Matemática Avanzadas para la Ingeniería
Tarea 1 (Entrega 4Marzo)
Espacios Vectoriales

1. Los vectores en $\mathbb{R}^3$ en coordenada cartesianas los definimos como $\vec{a} = a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath} + a_y\hat{\mathtt{k}}$ y definimos una "tabla de multiplicación" entre ellos de la forma $\left\langle \mathbf{e}^i \,|\mathbf{e}_j\right\rangle = \delta^i_j$ con $i, j = 1, 2, 3$, esto es:

$\left\langle \mathbf{e}^i \,\middle|\mathbf{e}_j\right\rangle$	$\hat{\imath}$	$\hat{\jmath}$	$\hat{\mathtt{k}}$
$\hat{\imath}$	1	0	0
$\hat{\jmath}$	0	1	0
$\hat{\mathtt{k}}$	0	0	1

con $i, j = 1, 2, 3$

Un cuaternión cartesiano puede escribirse de manera análoga a los vectores cartesianos, vale decir:

$$|\mathbf{a}\rangle = a^\alpha |\mathbf{q}_\alpha\rangle = a^0 + a^i |\mathbf{q}_i\rangle = a_0 + a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath} + a_y\hat{\mathtt{k}}$$

con $\alpha = 0, 1, 2, 3$ y donde las a^icon $i = 1, 2, 3$ son números reales que representan las componentes vectoriales en coordenadas cartesianas de los cuaterniones, mientras que la a^0, también números reales, se le llama componente escalar[1]. Los cuaterniones fueron inventados por el matemático irlandés William Rowan Hamilton[2] a mediados del siglo XIX. Por decirlo de alguna manera, son híbridos. o generalizaciones a un plano hipercomplejo. Un vector cartesiano es un cuaternión con la componente escalar nula. Basándonos en este esquema podemos definir la "tabla de multiplicación" para los cuaterniones cartesianos como

$\lvert\mathbf{q}'_i\rangle \odot \lvert\mathbf{q}_j\rangle$	$\mathbf{1}$	$\lvert\mathbf{q}_1\rangle$	$\lvert\mathbf{q}_2\rangle$	$\lvert\mathbf{q}_3\rangle$
$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$	$\lvert\mathbf{q}_1\rangle$	$\lvert\mathbf{q}_2\rangle$	$\lvert\mathbf{q}_3\rangle$
$\lvert\mathbf{q}'_1\rangle$	$\lvert\mathbf{q}_1\rangle$	$-\mathbf{1}$	$\lvert\mathbf{q}_3\rangle$	$-\lvert\mathbf{q}_2\rangle$
$\lvert\mathbf{q}'_2\rangle$	$\lvert\mathbf{q}_2\rangle$	$-\lvert\mathbf{q}_3\rangle$	$-\mathbf{1}$	$\lvert\mathbf{q}_1\rangle$
$\lvert\mathbf{q}'_3\rangle$	$\lvert\mathbf{q}_3\rangle$	$\lvert\mathbf{q}_2\rangle$	$-\lvert\mathbf{q}_1\rangle$	$-\mathbf{1}$

Nótese que por el hecho que $|\mathbf{q}_j\rangle \odot |\mathbf{q}_j\rangle = -1 \Rightarrow |\mathbf{q}_1\rangle \odot |\mathbf{q}_1\rangle = |\mathbf{q}_2\rangle \odot |\mathbf{q}_2\rangle = |\mathbf{q}_3\rangle \odot |\mathbf{q}_3\rangle = -1$, se puede pensar que un cuaternión es la generalización de los números complejos a más de una dimensión (un número hipercomplejo) donde la parte imaginaria tendría tres dimensiones y no una como es costumbre. Esto es

$$|\mathbf{a}\rangle = a^\alpha |\mathbf{q}_\alpha\rangle = a^0 \underbrace{|\mathbf{q}_0\rangle}_{\mathbf{1}} + a^j |\mathbf{q}_j\rangle = a^0 + \underbrace{a^1 |\mathbf{q}_1\rangle + a^2 |\mathbf{q}_2\rangle + a^3 |\mathbf{q}_3\rangle}_{\text{"parte compleja"}}$$

Siendo consistente con esa visión de generalización de un número complejo, definiremos el conjugado de un cuaternión como $|\mathbf{b}\rangle^{\maltese} = b^0 |\mathbf{q}_0\rangle - b^j |\mathbf{q}_j\rangle$ con $j = 1, 2, 3$. Es decir, en analogía con los números complejos el conjugado de un cuaternión cambia el signo de su "parte compleja vectorial". Igualmente, definiremos la suma entre cuaterniones como

$$\left.\begin{array}{l} |\mathbf{a}\rangle = a^\alpha |\mathbf{q}_\alpha\rangle \\ \\ |\mathbf{b}\rangle = b^\alpha |\mathbf{q}_\alpha\rangle \end{array}\right\} \Rightarrow |\mathbf{c}\rangle = c^\alpha |\mathbf{q}_\alpha\rangle = |\mathbf{a}\rangle + |\mathbf{b}\rangle = (a^\alpha + b^\alpha) |\mathbf{q}_\alpha\rangle \Rightarrow \qquad c^\alpha = (a^\alpha + b^\alpha)$$

Esto quiere decir que los vectores se suman componente a componente. Mientras que la multiplicación por un escalar queda definida por $\alpha |\mathbf{c}\rangle = \alpha c^\alpha |\mathbf{q}_\alpha\rangle$ es decir se multiplica el escalar por cada componente.

