 5ta Edición (Academic Press, Nueva York)

[3] Cohen-Tannoudji, C., Diu B. y Laloë (1977) **Quantum Mechanics** Vol 1 (*John Wiley Interscience, Nueva York*)

[4] Gelfand, I.M. (1961) **Lectures on Linear .Algebra** (*John Wiley & Sons Interscience, Nueva York*).

[5] Jordan, T.F. (1969) **Linear Operator for Quantum Mechanics** (*John Wiley & Sons Interscience, Nueva York*).

[6] Schutz, B. (1980) **Geometrical Methods in Mathematical Physics** (*Cambridge University Press, Londres*)