[1] Estamos utilizando la convención de Einstein en la cual $c^\alpha |\mathbf{q}_\alpha\rangle \equiv c^0 + \sum_{j=1}^{3} c^j |\mathbf{q}_j\rangle$. Es decir hemos supuesto que $|\mathbf{q}_0\rangle \equiv 1$, la unidad en los números reales. Adicionalmente, nótese que los índices griegos $\alpha, \beta, \cdots$ toman los valores $0, 1, 2, 3$, mientras que los latinos que acompañan a los vectores cartesianos toman los siguiente valores $j, k, l = 1, 2, 3$.

[2] Para más detalles y de los cuaterniones pueden consultar http://mathworld.wolfram.com/Quaternion.html

a) Compruebe si los Cuaterniones, $|\mathbf{a}\rangle$, forman un espacio vectorial respecto a una operación esa suma y esa multiplicación por escalares, análoga a la de los vectores en $\mathbf{R}^3$ en coordenada cartesianas.

b) Compruebe si la siguiente es una buena definición de producto interno:

$$\langle \mathbf{a} \,|\mathbf{b}\rangle = |\mathbf{a}\rangle^{\maltese} \odot |\mathbf{b}\rangle$$

c) Modifique un poco la definición anterior de tal forma que se tenga la

$$(\mathbf{a} \,|\mathbf{b}) = \frac{1}{2}\left[\langle \mathbf{a} \,|\mathbf{b}\rangle - |\mathbf{q}_1\rangle \odot \langle \mathbf{a} \,|\mathbf{b}\rangle \odot |\mathbf{q}_1\rangle\right]$$

y compruebe si esta definición compleja del producto interno cumple con todas las propiedades. Nótese que un cuaternión de la forma $|\mathbf{f}\rangle = f^0 + f^1\,|\mathbf{q}_1\rangle$ es un número complejo convencional.

d) Compruebe si la siguiente es una buena definición de norma para los cuaterniones

$$n(|\mathbf{b}\rangle) = \||\mathbf{a}\rangle\| = \sqrt{\langle \mathbf{a} \,|\mathbf{a}\rangle} = \sqrt{|\mathbf{a}\rangle^{\maltese} \odot |\mathbf{a}\rangle}$$

e) Comprebe si un cuaternión definido por

$$\overline{|\mathbf{a}\rangle} = \frac{|\mathbf{a}\rangle^{\maltese}}{\||\mathbf{a}\rangle\|^2}$$

puede ser considerado como el inverso o elemento simétrico de $|\mathbf{a}\rangle$ respecto a la multiplicación $\odot$

2. Las matrices σ_x, σ_y, σ_z se conocen con el nombre de matrices de Pauli :

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \qquad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \qquad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \qquad \mathbb{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Muestre si las matrices de Pauli σ_x, σ_y, σ_z, conjuntamente con la matriz identidad, $\mathbf{1}$ forman un grupo respecto a la siguiente operación

$$\sigma_j \odot \sigma_k \equiv \sigma_j\sigma_k = i\epsilon_{jkm}\sigma^m + \delta_{jk}\mathbf{1} \qquad \text{con } j,k,m = x,y,z$$

ϵ_{jkm} el símbolo de Levi Civita y $i = \sqrt{-1}$

b) Muestre si las matrices de Pauli σ_x, σ_y, σ_z, conjuntamente con la matriz identidad, $\mathbf{1}$ son linealmente independientes.

c) ¿ Las matrices de Pauli forman base para un espacio vectorial de matrices complejas $2x2$? ¿ por qué ? Si forman base exprese la matriz

$$\begin{pmatrix} 3 & i \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

en términos de esa base

d) Derive la expresión general para $[\sigma_j, \sigma_k]$

e) Suponga ahora que σ_z actúa

$$\sigma_z\,|+\rangle = |+\rangle\,, \qquad \sigma_z\,|-\rangle = -\,|-\rangle$$

con

$$|+\rangle \leftrightarrows \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad |-\rangle \leftrightarrows \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

encuentre la expresión para los autovalores y autovectores de las otras matrices de Pauli

$$\begin{aligned} \sigma_x \left|+\right\rangle_x &= \lambda_{+x} \left|+\right\rangle_x , \qquad & \sigma_x \left|-\right\rangle_x &= \lambda_{-x} \left|-\right\rangle_x \\ \sigma_y \left|+\right\rangle_y &= \lambda_{+y} \left|+\right\rangle_y , \qquad & \sigma_y \left|-\right\rangle_y &= \lambda_{-y} \left|-\right\rangle_y \end{aligned}$$

f) Muestre que cualquier representación matricial de un operador genérico $\mathbb{M}$ puede ser expresado como combinación lineal de las matrices de Pauli.

g) El polinomio característico para ese operador genérico $\mathbb{M}$ se puede expresar como

$$P_\lambda = \lambda^2 - \lambda \mathrm{Traza}(\mathbb{M}) + \det(\mathbb{M}).$$

Donde los λ son sus autovalores